Cosmological Perturbation Theory in The Synchronous and Conformal Newtonian Gauges (1995, 37p)

Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger

Journal Club, janvier 2015, Boris Bolliet

Introduction

L'article de Ma & Bertschinger est probablement l'un des plus cités en cosmologie. Les équations présentées décrivent l'évolution des perturbations cosmologiques. L'univers est supposé homogène et isotrope aux très grandes échelles. L'univers est constitué par la matière noire, les photons et neutrinos, et la matière baryonique. Les auteurs discutent aussi le cas des neutrinos massifs. Pour la première fois, le calcul du spectre des anisotropies du CMB est présenté dans ses détails. Cet article a ouvert une "brèche" : la structure intélligente de l'article, ainsi que la rigueur dans la présentation des équations et des hypothèses sous-jacentes en font un article facilement utilisable, qui peut servir de base pour un grand nombre de projets de recherche.

Historique des codes pour le calcul des spectres CMB

Dans sa présentation du code CLASS, écrit à la fin des années 2000, Julien Lesgourgues propose l'historique suivant :

- 1995 : Bertshinger, COSMICS.
- 1996 : Selijak & Zaldarriaga, CMBFAST. Le code est mis à jour dans les années qui suivent et donne RECFAST.
- 1999 : Lewis et al, CAMB à partir de RECFAST.
- 2010 : Lesgourgues, Audren, Tram, CLASS (utilisé par la collaboration Planck).

Motivations

Selon la cosmologie standard, la formation des galaxies est basée sur l'évolution des instabilités gravitationnelles, dues à des fluctuations primordiales d'origine quantique. Si l'amplitude des fluctuations est petite, il est possible de développer une théorie linéaire pour expliquer leur évolution.

Lors de l'inflation, la longueur d'onde des fluctuations devient plus grande que la taille de l'horizon. Les fluctuations entrent à nouveau dans l'horizon après la fin de l'inflation. A de telles échelles, il est nécéssaire d'utiliser les équations de la relativité générale qui introduisent une liberté de jauge (liberté dans le choix du système de coordonnées). Dès 1946 Lifshitz choisit la jauge Synchrone (S) pour batir un modèle pionnier de l'évolution des perturbations cosmologique. Des problèmes dues à à la jauge S sont identifiés par Bardeen en 1980. En 1992, Mukhanov, Feldman & Brandenberger font le choix de la jauge Conformal Newtonian (CF) et batissent le modéle standard de la cosmologie, encore accepté aujourd'hui.

Les deux choix de jauge

La jauge S est définie par

$$\mathrm{g} = -a^2\mathrm{d}\tau\otimes\mathrm{d}\tau + a^2\left(\delta_{ij}+h_{ij}\right)\mathrm{dx^i}\otimes\mathrm{dx^j}$$

Dans la jauge (S) les coordonnées sont définies par des observateurs en chute libre. La jauge CN est définie par :

$$\mathrm{g} = -a^2\left(1+2\psi\right)\mathrm{d}\tau\otimes\mathrm{d}\tau + a^2\left(1-2\phi\right)\delta_{ij}\mathrm{dx^i}\otimes\mathrm{dx^j} + \left(h_V\cdot v_{ij} + h_T\cdot e_{ij}\right)\mathrm{dx^i}\otimes\mathrm{dx^j}$$

Il est possible de passer de la jauge (S) à la jauge (CN) par une transformation de coordonnées. Avec $\alpha = \frac{\dot{h}+6\dot{\eta}}{2\mathrm{k}^2}$:

$$\begin{aligned}
\psi &= \dot{\alpha}\\
\phi &= \eta - H\alpha\\
\dot{\phi} + H\psi &= \dot{\eta} - \dot{H}\alpha\\
\ddot{\phi} + H\dot{\psi} + 2\dot{H}\psi &= \ddot{\eta} - \ddot{H}\alpha
\end{aligned}$$

Le contenu de l'univers

Les perturbations des champs de matière et de rayonnement sont modélisées par une perturbation du tenseur énergie-impulsion :

$$\delta T^\mu_\nu = \left(\rho\delta + \delta P\right)u^\mu u_\nu + \left(\rho + P\right)\left(u_\nu\delta u^\mu + u^\mu\delta u_\nu\right) + \delta P\delta^\mu_\nu + P\Pi^\mu_\nu$$

Ces perturbations dépendent aussi du choix de jauge

$$\begin{aligned}
\delta_C &= \delta_S + \alpha\frac{\dot{\rho}}{\rho}\\
\theta_C &= \theta_S + \alpha\\
w\Gamma_C &= w\Gamma_S + \alpha\dot{w}\\
\Pi^{S,V,T}_C &= \Pi^{S,V,T}_S
\end{aligned}$$

Trois types d'équations dynamiques

Il y a trois types d'équations dynamiques :

— Les équations d'Einstein

$$\begin{aligned}
H\dot{h} - 2\mathrm{k}^2\eta &= \kappa^2\rho\delta\\
\dot{\eta} &= \frac{\kappa^2}{2}\rho\left(1+w\right)\theta\\
\frac{1}{3}\ddot{h} + \left(1+w\right)H\dot{h} - \frac{2}{3}\left(1+3w\right)\mathrm{k}^2\eta &= -\kappa^2\rho w\Gamma\\
\ddot{h} + 3H\dot{h} + 6\ddot{\eta} + 18H\dot{\eta} - 2\mathrm{k}^2\eta &= 2\kappa^2\rho w\Pi^S\\
\ddot{h}_V + 3H\dot{h}_V &= 2\kappa^2\rho w\Pi^V\\
\ddot{h}_T + 3H\dot{h}_T + \mathrm{k}^2 h_T &= 2\kappa^2\rho w\Pi^T
\end{aligned}$$

— Les équations de la dynamique des fluides

$$\begin{aligned}
\dot{\delta} + \left(1+w\right)\mathrm{k}^2\theta + 3Hw\Gamma &= -\left(1+w\right)\frac{\dot{h}}{2}\\
\left(1+\frac{1}{w}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{\dot{w}}{w} - 3H\left(1+w\right)\right)\theta - \delta - \Gamma - \frac{2}{3}\Pi^S &= 0
\end{aligned}$$

Les perturbations sont supposées isentropiques $\frac{\delta P}{\delta\rho} = c_s^2 = \frac{dP}{d\rho}$, donc $\Gamma = 0$.

— Les équations de Boltzmann

$$\frac{Df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial\tau} + \frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial q} + \frac{dn^i}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial n^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial\tau}\right)_{collision}$$

Ici, n^i décrit les directions spatiales. La fonction de distribution f décrit la probabilité de trouver une particule à tel ou tel coordonnée de l'espace des phases $\left(x^i, P_i, \tau\right) = \left(x^i, q, n_i, \tau\right)$. A l'ordre 0 en perturbation, f_0 correspond naturellement à la distribution de Fermi-Dirac pour les fermions, et à la distribution de Bose-Einstein pour les bosons. On écrit ensuite $f = f_0\left[1+\Psi\right]$, puis

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + i\frac{q}{\epsilon}\left(\vec{k}\cdot\hat{n}\right)\psi + \frac{d\ln f_0}{d\ln q}\left[\dot{\eta} - \frac{\dot{h}+6\dot{\eta}}{2}\left(\vec{k}\cdot\hat{n}\right)^2\right] = \frac{1}{f_0}\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_{collision}$$

La fonction de distribution est reliée au tenseur énergie-impulsion via

$$T_{\mu\nu} = \int dP_1 dP_2 dP_3 \sqrt{-g}\frac{P_\mu P_\nu}{P^0} f\left(x^i, P_i, \tau\right)$$

La matière noire froide

CDM est traitée comme un fluide parfait sans pression, qui n'intéragit avec les autres constituants que par le biais de la gravité. Cela entraine $w = \dot{w} = 0$ ainsi que $\Gamma = 0$. De plus, les particules de matière noire sont utilisées pour pour définir les coordonnées de la jauge synchrone, donc $\theta = \Pi = 0$. Les équations du fluide deviennent simplement

$$\dot{\delta}_c = -\frac{1}{2}\dot{h}$$

Les neutrinos sans masse

Dans ce cas les neutrinos sont considérés comme du rayonnement

$$\rho_\nu = 3P_\nu = a^{-4}\int q^2 dq d\Omega q f_0\left(q\right)$$

Pour les particules sans masse, les équations de Boltzmann se simplifient grâce à $\epsilon = q$. On intègre ensuite la dépendence en q (afin de réduire le nombre de variable), puis la perturbation Ψ de la fonction de distribution est décomposée en multipoles sur la base des polynômes de Legendre

$$\begin{aligned} F_\nu\left(\vec{k},\hat{n},\tau\right) &\equiv \frac{\int q^2 dq q f_0\left(q\right)\Psi}{\int q^2 dq q f_0\left(q\right)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\left(-i\right)^l\left(2l+1\right)F_{\nu l}\left(\vec{k},\tau\right)P_l\left(\hat{k}\cdot\hat{n}\right)\end{aligned}$$

Les $F_{\nu l}$ sont relié à δ, θ et $\sigma = -\frac{2}{3}\frac{P}{\rho+P}\Pi^S$ par

$$\begin{aligned} \delta_\nu &= F_{\nu 0} \\ \theta_\nu &= \frac{3}{4}kF_{\nu 1} \\ \sigma_\nu &= \frac{1}{2}F_{\nu 1}\end{aligned}$$

L'équation de Boltzmann devient

$$\frac{\partial F_\nu}{\partial \tau} + i\mu F_\nu = -\frac{2}{3}\dot{h} - \frac{4}{3}\left(\dot{h}+6\dot{\eta}\right)P_2\left(\mu\right)$$

avec $\mu \equiv \vec{k}\cdot\hat{n}$. En combinant les deux derniers résultats, on trouve

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_\nu &= -\frac{4}{3}\theta_\nu - \frac{2}{3}\dot{h} \\ \dot{\theta}_\nu &= k^2\left(\frac{1}{4}\delta_\nu - \sigma_\nu\right) \\ \dot{F}_{\nu 2} &= 2\dot{\sigma}_\nu \\ \dot{F}_{\nu l} &= \frac{k}{2l+1}\left[lF_{\nu(l-1)} - \left(l+1\right)F_{\nu(l+1)}\right] \;\; l > 3\end{aligned}$$