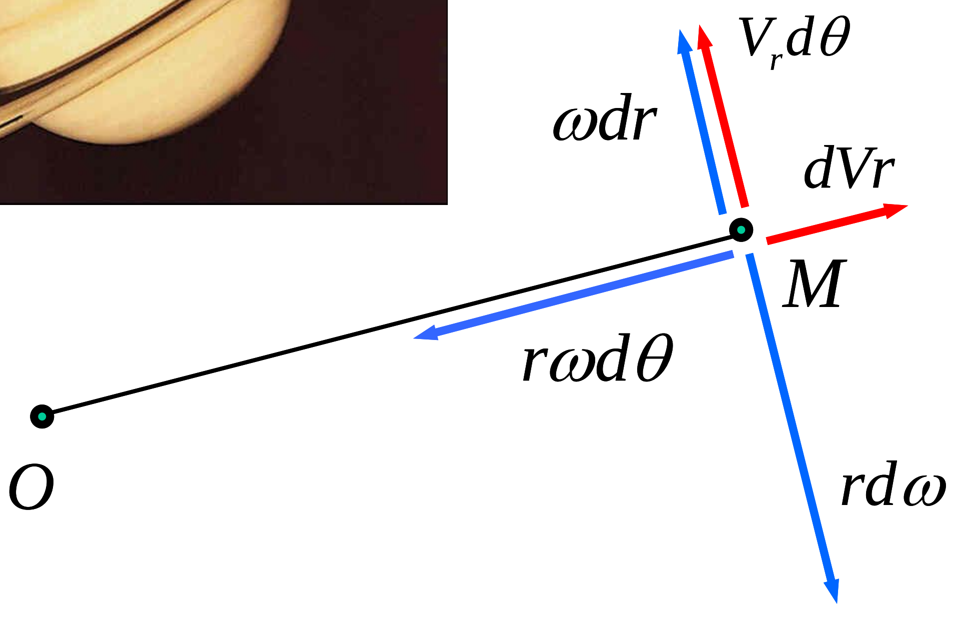
Université Joseph Fourier – Grenoble 1
Licence 1ère année

Cours de mécanique du point

10ème édition / mai 2011



Gilbert VINCENT
http://pagesperso-orange.fr/physique.belledonne/

Avertissement.

*Les **figures** doivent être <u>à gauche</u> (**pages paires)** en regard des pages correspondantes (**impaires),** situées <u>à droite</u>, qui supportent le **texte**.*

Les figures ne sont pas référencées dans le texte, mais dans la quasi totalité des cas, elles correspondent au texte de la page en regard.

Cours en ligne

http://dlst.ujf-grenoble.fr/cours/PHY121_GV/

Vous trouverez à cette adresse (si problème contacter l'auteur) l'ensemble de ce cours de mécanique sous la forme de diapositives commentées, avec quelques compléments, dont un exposé complet sur l'explication du phénomène des marées.

Site internet

http://pagesperso-orange.fr/physique.belledonne/

*Site personnel d'accès libre, avec entre autres ce cours de mécanique, des exercices complémentaires (exemple le pendule de Foucauld),
et un tableur interactif de calcul de la puissance développée par un cycliste, une voiture …*

Pour tout problème ou demande de document informatique, <u>contacter l'auteur</u>.

SOMMAIRE

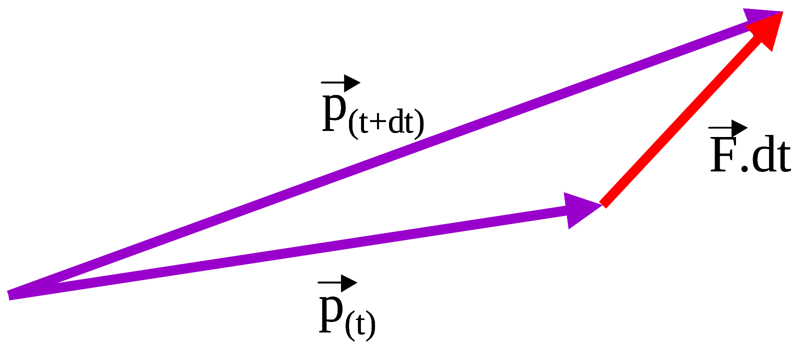
SOMMAIRE

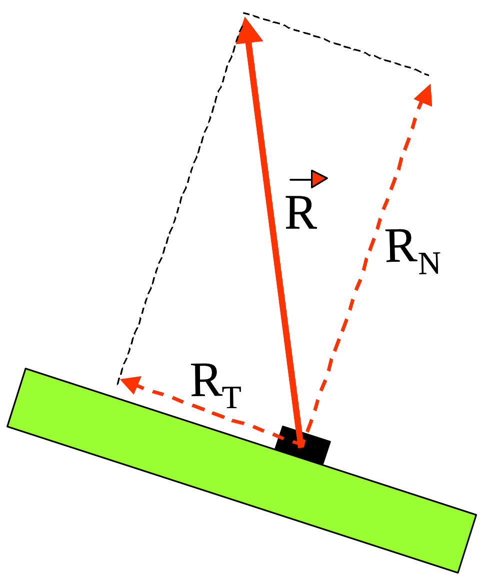
CE COURS EST SUR INTERNET
http://pagesperso-orange.fr/physique.belledonne/

On trouvera aussi sur ce site quelques pages supplémentaires:

- Compléments et exercices (Voir le détail en fin de polycopié)
- Marée océanique (Conseillé pour ne pas croire à la sorcellerie)
- Pendule de Foucault
- Gyroscope

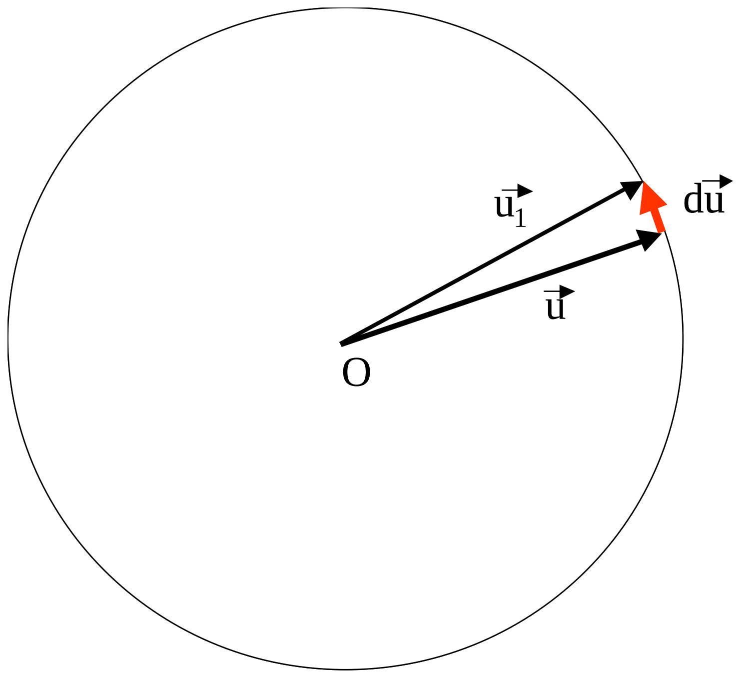
• I

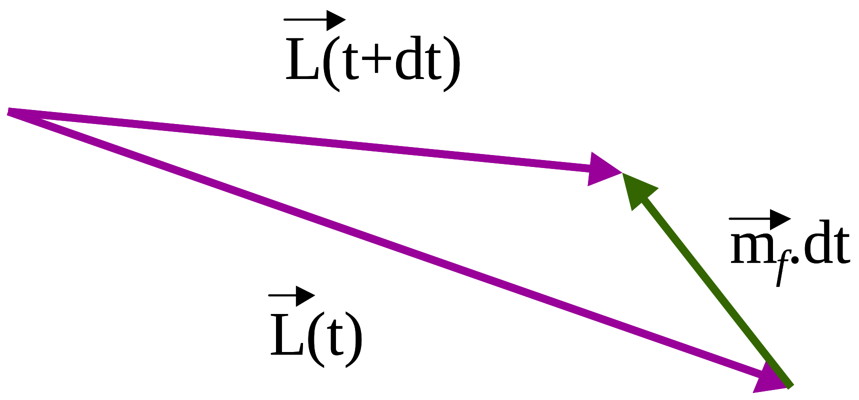


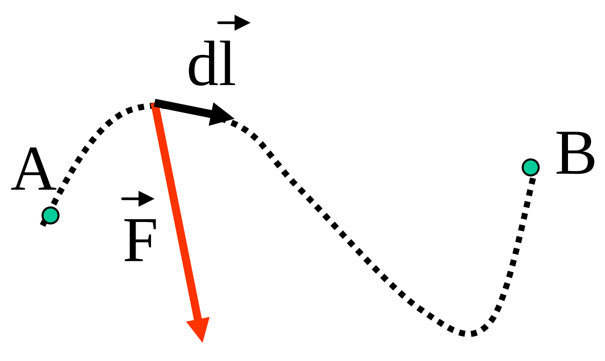


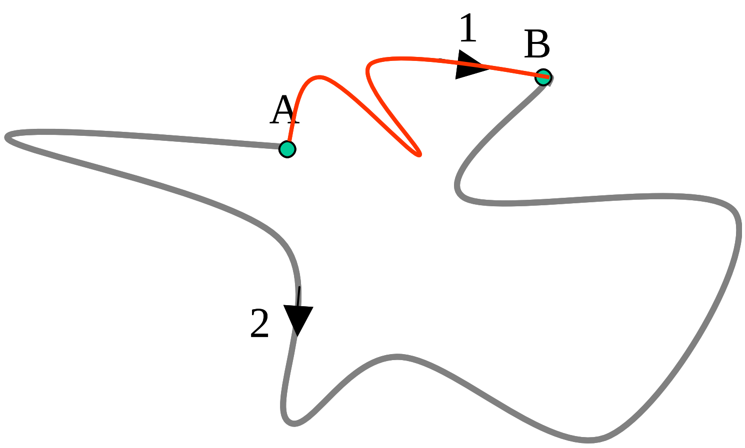
$\vec{R}$
R_N
R_T

III. CINEMATIQUE 41



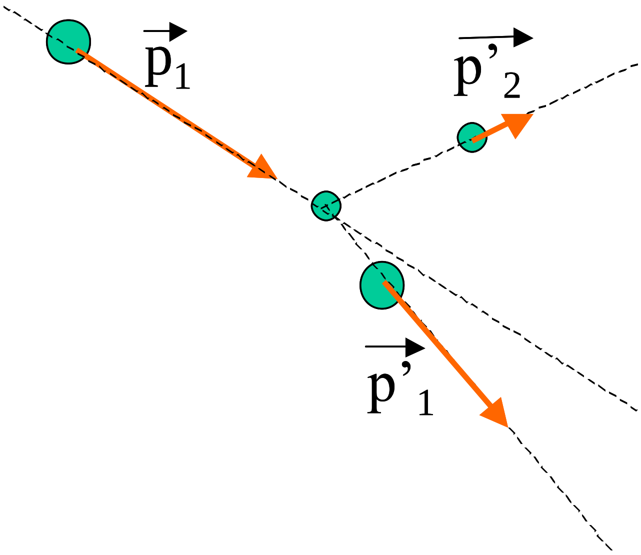

$\vec{L}(t+dt)$
$\vec{m}_f.dt$
$\vec{L}(t)$

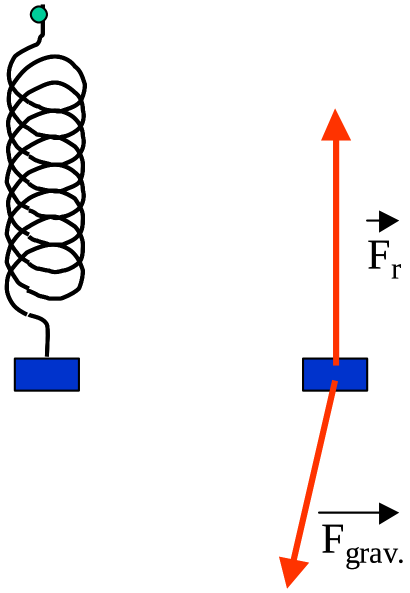

$\vec{dl}$
A
B
$\vec{F}$

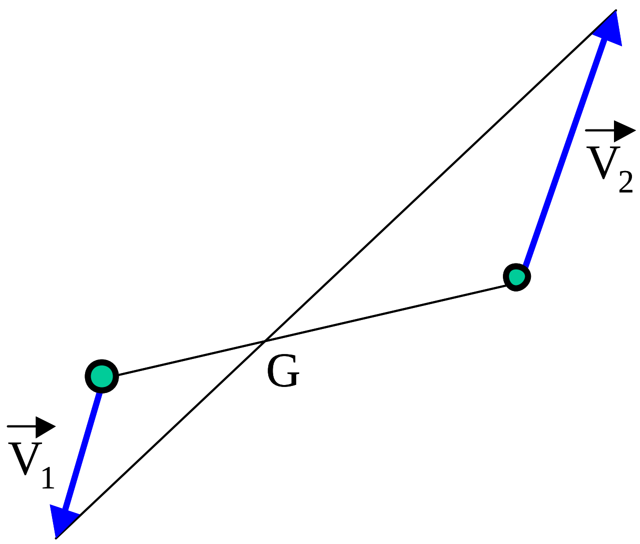


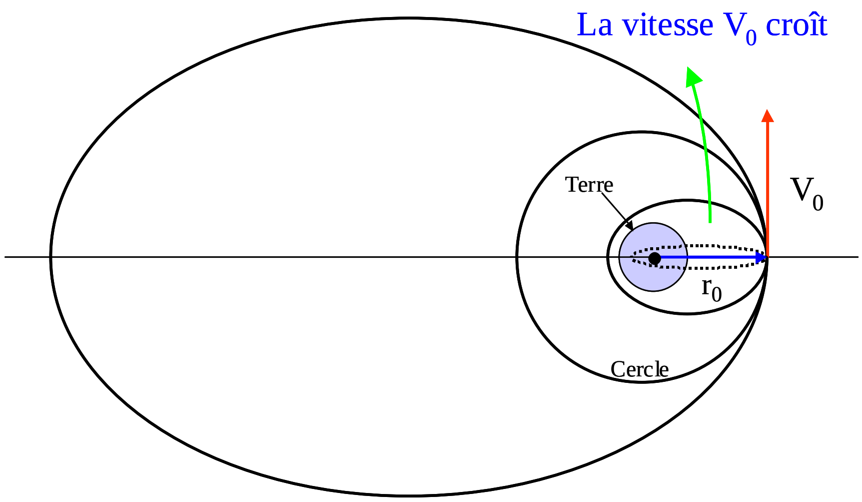
1
B
A
2

VII. COLLISIONS 101

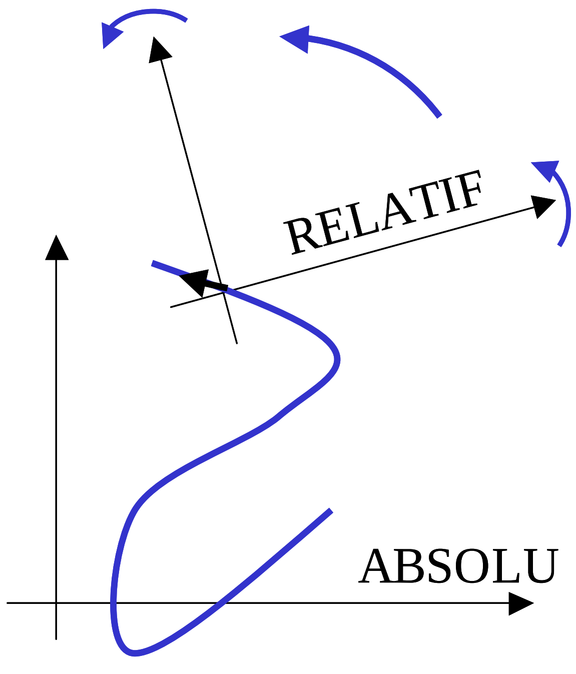


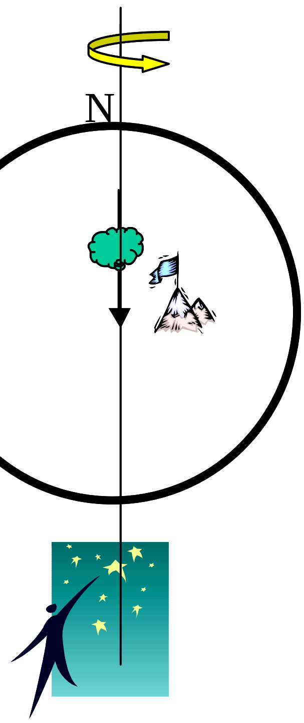

$\vec{F}_r$
$\vec{F}_{grav.}$


$\vec{V}_2$
G
$\vec{V}_1$


La vitesse V_0 croît
V_0
Terre
r_0
Cercle

XI




N

INTRODUCTION

et

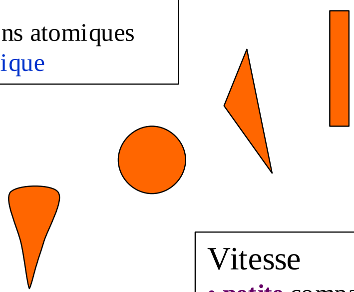
DOUZE CHAPITRES

"Point" matériel et mécaniques

Dimensions

• **petites** à l'échelle du problème envisagé (énergie propre de rotation négligeable)
sinon ➡ mécanique du solide

• **grandes** devant les dimensions atomiques
sinon ➡ mécanique quantique



Vitesse

• **petite** comparée à la vitesse de la lumière (3.10^8 m/s)
sinon ➡ mécanique relativiste

Introduction

La mécanique présentée ici concerne exclusivement la mécanique du point. Pratiquement elle concerne les objets matériels dont l'extension spatiale est très faible: leurs déformations et l'énergie liée à leur mouvement propre de rotation peuvent ainsi être négligées devant les énergies mises en jeu. Cependant un objet aussi volumineux que la terre ou le soleil peut dans certains cas être assimilable à un point en ce qui concerne, par exemple, son action sur des corps dans son entourage.

Nous n'étudierons pas de systèmes de très petites dimensions, à l'échelle atomique, domaine pour lequel il a été montré il y a un siècle que les notions de mécanique classique doivent être remplacées par celles de mécanique quantique.

De même la mécanique relativiste sort du cadre de cette présentation et nous n'envisagerons que des mobiles dont la vitesse est faible devant celle de la lumière (mécanique "classique"). Toutefois le principe fondamental de la dynamique sera donné dans le cadre relativiste, son expression étant très simple à partir de la quantité de mouvement, et nous en déduirons les relations classiquement utilisées que sont les lois de Newton.

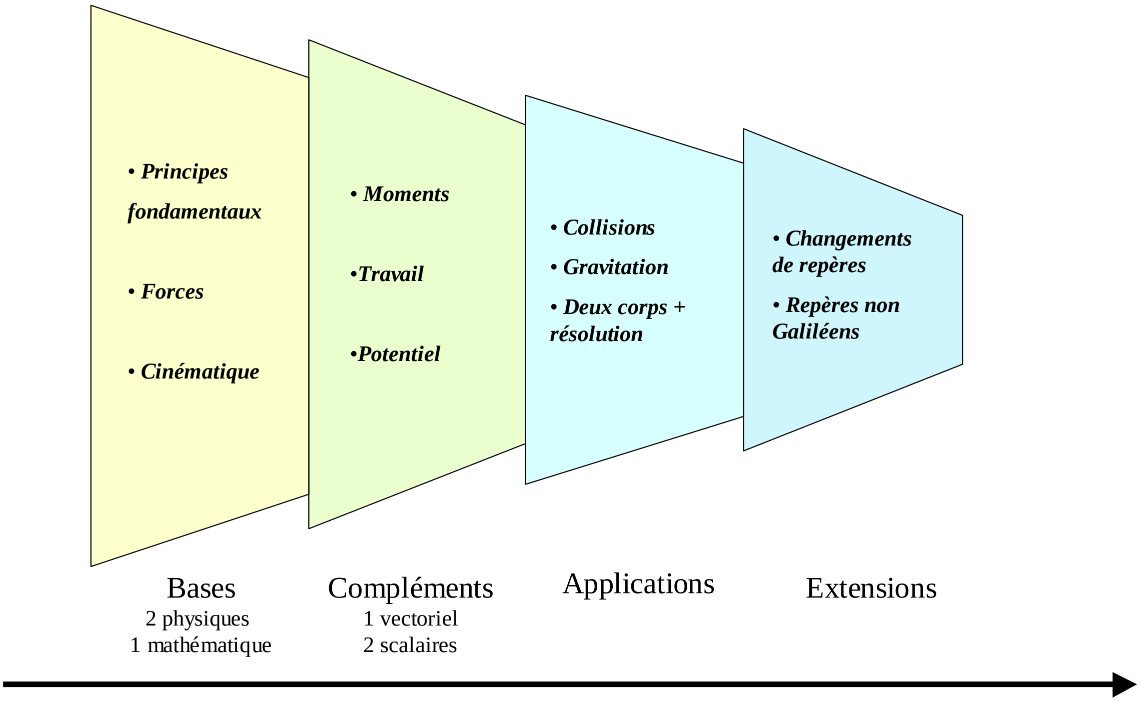
Nous supposerons qu'un temps unique peut-être défini en tout point de l'espace, et que les longueurs, masses, temps, et forces sont invariantes lors d'un changement de référentiel.

La mécanique <u>du</u> point n'exclut pas la mécanique <u>des</u> points et nous aurons de nombreuses fois l'occasion d'évoquer le comportement de plusieurs corps en présence et d'en définir certaines propriétés comme le centre de masse et la quantité de mouvement.

La but visé est de pouvoir relier le mouvement d'un corps aux forces qui lui sont appliquées.
Pour cela, il nous faudra relier les forces (la force extérieure résultante) à l'accélération
$\vec{F} \Leftrightarrow \vec{\Gamma}$,
c'est le principe fondamental de la dynamique.
Ensuite, nous apprendrons à relier l'accélération à la vitesse et à la position, opérations mathématiques regroupées sous le nom de cinématique
$\vec{\Gamma} \Leftrightarrow \vec{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$
Nous serons ainsi capables de décrire le mouvement à partir de la force appliquée, et inversement de déduire la force si la trajectoire est connue :

$$\boxed{\vec{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}}$$

Contenu - Chapitres



		LETTRES GRECQUES			
Α	α	alpha	Ν	ν	nu
Β	β ϐ	bêta	Ξ	ξ	*xi* ou *ksi*
Γ	γ	gamma	Ο	ο	omicron
Δ	δ	delta	Π	π ϖ	pi
Ε	ε	epsilon	Ρ	ρ ϱ	rhô
Ζ	ζ	zêta	Σ	σ ς	sigma
Η	η	êta	Τ	τ	tau
Θ	θ ϑ	thêta	Υ	υ	upsilon
Ι	ι	iota	Φ	φ ϕ	phi
Κ	κ ϰ	kappa	Χ	χ	*chi* ou *khi*
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
Μ	μ	mu	Ω	ω	oméga

Dans ce but, nous envisagerons successivement :

- les principes de base de la dynamique du point
- l'analyse des forces les plus courantes
- l'art de repérer les objets et la cinématique

A priori, ces connaissances sont suffisantes pour répondre à l'objectif visé. Cependant, d'autres notions peuvent simplifier grandement certaines résolutions et nous étudierons :

- le moment d'une force et le moment cinétique
- le travail et l'énergie cinétique
- l'énergie potentielle et l'énergie mécanique

Suivront des applications pour préciser ces notions :

- collisions entre deux corps
- gravitation
- problème des deux corps
- résolution du problème des deux corps

Enfin, deux chapitres viendront étoffer nos connaissances de mécanique. S'ils sont présentés en dernier, c'est qu'ils ne sont pas indispensables mais peuvent cependant accélérer l'écriture des équations, et présenter les principes de la mécanique sous un autre aspect:

- changement de repère
- repères non Galiléens

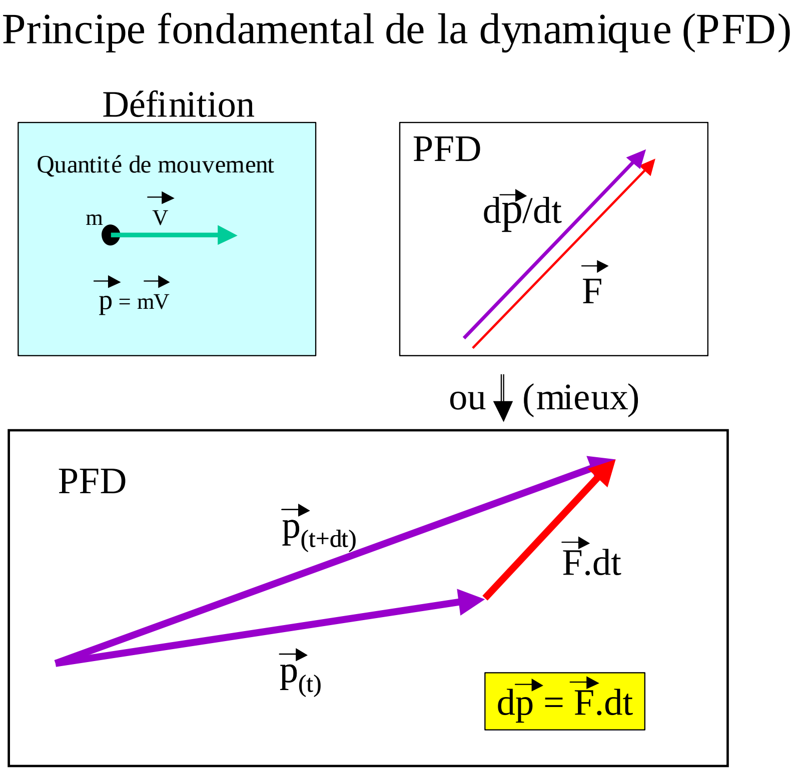
XII. Pour aller plus loin

Des phénomènes surprenants, relevant ou pouvant relever de la mécanique du point, mais nécessitant des analyses un peu plus complexes que celles de ce cours, sont présentés sur un site internet. Ce sont, par ordre de difficulté croissante :

- *les marées*
- *le pendule de Foucault*
- *le gyroscope*

et différents compléments

Adresse
http://perso.wanadoo.fr/physique.belledonne



Principe fondamental de la dynamique (PFD)
Définition
Quantité de mouvement
m
$\vec{V}$
$\vec{p} = m\vec{V}$
PFD
$d\vec{p}/dt$
$\vec{F}$
ou (mieux)
PFD
$\vec{p}_{(t+dt)}$
$\vec{F}.dt$
$\vec{p}_{(t)}$
$d\vec{p} = \vec{F}.dt$

I. Principes fondamentaux de la dynamique

Ce chapitre va poser les relations fondamentales sur lesquelles se construira toute la mécanique.

Les lois seront données sous forme vectorielle. C'est une manière élégante et commode pour exprimer un grand nombre de relations physiques. Cette formulation évite de faire référence à un repère particulier. Ceci suppose un espace Euclidien et isotrope, c'est à dire qui a les mêmes propriétés dans toutes les directions.

Tout ce qui sera fait ultérieurement consistera à tirer les propriétés de ces relations fondamentales, à les exprimer de manière vectorielle ou scalaire, et aussi à définir de nouvelles grandeurs en s'appuyant sur des outils mathématiques.

1. Quantité de mouvement: définition

La quantité de mouvement va prendre une place essentielle dans notre approche de la mécanique. Beaucoup de phénomènes s'éclairent si on comprend bien sa signification vectorielle, et l'effet des forces sur sa valeur.

On dénomme $\vec{p}$ la quantité de mouvement. C'est le produit de la masse m par la vitesse $\vec{V}$

$\vec{p} = m\vec{V}$	**QUANTITE DE MOUVEMENT**

Son nom est bien choisi: la quantité de mouvement augmente avec la masse et la vitesse: imaginez un rugbyman en pleine vitesse! Elle s'exprime en $kg.m.s^{-1}$ et n'a pas d'unité dévolue.

2. Principe fondamental de la dynamique: PFD

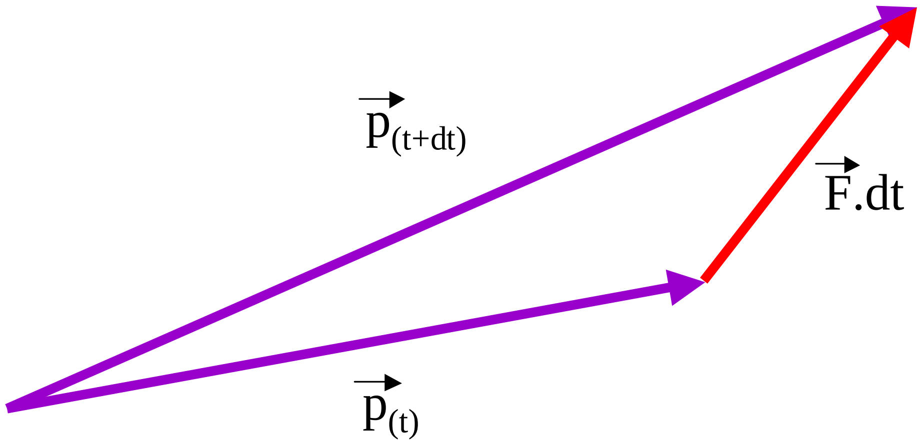
La définition de la quantité de mouvement nous permet de donner **l'énoncé exact du principe fondamental de la dynamique**. Cette relation est **valable dans un référentiel Galiléen** qui sera défini plus loin.

Le voici tout d'abord sous sa forme différentielle :

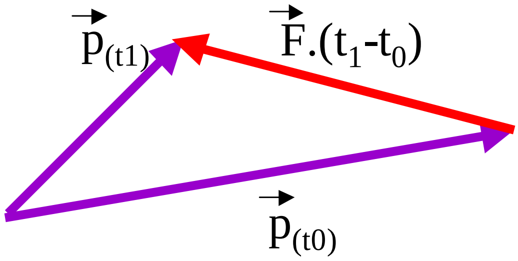
$d\vec{p} = \vec{F}dt$	**PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (PFD)**

ce qui signifie que la variation de la quantité de mouvement est égale :
au produit de la <u>force extérieure</u> appliquée par le temps pendant lequel elle s'applique.
A méditer …, voir l'exemple du rugbyman.
Le principe fondamental de la dynamique sera souvent écrit en abrégé **PFD.**

PFD … à nouveau … et à méditer



PFD cas très particulier d'une force constante



Cette relation peut aussi être écrite sous la forme d'une dérivée.

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	**PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE (PFD)**

Remarque : si plusieurs forces extérieures sont appliquées à la masse m, c'est leur **somme vectorielle** qui sera prise en compte pour $\vec{F}$. Cette somme vectorielle porte le nom de résultante des forces.
Insistons : les <u>seules</u> forces à prendre en considération sont les forces extérieures.

3. Principe de l'action et de la réaction

(ou opposition des actions réciproques):
Quand 2 corps interagissent, la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$ exercée par le premier corps sur le second est égale et opposée à la force $\overrightarrow{F_{2/1}}$ produite par le second sur le premier.

$$\overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2/1}} = \vec{0}$$

NB : la flèche sur le terme de droite n'est pas obligatoire, car un vecteur nul n'a ni direction ni sens. Elle est uniquement là pour insister sur le fait qu'un vecteur ne peut être égal qu'à un vecteur.

4. Application: interaction entre 2 corps isolés

A ce stade, nous pouvons déjà traiter un cas particulier qui implique deux points matériels.
Nous supposerons qu'il n'y a **aucune force extérieure en jeu**. Seules agissent les **forces intérieures, c'est à dire les forces d'interactions mutuelles entre ces deux points matériels** (forces gravitationnelles, électriques, contact …) : le système est dit **isolé**.
Les forces $\overrightarrow{F_{1/2}}$ (de 1 sur 2) et $\overrightarrow{F_{2/1}}$ (de 2 sur 1) sont en accord avec la troisième loi:

$$\overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2/1}} = \vec{0}$$

Or selon la loi fondamentale de la dynamique :

$$d\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{F_{2/1}}\,dt$$

$$d\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{F_{1/2}}\,dt$$

Donc $d\overrightarrow{p_1} + d\overrightarrow{p_2} = (\overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{1/2}})dt = \vec{0}\,dt$

soit, en définissant par $\vec{p}$ la quantité de mouvement totale :

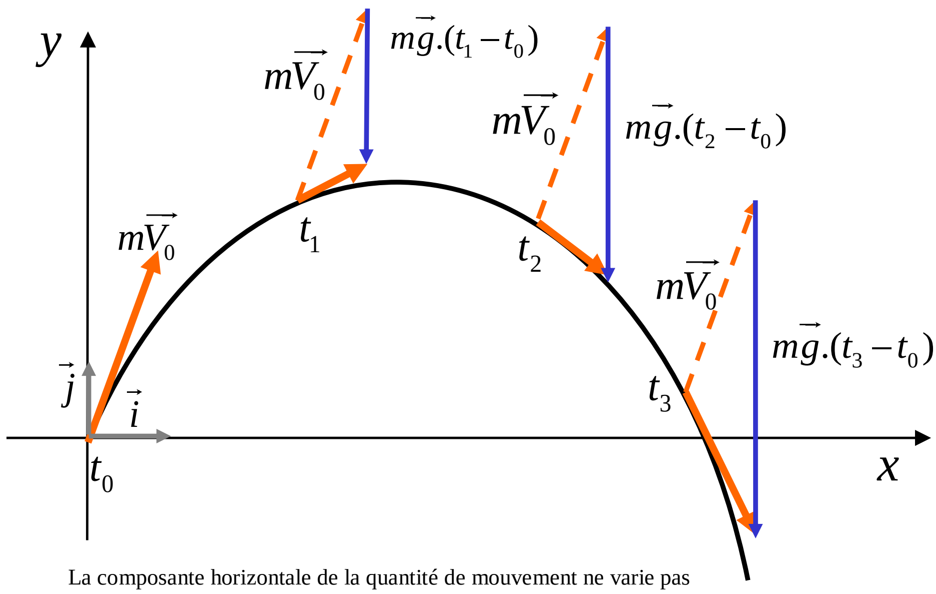
$$\vec{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$$

$d\vec{p} = \vec{0}\ dt$ (forme différentielle) ou $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ (forme dérivée).

Conclusion :

$\vec{p} = \overrightarrow{Cte}$ (en fonction du temps)

Principe fondamental appliqué à la trajectoire balistique: $\vec{F} = m\vec{g} = \overrightarrow{Cte}$

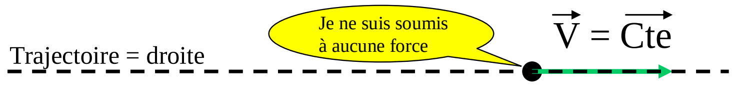


La composante horizontale de la quantité de mouvement ne varie pas

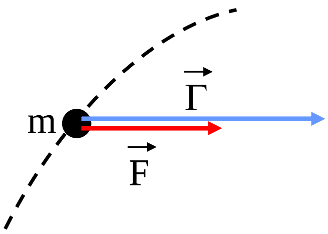
Les équations suivent: $d(m\vec{V}) = m\vec{g}\,dt \;\; => \;\; md(V_x\vec{i} + V_y\vec{j}) = -mgdt\,\vec{j} \;\; => \;\; dV_x = 0 \;\; et \;\; dV_y = -gdt$

Les 3 lois de Newton

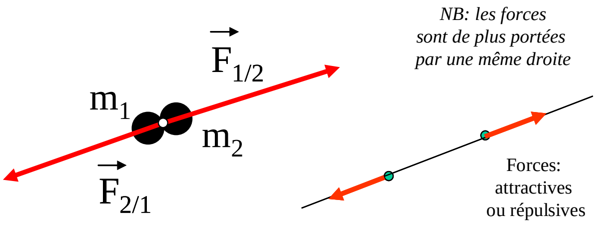
1ère loi : $\overrightarrow{\text{force nulle}}$ => $\overrightarrow{\text{vitesse constante}}$



2ème loi : $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$



3ème loi : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$



Nous pourrions facilement généraliser ce raisonnement à N corps et nous retiendrons donc que:

Pour un système isolé, la quantité de mouvement totale reste constante au cours du temps

Application pratique : collision entre 2 masses.
Il serait déjà possible de résoudre le problème de 2 véhicules enchevêtrés, après collision en négligeant l'action des forces extérieures. La conclusion serait: de l'utilité d'être "gros".

5. Conséquence: les trois lois de newton

Elles n'apportent rien de plus que les lois précédentes, et sont même plus restrictives, mais elles ont eu une grande importance historique puisqu'elles ont régi la mécanique, de Newton jusqu'au début du 20ème siècle.

5.1 Du PFD aux deux premières lois de Newton

Les deux premières lois de Newton sont dérivées du PFD et ne sont valables que si la masse m est constante.
Reprenons le PFD :
$d\vec{p} = \vec{F}dt$ avec : $\vec{p} = m\vec{V}$
Si la masse m est constante :
$d(m\vec{V}) = md\vec{V}$
NB: si la différentielle pose un problème, voir l'annexe située en fin du chapitre cinématique
Donc :
$md\vec{V} = \vec{F}dt$
Plus connu sous la forme :

$\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ où $\vec{\Gamma}$ est l'accélération ($\vec{\Gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$)

Ceci constitue la deuxième loi de Newton.

La première loi se déduit immédiatement de $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$:
si la force est nulle, l'accélération $\vec{\Gamma}$ est elle aussi nulle, et donc la vitesse $\vec{V}$ est constante, car $d\vec{V} = \vec{\Gamma}dt = \vec{0}$

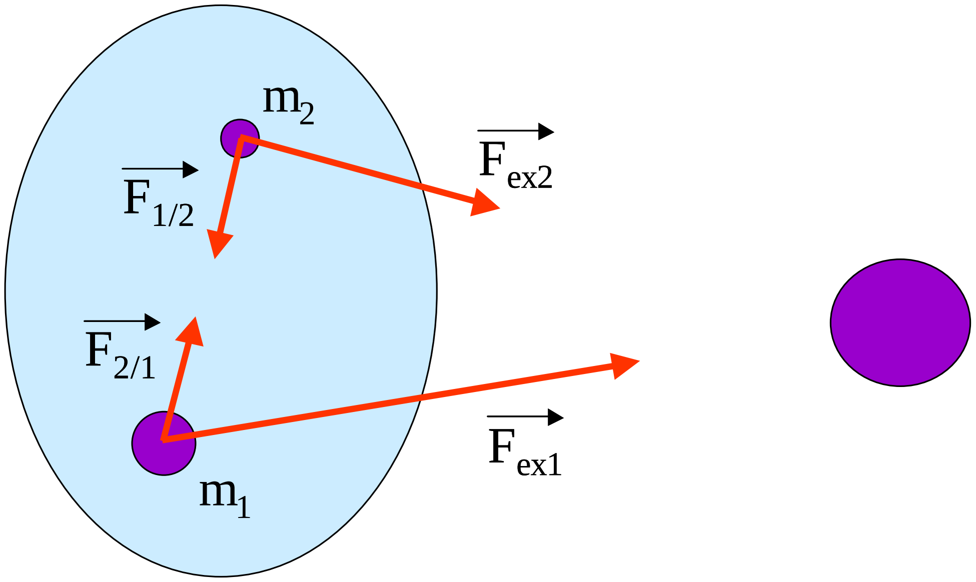
5.2 Enoncé des trois lois

Nous donnons l'énoncé des lois en langage actuel, vous trouverez dans le Perez par exemple l'écriture de l'époque.

<u>Première loi</u> *(principe d'inertie) :*
Un corps sur lequel n'agit aucune force garde une vitesse constante (ou reste au repos)
$\vec{F} = \vec{0}$ => $\vec{V} = \overrightarrow{Cte}$ 1ère loi

Centre de masse: forces intérieures et extérieures

Système étudié : m_1, m_2, en présence d'un troisième corps



<u>Deuxième loi</u> *(ancienne loi fondamentale de la dynamique) :*
La force totale $\vec{F}$ appliquée à un corps est égale au produit de sa masse m par son accélération $\vec{\Gamma}$.

$\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ 2ème loi

<u>Troisième loi</u> *(opposition des actions réciproques, énoncée précédemment):*

$\overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2/1}} = \vec{0}$ 3ème loi

Remarque:
La première loi se déduit de la seconde, et n'est pas a priori très utile. Mais c'est l'histoire qui distingue ces deux lois car la première loi peut être attribuée à Galilée. Elle n'est pas triviale car d'Aristote à Galilée, on pensait que s'il n'y avait aucune force appliquée, le corps s'arrêtait ou, de manière un peu équivalente, que la force était proportionnelle à la vitesse. Cette idée fausse provient de l'expérience commune journalière, où tout s'arrête si le mouvement n'est pas entretenu, à cause des frottements inévitables.

Retenons que la deuxième loi de Newton est une loi approchée du principe fondamental de la dynamique. Elle n'est valable que lorsque la masse est constante ($dm = 0$), ce qui n'est le cas :
- ni pour les vitesses qui se rapprochent de celle de la lumière, car tout se passe comme si la masse devenait alors une fonction très sensible de la vitesse (voir le chapitre Energie cinétique)
- ni, disent certains auteurs, pour des objets dont la masse évolue au cours du temps par accrétion (la goutte d'eau qui grossit) ou éjection (la fusée); en fait là, il ne faut pas appliquer directement le PFD, et être très prudent, car il y a différentes masses en interaction.
.

6. Condition de masse constante

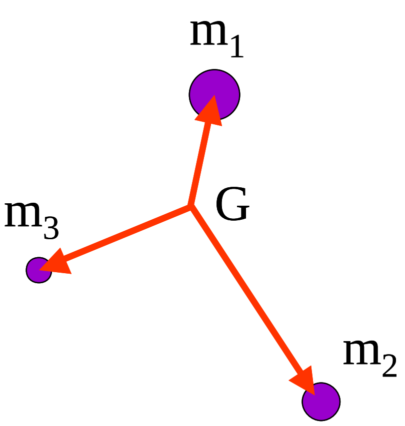
Dans la suite du cours la masse sera supposée constante
$m = Cte \qquad dm = 0$

Nous donnons toutefois en annexe quelques propriétés du PFD lorsque la masse n'est pas constante, et, dans les chapitres suivants, chaque fois qu'une propriété sera valable pour une masse non constante, nous le signalerons.

7. Application des lois de Newton. Centre de masse

Un système (solide, nuage, chat) peut être considéré comme la somme de "points " matériels.
Sur chaque point repéré par l'indice i, s'appliquent des forces extérieures de résultante $\overrightarrow{(F_i)_{ext}}$, et l'action de toutes les autres masses j du système: $\sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{F_{j/i}}$. Si la notation $\sum$ vous ennuie, essayez avec 2 points (voir figure), puis 3 et généralisez.

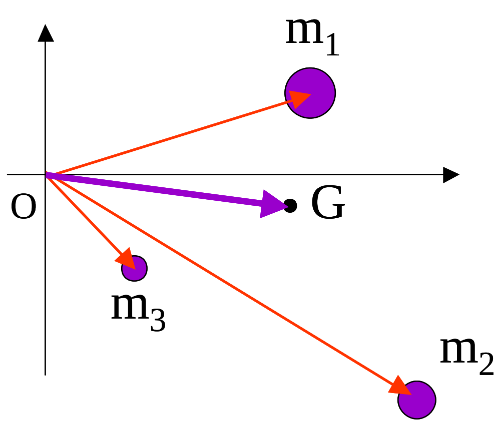
Centre de masse (barycentre)



$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + m_3\overrightarrow{GM_3} = \vec{0}$$

ou $\Sigma m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$

Ne fait pas référence
à un repère particulier



$$[m_1 + m_2 + m_3]\,\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + m_3\overrightarrow{OM_3}$$

$$[\Sigma m_i]\,\overrightarrow{OG} = \Sigma m_i \overrightarrow{OM_i}$$

Nécessite la définition préalable d'un repère

Le calcul de la position du centre de masse ne fait pas intervenir les forces

Sur le point i, de masse m_i la deuxième loi de Newton s'applique:

$$m_i \frac{d^2\overrightarrow{OM_i}}{dt^2} = (\vec{F_i})_{ext} + \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{F_{j/i}}$$

En décomposant $\overrightarrow{OM_i}$ en $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i}$, G étant pour l'instant un point quelconque du système, nous obtenons:

$$m_i \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} + m_i \frac{d^2\overrightarrow{GM_i}}{dt^2} = (\vec{F_i})_{ext} + \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{F_{j/i}}$$ ou encore

$$m_i \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} + \frac{d^2\left(m_i\overrightarrow{GM_i}\right)}{dt^2} = (\vec{F_i})_{ext} + \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{F_{j/i}}$$

En se souvenant que la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées, et en effectuant l'addition de toutes les équations individuelles, nous arrivons à:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} + \frac{d^2\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM_i}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F_i})_{ext} + \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{F_{j/i}}$$

$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ représente la masse totale du système. $\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{F_{j/i}}$ est nul. Encore une fois, on peut s'en persuader en essayant avec 2 masses, puis 3 et en généralisant. Finalement:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} + \frac{d^2\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM_i}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F_i})_{ext}$$

Cette équation serait encore plus simple en annulant un terme. Ceci est possible car G est pour l'instant un point quelconque. **Définissons** le point G de telle manière que :

$\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$	**définition du centre de masse**

C'est une définition, elle ne fait appel à aucun principe.

Il vient alors :

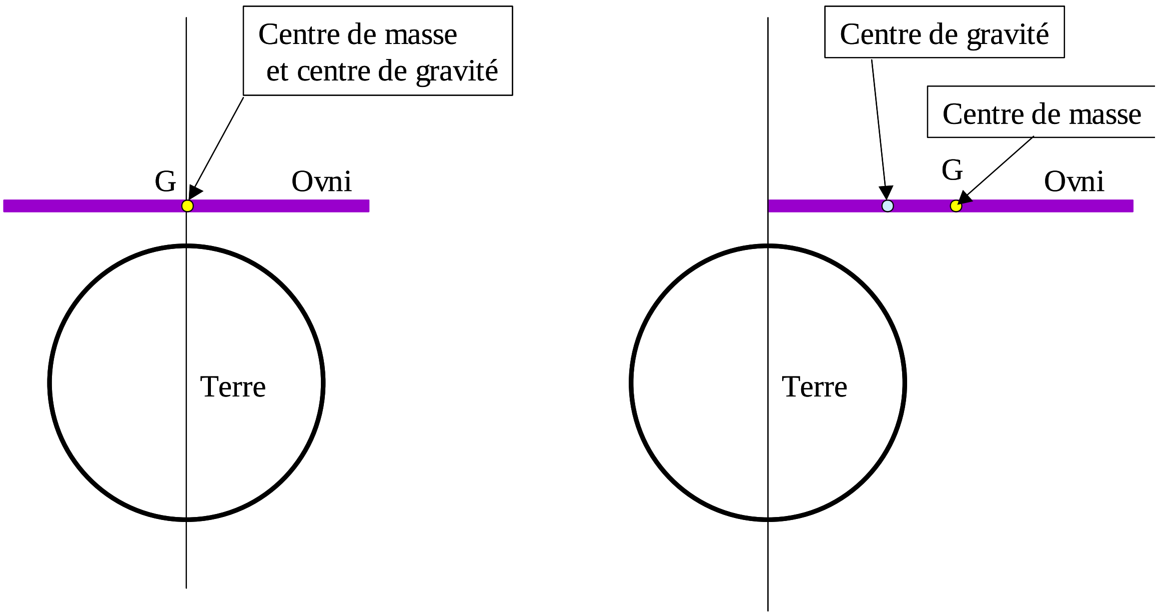
$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{F_i})_{ext}$	**accélération du centre de masse (*m*=Cte)**

c'est la deuxième loi de Newton, appliquée au centre de masse.
Notons que si la résultante des forces est nulle, l'accélération du centre de masse est elle aussi nulle, et par conséquent, sa vitesse est constante.
Attention cette relation nécessite que la masse soit constante, car nous avons appliqué la deuxième loi de Newton.

Autre relation de définition du centre de masse :
la définition précédente n'est pas très commode pour calculer les coordonnées du centre de masse. Il est souvent intéressant de réintroduire l'origine O et d'opérer la transformation :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i}) = \vec{0}$$ soit : $$\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM_i} = \vec{0}$$

Centre de Masse. Centre de gravité



L'Ovni serait en équilibre sur un support fictif
placé au centre de gravité
(calcul compliqué faisant intervenir les forces).

$\overrightarrow{GO}$ est constant est peut donc être sorti de la sommation : $\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GO} = \overrightarrow{GO} \sum_{i=1}^{n} m_i$, d'où finalement :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Il peut être intéressant de positionner O sur une des masses pour annuler un des vecteurs : pour 2 masses, le calcul devient alors particulièrement simple.

Ne pas confondre le centre de masse G que nous venons de définir avec le centre de gravité (dommage, la lettre G induit en erreur !)

Ils ne sont confondus que si le champ de pesanteur est constant en module direction et sens : $\vec{g}$ sur une petite partie de la surface de la terre par exemple, ou dans un cas de symétrie adéquate (voir figure). Si le champ de pesanteur n'est pas constant, le centre de gravité dépend de la position et de l'orientation du solide. Nous ne ferons aucun usage ici du centre de gravité.

8. Conditions d'application du PFD

8.1 Référentiels, repères et systèmes de coordonnées.

A ce stade, il est utile de préciser la signification de ces notions, souvent mélangées.

Référentiel

Une expérience se déroule dans un système matériel rigide qui constitue le référentiel. Ce peut être l'amphithéâtre où se déroule ce cours, un train, un avion …la lune …
L'observateur est couramment lié à ce référentiel, mais ce n'est pas obligatoire.

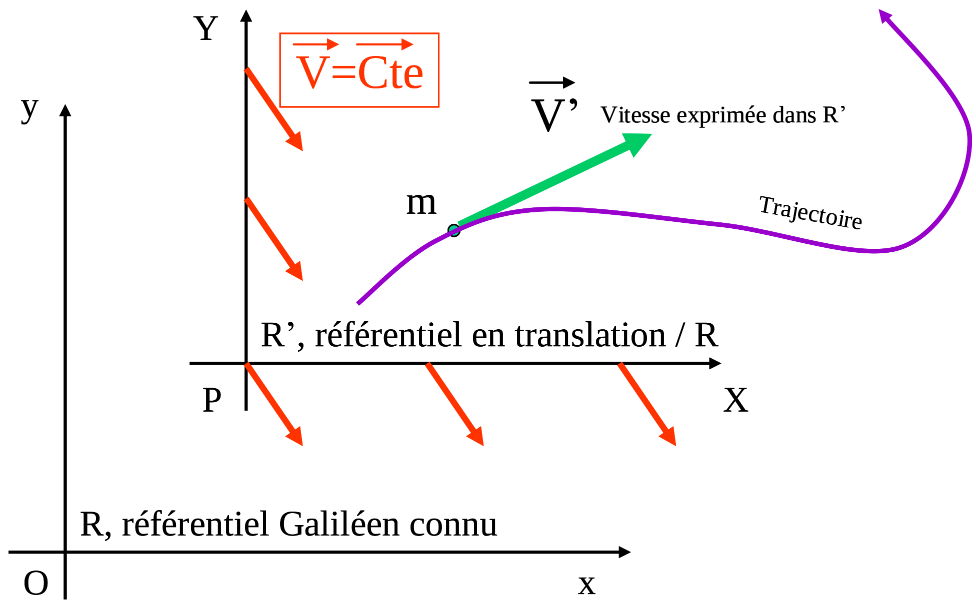
Repère

Pour repérer un mobile dans un référentiel, il faut définir une origine fixe, et trois axes fixes dans ce référentiel. Ils constituent le repère lié au référentiel. Les axes ne sont pas forcément orthogonaux, mais ils ne doivent pas être coplanaires afin de pouvoir étudier des mouvements à 3 dimensions, cas le plus général.

Système de coordonnées

Pour quantifier les mesures, le plus évident consiste à prendre un système d'axes orthonormé lié au repère qui permettra de déterminer les composantes du mouvement (position, vitesse …) et des forces. Mais ce n'est pas la seule possibilité. De nombreux problèmes sont plus simples en utilisant un système de coordonnées cylindrique, sphérique …
Dans tous les cas il faudra définir une origine et 3 vecteurs unitaires qui définiront les directions des axes. Ces vecteurs constituent la base.
Attention, cette origine et les vecteurs ne sont pas forcément fixe par rapport au repère. Tout ceci s'éclairera plus tard.

Ensemble de référentiels Galiléens (ou inertiels)



$m=Cte,\ \vec{V}=\overrightarrow{Cte}'$

$\downarrow$

$\vec{F}\,dt = d[m(\vec{V}+\vec{V}')]$ => $\vec{F}\,dt = d(m\vec{V}')$

PFD dans repère galiléen R — Le PFD est vérifié dans R’ => R’ Galiléen

8.2 Référentiel Inertiel (ou Galiléen)

La première et la deuxième loi ne sont valables que lorsqu'elles sont appliquées dans un référentiel non accéléré, dit **référentiel inertiel** ou **référentiel Galiléen**.

Mais qu'est-ce qu'un référentiel non accéléré?

Il pourrait être défini par: c'est un référentiel dans lequel la première loi, appelée principe d'inertie, est valable, d'où son nom référentiel inertiel (ou Galiléen). Il faudrait alors réaliser une expérience, et pouvoir vérifier dans ce référentiel que la vitesse est constante lorsqu'il n'y a aucune force appliquée, ce qui n'est pas évident à réaliser avec des forces à distance omniprésentes comme la gravitation!

Il est en fait plus facile de vérifier la deuxième loi dans une expérience qui mette en jeux des forces très grandes devant les forces de gravitation, les forces électriques par exemple.

Nous nous familiariserons progressivement avec ces référentiels et, pour l'instant, nous resterons pragmatiques et nous admettrons que:

- pour nos problèmes locaux et des temps beaucoup plus courts que la journée, la terre constitue un référentiel galiléen.

- pour des problèmes mettant en jeux des mouvements ou des temps à plus grande échelle, comme les mouvements des nuages et des satellites, un référentiel lié au centre de la terre, **et des axes liés aux étoiles** est correct.

- si nous envisageons le mouvement des planètes du système solaire, nous prendrons encore des axes liés aux étoiles, mais avec une origine liée cette fois au centre de masse du système solaire, qui est quasiment confondu avec le centre du soleil.

8.3 Ensemble de référentiels Inertiels (ou Galiléens)

Si nous connaissons un référentiel Galiléen R, nous pouvons en définir une infinité. En effet tout référentiel R' qui effectue **une translation à vitesse constante** $\vec{V}$ **par rapport à R** est lui-même un référentiel Galiléen.

Attention : translation => vitesse $\vec{V}$ de l'origine de R' constante et absence de rotation des axes de R' par rapport à R

Démonstration:

Nous verrons que si un objet se déplace à une vitesse $\vec{V'}$ dans un repère R', et si ce repère R' se déplace **par translation** à la vitesse $\vec{V}$ **constante** par rapport au repère R, alors la vitesse de l'objet par rapport à R est égale à la somme $\vec{V}+\vec{V}'$. Signalons au passage que cette loi d'addition des vitesses qui paraît "évidente" n'est plus vraie en mécanique relativiste!

La somme est bien sûr vectorielle, $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ n'ayant pas forcément la même direction ou sens. Pensez au cas simple du passager se déplaçant à vitesse $\vec{V}'$ dans un train (R'), ce train étant en mouvement rectiligne uniforme $\vec{V}$ par rapport au sol (R). Il peut évidemment se déplacer dans le sens du train, en sens inverse … en travers … sauter …

Galileo Galilei 1564-1642 (8 janv.)

Isaac Newton 1642 (25 décembre.calendrier Anglais) - 1727

Le repère R étant Galiléen, la deuxième loi de Newton s'applique à notre objet de vitesse $\vec{V}+\vec{V}'$ dans R.

$$\vec{F}=m\vec{\Gamma}=m\frac{d(\vec{V}+\vec{V}')}{dt}=m\frac{d\vec{V}}{dt}+m\frac{d\vec{V}'}{dt}$$

Or la vitesse $\vec{V}$ est constante, donc l'accélération $\frac{d\vec{V}}{dt}$ est nulle, et finalement :

$$\vec{F}=m\frac{d\vec{V}'}{dt} \qquad \text{ou encore} \qquad \vec{F}dt=d(m\vec{V}')$$

ce qui veut dire que la 2ème loi est valable dans R', **qui est donc bien lui aussi un référentiel Galiléen**.

Ainsi si un immeuble peut être considéré comme un référentiel inertiel, un ascenseur qui monte à vitesse constante sera lui aussi inertiel. Les forces sont inchangées, $d\vec{p}=\vec{F}dt$ est valable et, dans l'ascenseur, une bille en chute libre décrira une parabole avec une accélération g.

9. Résumé

TOUTE la mécanique du point est basée sur deux principes (ou lois) :	
$d\vec{p}=\vec{F}dt$	***Principe fondamental de la dynamique (PFD)***
$\overrightarrow{F_{1/2}}+\overrightarrow{F_{2/1}}=\vec{0}$	***Loi de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton)***

La deuxième loi de Newton ($md\vec{V}=\vec{F}dt$ ou $\vec{F}=m\vec{\Gamma}$) est un cas particulier du PFD, lorsque la masse est constante, et la première loi de Newton se déduit de la deuxième.

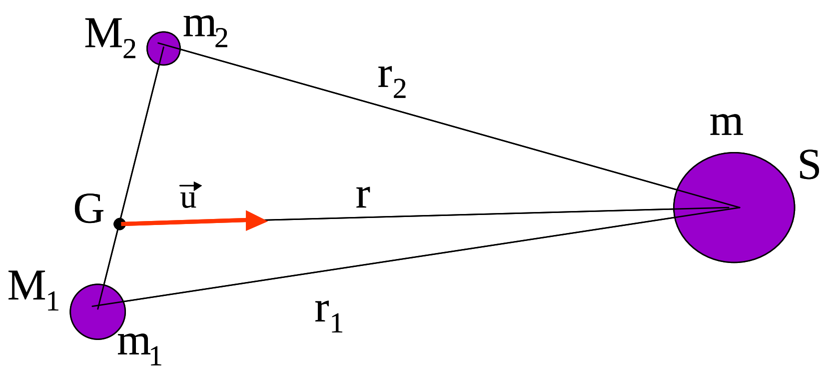
Dans ce cours, la deuxième loi de newton serait suffisante car nous supposerons toujours une masse constante. Donc la force et l'accélération seront toujours colinéaires et proportionnelles.

Mais il reste souhaitable d'utiliser la forme,

$d\vec{p}=\vec{F}dt$

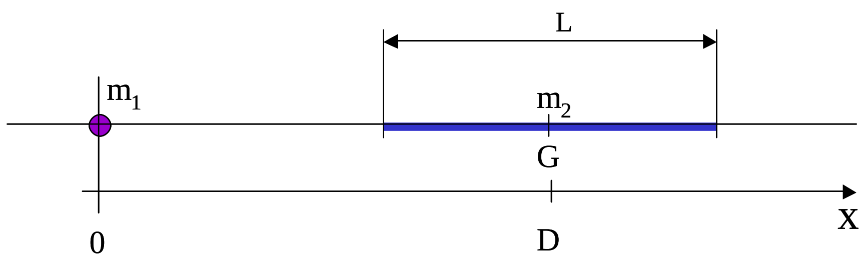
toujours valable, même en mécanique relativiste.

Centre de masse
et force résultante appliquée (1)



$$(m_1+m_2)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2}=K_G m\left(\frac{m_1}{r_1^3}+\frac{m_2}{r_2^3}\right)r\vec{u}+K_G m\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)\overrightarrow{M_1M_2} \quad \neq K_G\frac{m(m_1+m_2)}{r^2}\vec{u}$$

Centre de masse et force résultante appliquée (2)
Attraction point-tige



$$F=\int_{D-L/2}^{D+L/2}\frac{K_G m_1}{x^2}\frac{m_2\,dx}{L}=\frac{K_G m_1 m_2}{D^2-(L/2)^2} \quad \neq \frac{K_G m_1 m_2}{D^2}$$

Annexe 1 : masse constante. Lecture fil rouge. Centre de masse et forces extérieures.

Il ne faut pas exagérer les propriétés du centre de masse, **même si la masse est constante.**

Prenons l'exemple concret du système Terre (masse m_1) Lune (m_2) sur lequel le Soleil (m) exerce les forces de gravitation habituelles. Les forces exercées par le Soleil seront donc considérées comme extérieures au système Terre Lune.
Il est tentant de simplifier le système, et d'étudier le mouvement du centre de masse Terre-Lune (G) en affectant la masse $m_1 + m_2$ au centre de masse, et en écrivant donc :

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = -K_G\frac{m(m_1+m_2)}{r^3}\overrightarrow{SG} \qquad \text{(A)}$$

Nous allons montrer qu'il n'en est rien : la force représentée par le membre de droite est fausse. Repartons de la deuxième loi de Newton appliquée au centre de masse

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F_i})_{ext}$$

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = -K_G\frac{m\,m_1}{r_1^3}\overrightarrow{SM_1} - K_G\frac{m\,m_2}{r_2^3}\overrightarrow{SM_2}$$

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = -K_G\frac{m\,m_1}{r_1^3}(\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GM_1}) - K_G\frac{m\,m_2}{r_2^3}(\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GM_2})$$

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = -K_G m(\frac{m_1}{r_1^3}+\frac{m_2}{r_2^3})\overrightarrow{SG} - K_G m(\frac{m_1\overrightarrow{GM_1}}{r_1^3}+\frac{m_2\overrightarrow{GM_2}}{r_2^3})$$

Il est facile de montrer que (cf. chapitre Problème des deux corps, centre de masse) :

$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2} \qquad \overrightarrow{GM_2} = +\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$$

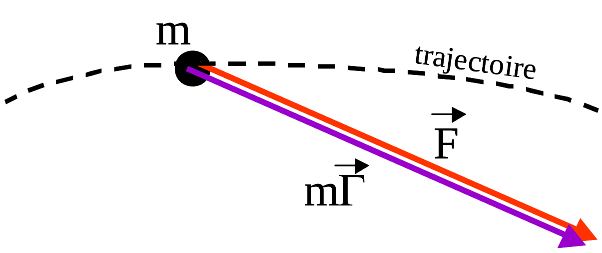
D'où finalement

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt^2} = -K_G m(\frac{m_1}{r_1^3}+\frac{m_2}{r_2^3})\overrightarrow{SG} + K_G m\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3})\overrightarrow{M_1M_2}$$

La partie de droite représente la force appliquée : elle n'est donc pas égale à $K_G\frac{m(m_1+m_2)}{r^3}$,

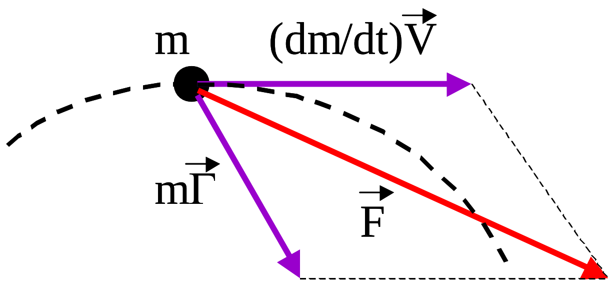
ce qui prouve que la première équation proposée (A) est fausse.
Cette dernière équation montre aussi que **la force n'est pas dirigée suivant $\overrightarrow{SG}$,** puisqu'elle présente une composante suivant $\overrightarrow{M_1M_2}$: l'équation (A) est donc doublement fausse !

2ème Loi Newton



Force et accélération colinéaires:
très important
si l'un des deux est connu,
l'autre s'en déduit immédiatement.

Principe fondamental de la dynamique (PFD)



NB: Beaucoup plus simple
avec $\vec{p}$ (cf. figure PFD)

Les accélérations étant différentes,
des forces identiques conduisent à des trajectoires différentes!?
En fait la deuxième loi de Newton est fausse si m n'est pas constant.

Annexe 2 : masse non constante, lecture fil rouge

A/ Principe fondamental et 2ème loi de Newton

Le principe fondamental est différent de la 2ème loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$
En effet le principe fondamental permet d'écrire :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt} \quad =>$$

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\vec{\Gamma}$$

Le principe fondamental de la dynamique $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ et la 2ème loi de Newton $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ diffèrent donc par le terme $\frac{dm}{dt}\vec{V}$.

B/ Force et accélération

La deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}$$

indique que la force et l'accélération sont colinéaires.
Par contre la relation du paragraphe précédent, directement déduite du PFD, implique :

$$\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\vec{\Gamma}$$

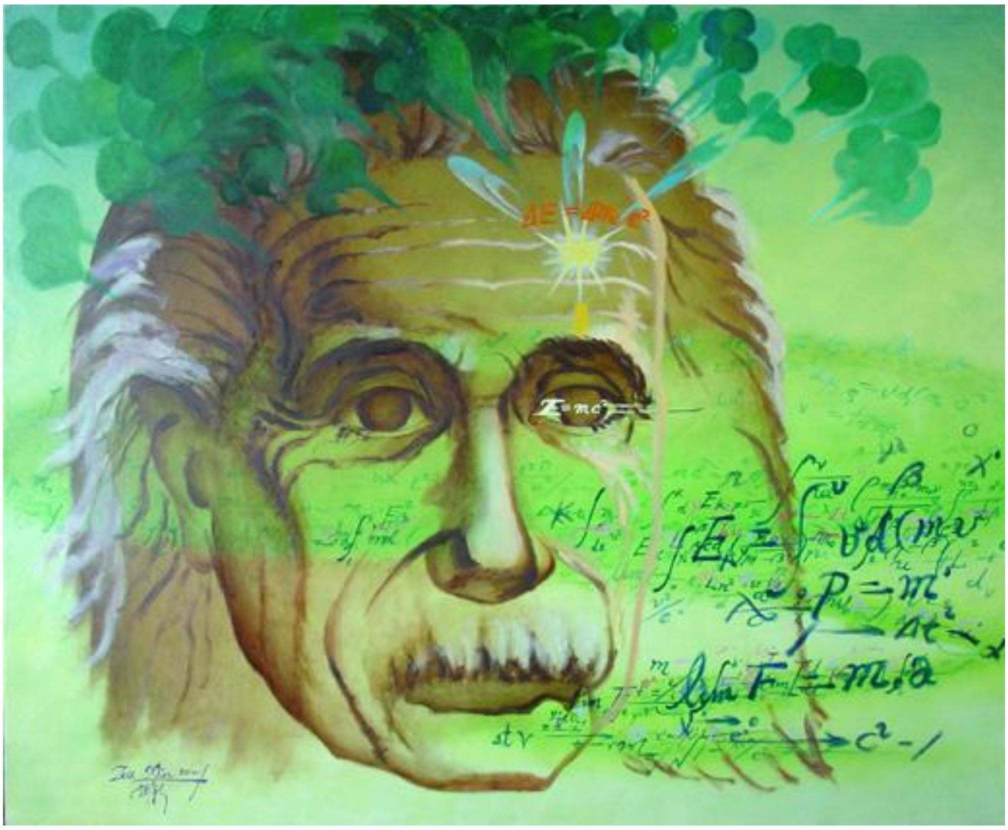
ce qui prouve que si la masse est variable, la force et l'accélération ne sont généralement pas colinéaires (cf. figure), contrairement à ce que propose la 2ème loi de Newton**.**

C/ PFD et force nulle

L'application directe du PFD n'implique pas que la vitesse soit constante, lorsque la force appliquée est nulle.

$$\vec{F} = \vec{0} \quad => \quad d\vec{p} = \vec{0} \quad => \quad dm\vec{V} + md\vec{V} = \vec{0}$$

Sans autre renseignement, c'est tout ce que nous pouvons dire. Nous prouvons seulement que la vitesse $\vec{V}$ et sa variation $d\vec{V}$ sont colinéaires, et que les variations relatives de la vitesse $\frac{dV}{V}$ et de la masse $\frac{dm}{m}$ sont égales, au signe près.
En fait, il a été parfaitement établi que si $\vec{F} = \vec{0}$, la vitesse $\vec{V}$ est effectivement constante.



D/ Exercice de différentiation : centre de masse et principe fondamental de la dynamique

Fausse valeur de la quantité de mouvement

Pour exprimer le PFD dans toute sa généralité, attention à ne pas prendre comme quantité de mouvement celle qui est égale à la somme des masses multipliée par la vitesse du centre de masse, erreur classique. Nous l'appellerons $\overrightarrow{p'}$. Pour simplifier, prenons 2 masses:

$$\overrightarrow{p'} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{V_G}$$

Nous allons montrer que cette grandeur $\overrightarrow{p'}$ est différente de la quantité totale de mouvement dont la définition exacte est:

$$\vec{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}$$

En utilisant la définition du centre de masse :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}$$ et la définition de sa vitesse $$\overrightarrow{V_G} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

$$\overrightarrow{p'} = (m_1 + m_2)\ d\left(\frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}\right)/\,dt$$

Avec un petit peu de patience, et en se souvenant que $\overrightarrow{V_i} = \dfrac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}$, il s'avère que :

$$\overrightarrow{p'} = (m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2}) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{d\ln(\frac{m_1}{m_2})}{dt}\,\overrightarrow{M_1M_2}$$ soit :

$$\overrightarrow{p'} = \vec{p} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{d\ln(\frac{m_1}{m_2})}{dt}\,\overrightarrow{M_1M_2}$$

$\overrightarrow{p'}$ n'est donc pas égal à $\vec{p}$, sauf si les masses sont constantes (ou si leur rapport est constant).

Faux énoncé du principe fondamental

La conclusion est QU'IL NE FAUT PAS UTILISER pour principe fondamental :

$$\frac{d[(m_1 + m_2)\overrightarrow{V_G}]}{dt} = \overrightarrow{F_{ex}}$$ Cette relation n'est vraie que pour des masses constantes

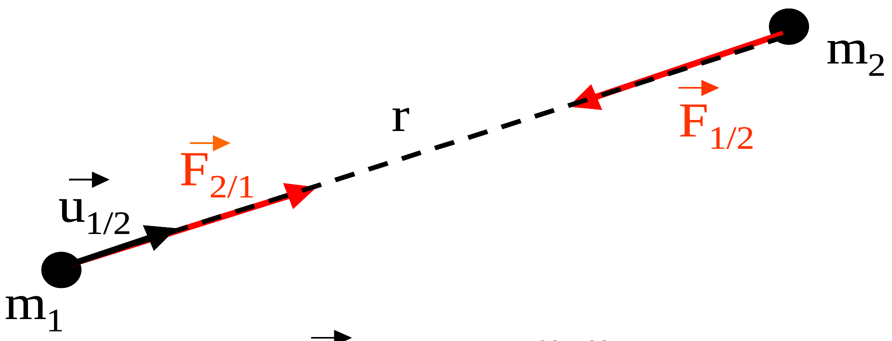
E/ L'addition, ça craint!!!!!

Reprenons la démonstration des familles de référentiels Galiléens (rappel $d\vec{V} = \vec{0}$)

$$\vec{F}dt = d[m(\vec{V} + \overrightarrow{V'})] = (\vec{V} + \overrightarrow{V'})dm + m(d\vec{V} + d\overrightarrow{V'}) = \vec{V}dm + [\overrightarrow{V'}dm + md\overrightarrow{V'}] = \vec{V}dm + d(m\overrightarrow{V'})$$

Donc : $\vec{F}dt \neq d(\overrightarrow{mV'})$! Un référentiel en translation par rapport à un référentiel Galiléen ne serait donc pas inertiel? Si, bien sûr, l'erreur provient du fait que nous n'avons pas le droit d'additionner simplement les vitesses ($\rightarrow \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$), et la force ne se conserve pas.

Forces gravitationnelles



$$\vec{F}_{1/2} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

II. Les forces

La relation fondamentale de la dynamique relie l'accélération d'une masse aux forces qui lui sont appliquées. Nous allons ici décrire le comportement des forces le plus couramment rencontrées. Nous traiterons plus loin la manière d'écrire l'accélération dans les chapitres cinématique et changement de repère.
L'étude des forces peut-être scindée en deux :

- les forces d'interactions à distance (cette distance pouvant être plus petite que la dimension du noyau atomique !). Ce sont les forces élémentaires entre particules. Les forces sont au nombre de quatre : ce sont les forces de gravitation, de Lorentz (électriques et magnétiques), faibles et fortes.
- les forces de contact qui ne sont que le résultat macroscopique des 4 forces d'interaction (contact, frottement, poussée d'Archimède …)

1. Forces d'interaction à distance

Actuellement, la physique utilise quatre forces pour décrire les interactions entre particules. Leur point commun est de décroître lorsque les distances augmentent.

1.1 Force gravitationnelle

Elle fera l'objet d'un chapitre spécial (gravitation). Enoncée par Newton en 1650, elle stipule que: 2 masses **ponctuelles** s'attirent en raison de leur masse et de l'inverse du carré de la distance qui les sépare, selon une direction qui passe par les 2 masses.

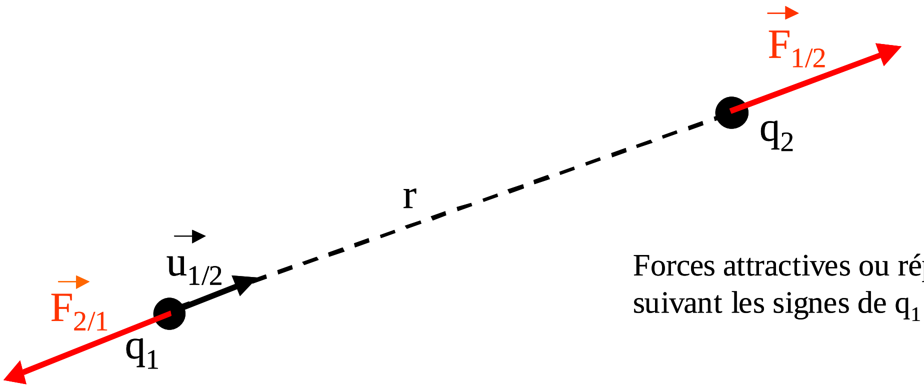
$$\boxed{\overrightarrow{F_{1/2}} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{u_{1/2}}}$$

La notation $\overrightarrow{F_{1/2}}$ représente la force exercée par m_1 sur m_2, et $\overrightarrow{u_{1/2}}$ est un vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2, r est la distance qui les sépare, et K_G la constante de gravitation universelle (=6,6726 10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$).
La relation est parfaitement symétrique: la force exercée par m_2 sur m_1 possède un module identique, la même direction, mais elle est de sens contraire. Nous retrouvons bien ici le principe de l'action et de la réaction.
Il peut être quelquefois utile de l'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} \qquad où \qquad \vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$$

Attention, si les masses ne peuvent pas être considérées comme ponctuelles, c'est à dire si leur taille n'est pas très petite devant la distance qui les sépare, il ne faut pas appliquer cette loi. Elle est alors seulement valable si les solides présentent une répartition de masse à symétrie sphérique (cf. gravitation … et le théorème de Gauss dans le futur cours d'électrostatique).

Forces Coulombiennes (électriques)

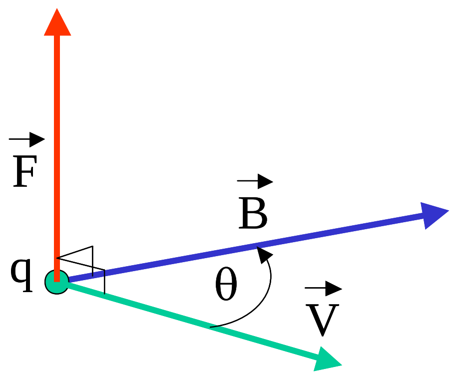


Forces attractives ou répulsives suivant les signes de q_1 et q_2

$$\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \; q_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

$$\vec{F}_{1/2} = - \vec{F}_{2/1}$$

Forces magnétiques



$$\vec{F} = q \; \vec{V} \wedge \vec{B}$$

$$F = q.V.B.\sin(\theta)$$

1.2 Forces de Lorentz (électrique et magnétique)

Elles interviennent lorsque les particules sont chargées et sont alors bien plus importantes que les forces gravitationnelles (~10^{40} fois plus grandes pour un proton et un électron). On distingue les forces électriques, ou coulombiennes, qui s'appliquent à des particules au repos, des forces magnétiques qui s'ajoutent aux forces électriques lorsque les particules sont en mouvement relatif.

Force électrique

L'expression de la force ressemble étrangement à celle de la force gravitationnelle, mais la force peut-être attractive ou répulsive suivant le signe des charges.

$$\boxed{\overrightarrow{F_{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{u_{1/2}}}$$

Cette expression est valable dans le vide, q_1 et q_2, sont les charges exprimées en Coulomb et ε_0 est une constante qui est reliée par la relation $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ à la perméabilité magnétique du vide μ_0 (μ_0 =4π10^{-7} *S.I*) et à la vitesse *c* de la lumière (c=2,998.10^8 m/s), ce qui donne $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}(S.I)$. L'unité la plus utilisée est le Farad/mètre (F/m).

Autre valeur utile: $1/(4\pi\varepsilon_0) \approx 910^9$ F/m

Comme nous le verrons plus loin pour la force gravitationnelle, il est commode de définir un champ électrique. En considérant l'action de q_1 sur q_2 :

$\overrightarrow{F_{1/2}} = q_2\vec{E}$ avec

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\overrightarrow{u_{1/2}}$$

Force magnétique

Lorsque les particules sont en mouvement, une force dite magnétique s'ajoute à la force électrique. Elle se déduit totalement de la force électrique par application des transformations relativistes et s'écrit pour une charge q_2 :

$$\boxed{\vec{F} = q_2\vec{V} \wedge \vec{B}}$$

Où $\vec{B}$ est le champ magnétique exprimé en Tesla (T) et $\vec{V}$ la vitesse de la charge. La force magnétique est donc en permanence perpendiculaire à la vitesse de la charge.

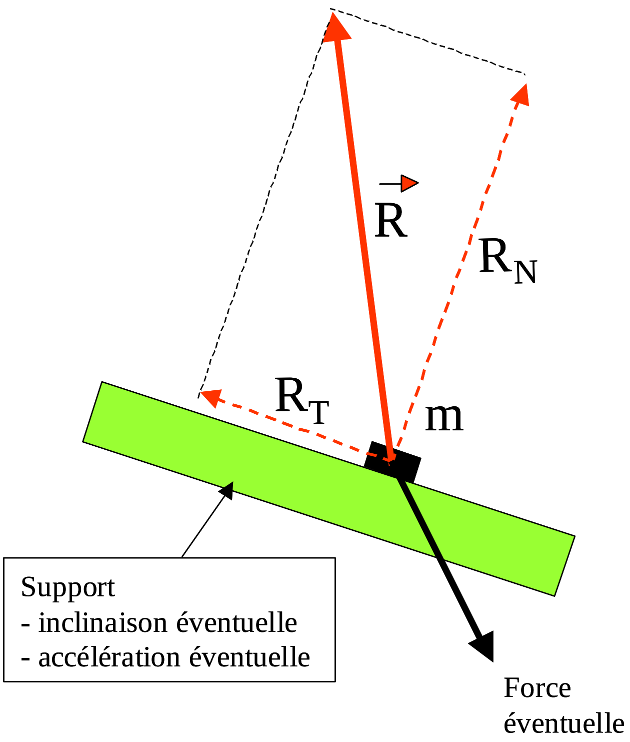
En rassemblant la force électrique et la force magnétique :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = q_2(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

1.3 Force faible

Elle agit à courte distance, à l'échelle atomique, et régit les modes de désintégration des particules et les interactions entre matière et neutrinos. Elle régit les modes de désintégration β des noyaux instables et elle permet la conversion de l'hydrogène en hélium qui est la source d'énergie principale des étoiles, donc de notre soleil.

Frottements solides



Frottement "statique"

pas de mouvement relatif
entre les 2 corps en contact:

$\vec{\Gamma}$ masse (m) et $\vec{\Gamma}$ support identiques

$\vec{\Gamma}$ est connu … et le plus souvent nul

$$\left|\frac{R_T}{R_N}\right| \leq k_s$$

le sens de R_T est à priori inconnu,
résoudre: $\Sigma\vec{F}=m\vec{\Gamma}$

Frottement dynamique

mouvement relatif (glissement)
entre les 2 corps en contact:

$$\left|\frac{R_T}{R_N}\right| = k_d$$

- R_T est toujours opposé à la vitesse relative masse/support
- résoudre: $\Sigma\vec{F}=m\vec{\Gamma}_{\text{masse m}}$

1.4 Force forte

De très très courte portée, elle assure par exemple la cohésion du noyau, sinon il serait instable sous l'effet des forces coulombiennes répulsives, car les charges sont toutes positives (protons). Ces deux dernières forces sortent de notre cadre et seront étudiées plus tard.

2. Forces de contact

Ces forces ne sont pas de nouvelles forces, elles ne sont que la manifestation macroscopique des 4 forces fondamentales (électrique en particulier). Il est beaucoup plus commode pour 2 solides en interaction de considérer la force résultante plutôt que d'ajouter les innombrables interactions entre les atomes et molécules qui les constituent! Nous verrons ici :

- les forces de frottement solides
- les forces de frottement visqueux
- la poussée d'Archimède
- les forces de tension (ressorts …)

2.1 Frottement solide (ou frottement sec ou loi de Coulomb)

Deux cas doivent être envisagés suivant que les solides sont immobiles l'un par rapport à l'autre, ou en mouvement relatif.

Solides sans glissement relatif (immobiles l'un par rapport à l'autre)

Si une masse m est posée sur un support (par exemple une table horizontale, ou inclinée), le support exerce une force sur m, force appelée aussi réaction ($\vec{R}$).
Il est très utile de décomposer cette réaction en une composante R_N normale aux surfaces en contact, et une composante tangentielle R_T appelée **force de frottement**.

$\vec{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$

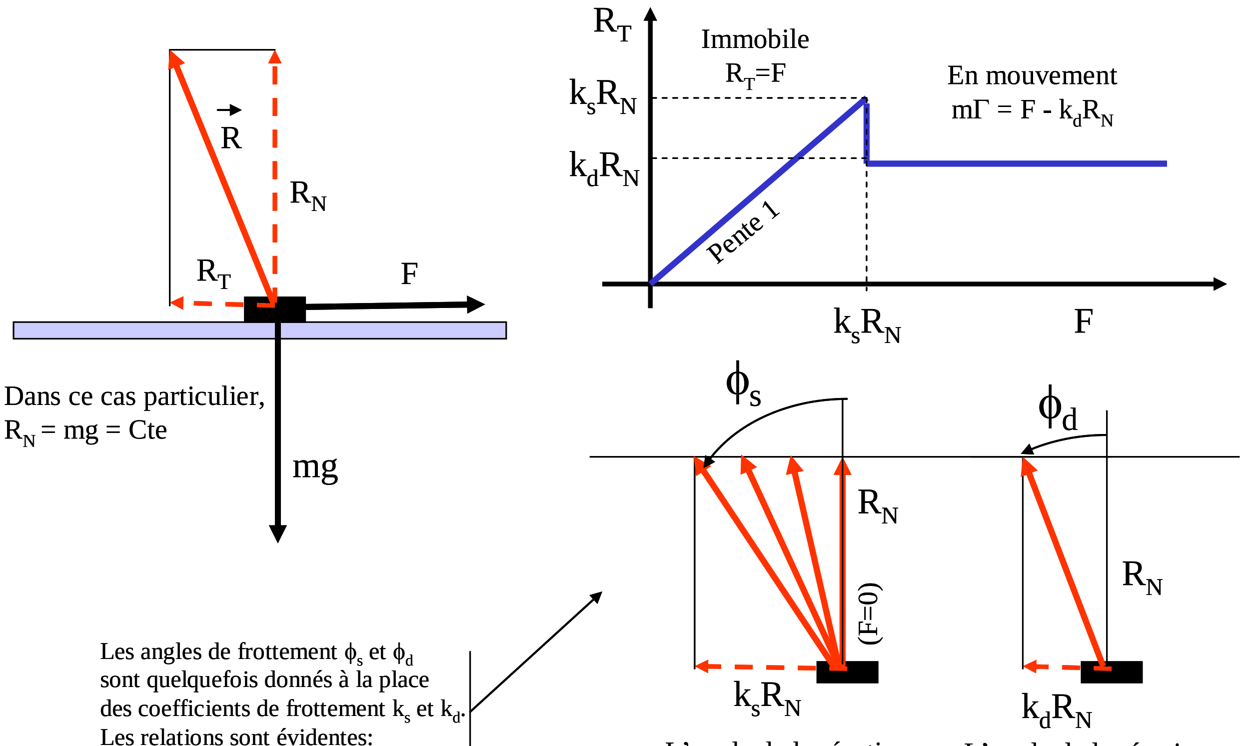
Les lois du frottement nous apprennent que l'absence de glissement (mouvement relatif) n'est possible que si le rapport de la composante tangentielle R_T à la composante normale R_N ne dépasse pas une certaine valeur appelée coefficient de frottement statique k_s.

$\lvert R_T\rvert \leq k_s \lvert R_N\rvert$	Condition de frottement statique (pas de mouvement relatif)

Lorsque le rapport $\lvert R_T/R_N\rvert$ augmente, le système ne présente aucun glissement relatif tant qu'il est inférieur à k_s. La valeur k_s est donc la valeur maximum de ce rapport. Lorsque ce rapport atteint (puis dépasse) k_s le système présente un glissement (relatif).

NB : La surface responsable de la réaction est souvent immobile, mais ce n'est pas une condition obligatoire pour appliquer la règle ci-dessus. Un objet peut être par exemple posé sur une table vibrante, ou sur une voiture en accélération (cas classique du bouchon d'essence, quand ce n'est pas le portefeuille!). Pour résoudre le problème, il faut alors que cette accélération soit connue, et appliquer le PFD à la masse de l'objet.

Frottement solide: exemple, support plan horizontal fixe



Dans ce cas particulier,
R_N = mg = Cte

Les angles de frottement ϕ_s et ϕ_d sont quelquefois donnés à la place des coefficients de frottement k_s et k_d. Les relations sont évidentes:
tg (ϕ_s)= k_s tg (ϕ_d)= k_d

L'angle de la réaction dépend de F, sa valeur maximale est Φ_s

L'angle de la réaction ne dépend pas de F

Solides en mouvement relatif (glissement l'un par rapport à l'autre)

Nous retrouvons les mêmes notions, mais avec une condition différente sur les composantes. Lorsqu'il y a glissement, un coefficient de frottement dynamique k_d est défini, et les composantes respectent cette fois une égalité :

$\lvert R_T \rvert = k_d \lvert R_N \rvert$	Dans le cas d'un glissement (mouvement relatif)

De plus le sens de $\overrightarrow{R_T}$, **force de frottement, est** toujours **opposé à celui du mouvement de la masse** m , mouvement relatif au support bien entendu.
Ce coefficient dynamique est généralement inférieur au coefficient statique.
Quelques valeurs de coefficients :

	Coefficient statique k_s	Coefficient dynamique k_d
Acier / acier	0,2	
Bois / bois	0,3	
Garniture de freins / acier	0,45	
Caoutchouc / bitume	0,60	

Ces notions correspondent bien sûr à une modélisation simple des frottements; dans la réalité, ils peuvent avoir un comportement beaucoup plus complexe.

Illustration

Soit le cas simple d'un solide en contact avec une surface horizontale immobile.
Soumettons le à une force horizontale F . Que le solide soit immobile ou en mouvement l'analyse des forces montre immédiatement que suivant l'axe vertical:

$R_N = mg$

La réaction normale est donc constante et indépendante de F .
Appliquons une force horizontale F croissante. Au début le solide ne bouge pas, donc la somme des forces horizontales est nulle et par conséquent :

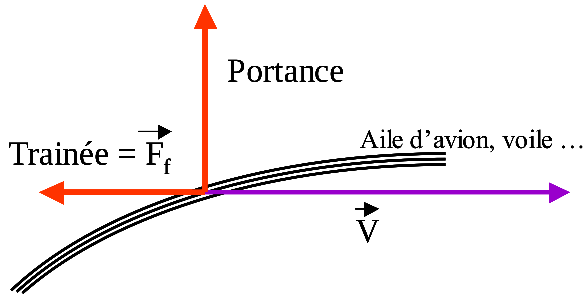
$R_T = F$

Ceci est vrai tant que $R_T \leq k_s R_N$ soit $R_T \leq k_s mg$.
Au delà de cette valeur, le solide se met en mouvement et :

$R_T = k_d mg$ (et nous pouvons aussi ajouter, $F - k_d mg = m\Gamma$)

Ce qui est curieux, c'est le décrochement de la réaction tangentielle du au fait que $k_d < k_s$.
C'est pour cela que les constructeurs automobiles équipent les véhicules de systèmes antiblocages : une roue qui ne glisse pas répond aux conditions du frottement statique (pas de glissement), tandis que si elle est bloquée, elle relève du frottement dynamique, plus faible (et en plus elle n'assure plus son rôle de guidage).
En répétant l'analyse sur un plan incliné (montagnard muni de ses chaussures "Vibram " sur un rocher incliné), il apparaît que, lorsque la glissade commence, elle est très difficile à enrayer, car le coefficient de frottement diminue ($k_s \to k_d$) dès que la glissade commence. L'exercice sur le papier est conseillé … avant l'expérimentation.

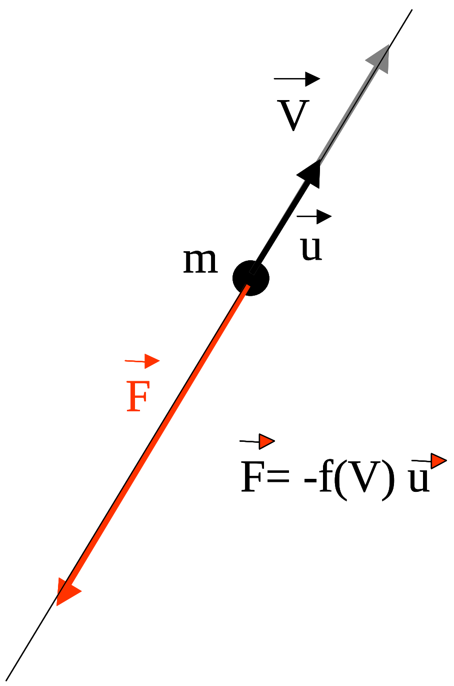
Frottement visqueux: traînée et portance

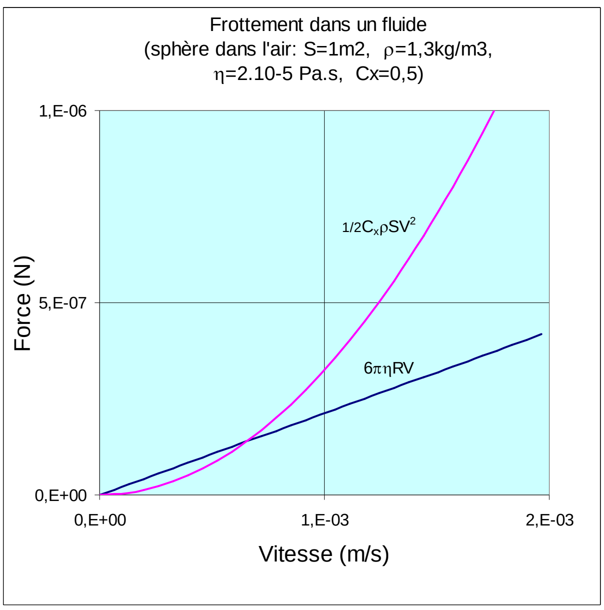


Dans ce cours,
le "point" matériel
sera supposé sphérique
et sans mouvement propre:
la portance est nulle

La traînée est:
de même direction
et de sens opposé
à la vitesse

Frottement visqueux





2.2 Frottement visqueux

Ce frottement s'applique à un solide se déplaçant dans un milieu liquide ou gazeux, donc dans un fluide. Le problème est identique pour un objet fixe dans un fluide en mouvement et aussi pour un objet mobile dans un fluide en mouvement. **C'est la vitesse relative $\vec{V}$ qui compte**.
La force exercée par le fluide a toujours une composante opposée à la vitesse qui s'appelle la traînée. Si le corps qui se déplace ne présente pas, dans la direction de la vitesse, un aspect symétrique, une composante perpendiculaire à la vitesse existe, qui s'appelle la portance et permet entre autres aux voiliers d'avancer et aux avions de voler.
Dans ce cours nous ne parlerons que de la traînée.
La force exercée par le milieu sur la masse m a toujours même direction que la vitesse, mais elle est toujours de sens opposé : $\vec{F_f} = -b\vec{V}$. A faible vitesse, le coefficient b peut être considéré comme constant, mais ce n'est plus vrai lorsque la vitesse dépasse un certain seuil.

Vitesse faible (régime laminaire)

$$\boxed{\vec{F_f} = -k\eta\vec{V}}$$

où η est la viscosité du milieu (Pascal.seconde ou Poiseuille).
k n'est pas fonction de la vitesse, mais de la géométrie du système, et sa dimension est une longueur.
La force est donc proportionnelle à la vitesse (régime linéaire).

	η (Pa.s ou Poiseuille)
Air (P atm.)	1,8 10^{-5}
Eau	1,1 10^{-3}
Huile olive	0,1
Huile moteur SAE	0,3
Glycérine	1,5

Ces valeurs sont données à température ambiante, la viscosité des gaz augmente avec la température, et celle des liquides diminue.
Dans le cas particulier d'une sphère de rayon R, $k = 6\pi R$ et par conséquent :

$$\vec{F_f} = -6\pi R\eta\vec{V}$$

Vitesse élevée (régime turbulent)

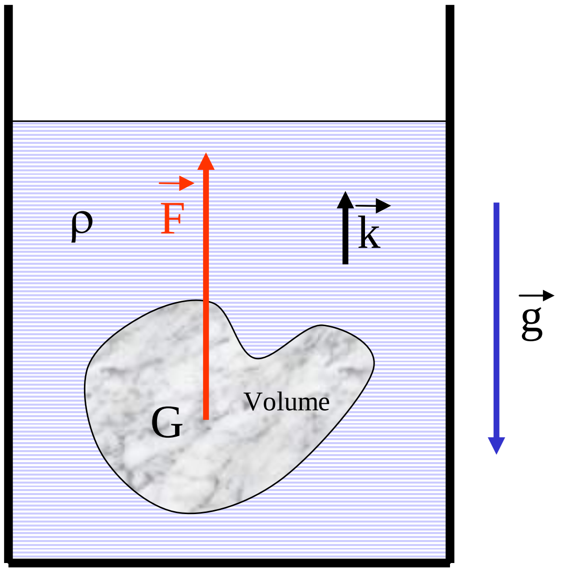
$$\vec{F_f} = -\tfrac{1}{2}C_x S\rho V\vec{V}$$

C_x est le coefficient de pénétration dans l'air ou coefficient de traînée (qui a donné son nom à une voiture), S la surface apparente du mobile dans le plan perpendiculaire au mouvement, et ρ la masse volumique du fluide.
La force varie donc comme le carré de la vitesse (régime quadratique).
Il est très utile de la mettre sous la forme :

$$\boxed{\vec{F_f} = -\tfrac{1}{2}C_x S\rho V^2\vec{u}}$$

ou $\vec{u}$ est un vecteur unitaire orienté dans le sens du déplacement : le module de la force $\tfrac{1}{2}C_x S\rho V^2$ est ainsi séparé de sa direction et de son sens donnés par $-\vec{u}$.

Poussée d'Archimède



$$\vec{F}_{\text{Archimède}} = \rho.\text{Volume}.g.\vec{k}$$

La force s'applique au centre de masse

Et si une partie du volume est émergé (iceberg ...) ??

→ *Poussée vers le haut de la part du fluide supérieur* (*alors que la résultante des forces de pression de ce fluide supérieur est "manifestement" dirigée ... vers le bas!*)

A méditer. Deux pistes:
- retourner à l'hydrostatique
- effectuer une séparation fictive à la surface

	C_x (sans dimension)
Carré, disque	1,1
Cycliste	0,8 à 1,1
Sphère	0,51
Voiture	0,3 à 0,5
Aile d'avion	0,01

Transition vitesse faible/ vitesse élevée

La transition de la loi vitesse faible à celle de la vitesse élevée n'est pas nette, et il y a toute une zone où il est difficile de prédire le type de force, zone qui dépend fortement des conditions expérimentales.
Pour avoir une idée, nous pouvons calculer la vitesse V_e pour laquelle les 2 types de forces sont égaux. **Dans le cas particulier d'une sphère** :

$$\tfrac{1}{2} C_x S \rho V_e^2 = 6\pi\eta R V_e \qquad \Rightarrow \qquad V_e = \frac{12\eta}{C_x R \rho}$$

Si $V << V_e$ (environ dix fois plus petite) la force est linéaire (régime laminaire).
Si $V >> V_e$ (environ dix fois plus grande) la force est quadratique (régime turbulent).
Pour l'air comme pour l'eau, et pour un diamètre de 1m, cette vitesse est inférieure au millimètre par seconde. Autant dire que, dans la vie de tous les jours, même si nous n'avons pas spécialement la forme d'une sphère, nous subissons toujours une force en V^2.
Par contre pour le brouillard, dont le diamètre des gouttes est de qq. micromètres, vous montrerez facilement que la force est proportionnelle à la vitesse, et vous obtiendrez une vitesse de chute très faible.

2.3 Poussée d'Archimède (liquides et gaz)

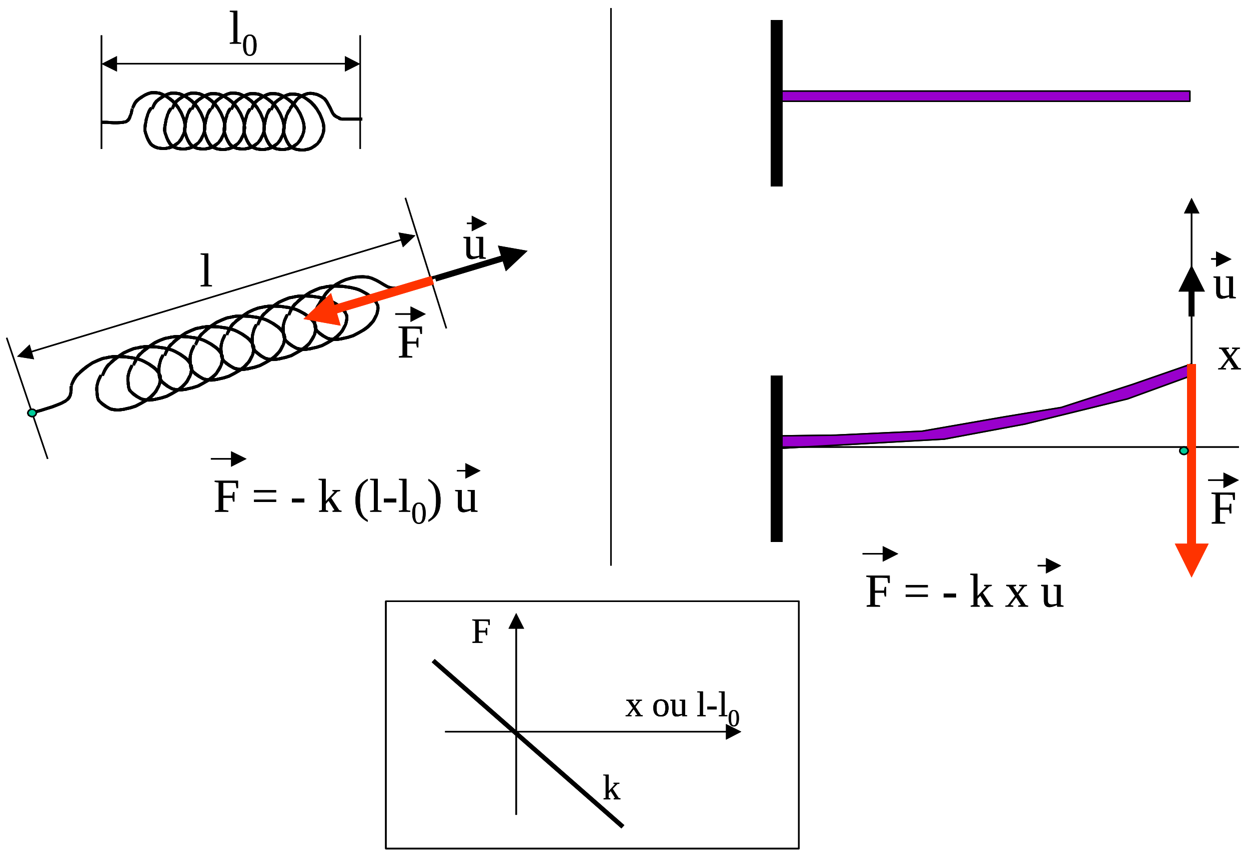
Tout corps plongé dans un liquide … ressort mouillé ! Non ce n'est pas cela la loi d'Archimède d'autant que cette affirmation n'est pas toujours vraie : le canard ressort sec de l'eau, et la plaquette de silicium trempée dans de l'acide fluorhydrique ressort sans trace d'acide !

Poussée d'Archimède: tout corps plongé dans un fluide est soumis à une force verticale, dirigée vers le haut, égale au poids du liquide déplacé :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{Ar.}} = \rho \, Vol \, g \, \vec{k}}$$

ρ est la masse volumique du ***FLUIDE***, Vol le volume du ***SOLIDE***, g l'accélération de la pesanteur et $\vec{k}$ un vecteur dirigé vers le haut, suivant la verticale.
En toute rigueur, le solide doit avoir un volume très petit pour que $\vec{g}$ soit constant, ce qui sera le cas dans tous les cas qui nous concerneront. La force s'applique alors au centre de masse du solide.
La démonstration de la poussée d'Archimède est aisée à partir de la connaissance des forces de pression hydrostatique, en prenant soin, pour simplifier, de prendre un cube ou un cylindre!

Forces de tension



2.4 Forces de tension

Un fil élastique, un ressort, une lame que l'on plie exercent une force. Cette force est en première approximation proportionnelle à leur allongement, ou à l'amplitude de leur déformation.

Ressort

Dans cette approximation linéaire, un ressort exerce une force qui vérifie :

$$\vec{F_r} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

k se nomme la raideur du ressort, l_0 est sa longueur au repos c'est à dire lorsqu'aucune force n'est exercée par le ressort, et l la longueur après allongement ; $\vec{u}$ est un vecteur unitaire dans la direction du ressort, orienté de son point de fixation vers le point où il exerce la force.
Cette relation est algébrique, et valable si $l < l_0$, dans la mesure où le ressort peut être comprimé bien sûr, c'est à dire si les spires qui le composent sont non jointives au repos.
Attention:

- l'expression $\vec{F_r} = -k(\vec{l} - \vec{l_0})$ est fausse, aussi bien en module qu'en direction.
- la longueur l_0 est la longueur du ressort lorsqu'il n'exerce aucune force, ce n'est généralement ni sa longueur à l'équilibre, ni celle qu'il possède au moment du départ de l'expérience ! Par exemple si une masse est suspendue à un ressort et oscille, l_0 ne correspond pas à sa longueur pour la position d'équilibre.

Lame de ressort :

$$\vec{F_r} = -kx\vec{u}$$

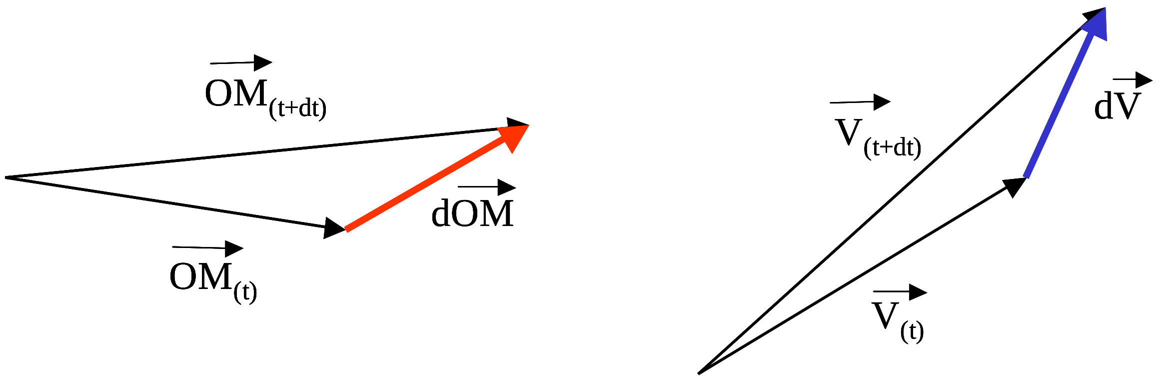
où x est la déformation et $\vec{u}$ **est orienté suivant les x positifs**.

Les signes moins qui apparaissent chaque fois traduisent une notion de rappel : lorsque le ressort s'éloigne de la position où il exerce une force nulle, la force "rappelle" le ressort vers sa position d 'équilibre.

Tension d'un fil de masse négligeable.

Lorsqu'un fil est tendu, on parle de sa tension. Elle a toujours la direction du fil. Son module est constant sur toute la longueur du fil. Pour le prouver, il suffit d'isoler un élément de fil. Si les forces aux deux extrémités de cet élément ne sont pas égales et opposées, la résultante est non nulle, et son accélération serait alors infinie puisque sa masse est nulle !
Elle n'a pas de sens a priori: si un fil est cassé, il faudra 2 forces égales et opposées pour réparer cette coupure. Ce qui a un sens, c'est la force que le fil exerce sur une masse, sens parfaitement évident puisqu'un fil ne peut pas pousser, mais seulement tirer: c'est du "bon sens".
Une poulie, de masse négligeable, fait "tourner" la force exercée par un fil, la tension du fil est inchangée. Le raisonnement est sensiblement identique au précédent.

Position, vitesse et accélération



$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad\qquad \vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$\vec{V}$ est colinéaire à $d\overrightarrow{OM}$ $\qquad$ $\vec{\Gamma}$ est colinéaire à $d\vec{V}$

$d\overrightarrow{OM} = \vec{V}\,dt$ ← forme différentielle → $d\vec{V} = \vec{\Gamma}\,dt$

III. Cinématique

1. Introduction

La cinématique consiste à analyser le mouvement de "points" sans se préoccuper des causes de ce mouvement. Nous ne parlerons donc pas ici des forces ou des lois de Newton. Ce chapitre est purement mathématique.

L'espace sera supposé euclidien et isotrope, c'est à dire possédant les mêmes propriétés dans toutes les directions. D'autre part, en mécanique classique, le temps est considéré comme absolu; il ne dépend pas du repère. Il faut savoir que la relativité rejette cette notion de temps absolu et montre que l'on ne peut confondre les temps de deux repères que lorsque les vitesses sont faibles devant la vitesse de la lumière.

La position d'un point est généralement donnée dans un référentiel physique: le laboratoire, la terre, le soleil, l'observateur … Un repère lui est attaché, et un système de coordonnées est défini pour décrire le mouvement.
Il est bien clair que deux observateurs placés dans des repères en mouvement l'un par rapport à l'autre ne percevront pas le même mouvement. Lorsqu'une bille tombe verticalement dans un train, le passager va observer une droite, tandis que la vache à terre va contempler une parabole!

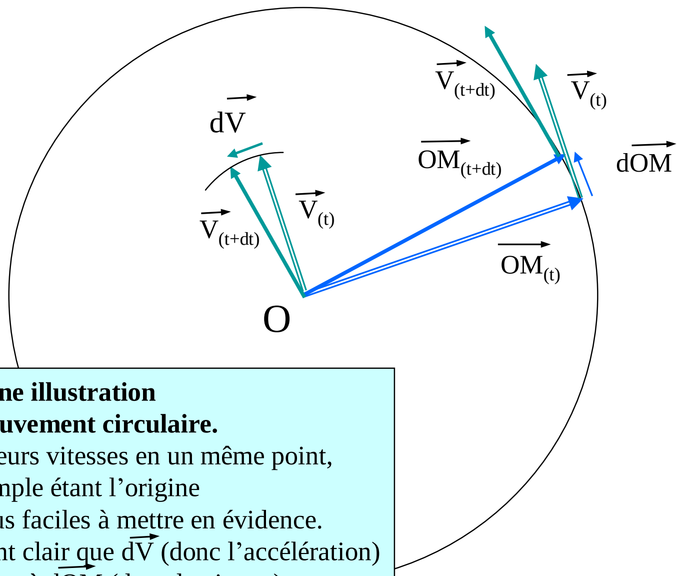
Ce chapitre se présente en trois parties. Nous rappellerons les définitions des vecteurs position, vitesse et accélération, puis nous introduirons la notion de différentielle d'un vecteur, et finalement nous apprendrons à exprimer les positions, vitesses et accélération dans différents types de repères : cartésien, cylindrique, sphérique, Frenet ; certains repères sont en fait mieux adaptés que d'autres pour l'analyse des problèmes, compte tenu des géométries et des symétries présentes.

2. Définition des vecteurs position, vitesse et accélération

2.1 Position

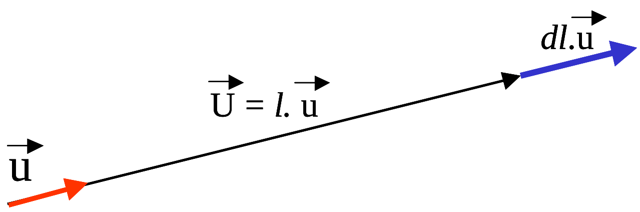
Dans un repère d'origine O, la position du point mobile M est repéré par le vecteur $\overrightarrow{OM}$

Pour se faciliter la vie : un vecteur est inchangé par translation
(ses composantes sont invariantes dans une translation)



Ici une illustration
pour le mouvement circulaire.
En translatant les vecteurs vitesses en un même point,
le plus simple étant l'origine
les variations sont plus faciles à mettre en évidence.
Il devient alors parfaitement clair que $\vec{dV}$ (donc l'accélération)
est perpendiculaire à $\vec{dOM}$ (donc la vitesse)

Différentielle d'un vecteur



$$\vec{dU} = dl.\ \vec{u} + l.\vec{du}$$

$\boxed{\vec{du}\ ?}$

2.2 Vitesse

La vitesse est définie comme la dérivée du $\overrightarrow{VECTEUR}$ position par rapport au temps.

$\vec{V} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ ou de manière équivalente : $d\overrightarrow{OM} = \vec{V}dt$

Dans cette écriture, la présence du point O signifie que la vitesse est calculée dans le repère d'origine O. Dans certains ouvrages, vous trouverez :

$$\vec{V} = \frac{d\vec{M}}{dt}$$

dont la signification est identique, $d\vec{M}$ signifiant la variation de la position du point M, mais il n'y a plus de référence explicite à l'origine du repère qui doit donc être préalablement bien définie.
Attention, c'est très important, il s'agit bien de la dérivée du **vecteur**, nous y reviendrons avec l'accélération.

2.3 Accélération

L'accélération est elle-même la dérivée du $\overrightarrow{VECTEUR}$ vitesse $\vec{V}$ par rapport au temps.

$\vec{\Gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ ou de manière équivalente : $d\vec{V} = \vec{\Gamma}dt$

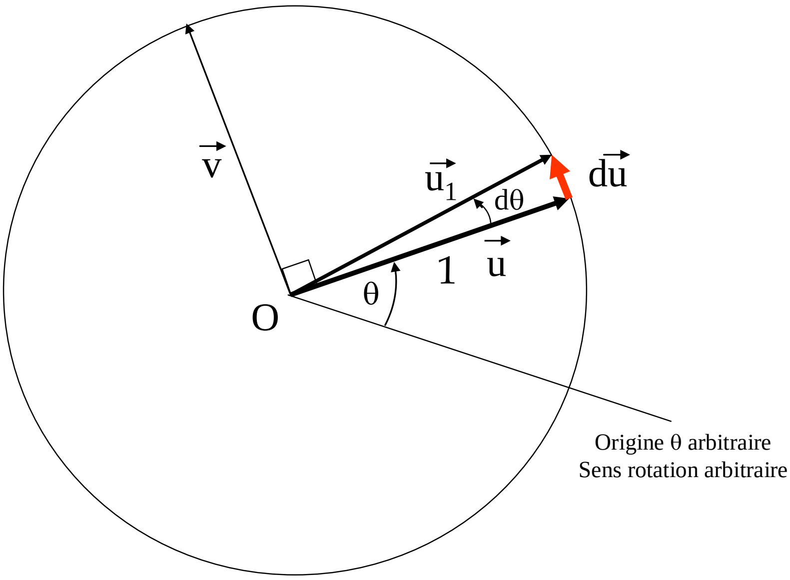
Pour bien faire comprendre la subtilité des vecteurs, signalons une erreur classique.
Tournant sur un manège à vitesse de rotation constante, il est courant de penser que l'accélération est nulle. Il en est de même pour un virage en vélo sans changer de "vitesse". C'est FAUX, ces 2 mouvements sont accélérés. En effet dans les 2 cas, si le module de la vitesse est bien constant, il n'en est pas de même du VECTEUR vitesse $\vec{V}$ qui lui change de **direction** à chaque instant.
Dire qu'il n'y a pas d'accélération dans un mouvement de rotation uniforme est équivalent d'affirmer que la vitesse elle aussi est nulle! Eh bien oui, puisque le module de $\overrightarrow{OM}$, le rayon de la trajectoire, est constant, comme le module de la vitesse.
Moralité, sur un vélo, le cycliste peut provoquer une accélération avec: les pédales, les freins … et le guidon

Attention, la position est une notion évidente, la vitesse est relativement intuitive, mais l'accélération réserve bien des surprises: par exemple, c'est quand le balancier d'une horloge est en position extrême, donc apparemment "immobile" que son accélération (tangentielle) est la plus élevée.

3. Différentielle d'un vecteur et dérivée

Pour bien s'imprégner des outils de la physique, il est essentiel de bien comprendre la notion de différentielle.

Différentielle (variation) d'un vecteur unitaire dans le plan



$$d\vec{u} = \vec{v}\, d\theta$$

En mécanique, la différentielle d'un vecteur est à la base de très nombreux développements.
La différentielle d'une grandeur, c'est simplement la modification engendrée par l'évolution d'un paramètre: changement du temps, mais aussi d'une longueur, d'un angle …
En d'autres termes c'est très exactement ce qu'il faut ajouter à la grandeur initiale pour obtenir la nouvelle.

Il est souvent commode d'exprimer un vecteur $\vec{U}$ par :
$\vec{U} = l\vec{u}$
Où ℓ est un scalaire et $\vec{u}$ un vecteur unitaire.
la valeur absolue de ℓ est le module du vecteur. Sa dimension est celle de $\vec{U}$ **.**
$\vec{u}$ précise la direction, il n'a pas de dimension, et son module est égal à 1.

Lorsque ℓ et (ou) $\vec{u}$ varient, $\vec{U}$ varie:
$d\vec{U} = \vec{u}\, dl + l\, d\vec{u}$
On voit bien ce que signifie dl, c'est la variation de son module, mais $d\vec{u}$? Voyons cela …

3.1 Différentielle d'un vecteur unitaire **dans un plan** / dérivée

Nous allons examiner le cas très important de la différentielle du **vecteur unitaire qui tourne dans un plan**, par 3 approches successives.

Première propriété

$(\vec{u})^2 = 1$ => $2\vec{u}.d\vec{u} = 0$
Le produit scalaire est nul, donc $d\vec{u}$ est **perpendiculaire** à $\vec{u}$:
Cette propriété reste évidemment valable à 3 dimensions.

Approche "géométrique" (cf. figure)

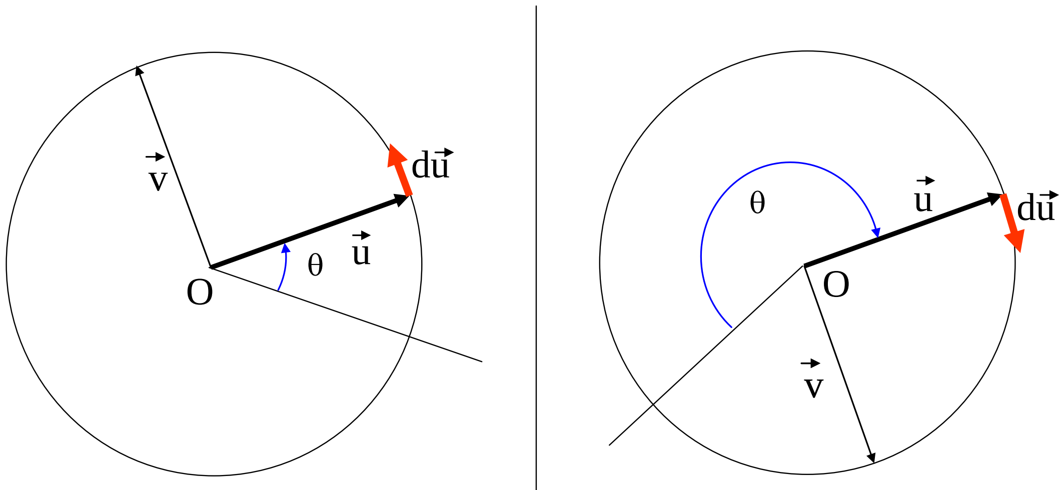
Elle permet de "sentir" la différentielle.
La direction de $\vec{u}$ est repérée par un angle θ. Lorsque θ augmente de θ à θ+dθ, ce vecteur $\vec{u}$ devient $\vec{u}_1$.
Rappelons que la différentielle de $\vec{u}$, notée $d\vec{u}$, c'est ce qu'il faut ajouter à $\vec{u}$ pour obtenir $\vec{u}_1$.
Il est évident sur la figure que si dθ est petit, $d\vec{u}$ possède les caractéristiques suivantes:

- il est porté par la tangente au cercle, et il est donc perpendiculaire à $\vec{u}$
- son sens est suivant les θ croissants
- le rayon du cercle étant égal à 1, son module est égal à 1.dθ (cf. définition du radian)

En définissant le vecteur $\vec{v}$ perpendiculaire à $\vec{u}$, obtenu par rotation de π/2 dans le sens des θ croissants, $d\vec{u}$ s'écrit finalement:
$d\vec{u} = d\theta.\vec{v}$

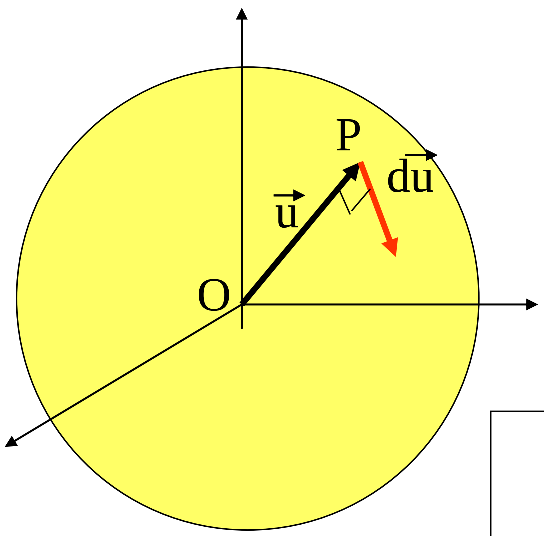
Convention pour le vecteur $\vec{v}$

$\vec{v}$ *est perpendiculaire à* $\vec{u}$ *dans le sens des* θ *croissants*



$$d\vec{u} = d\theta\vec{v} \qquad\qquad d\vec{u} = d\theta\vec{v}$$

Différentielle d’un vecteur unitaire dans l’espace



L’extrémité P du vecteur unitaire
est toujours sur une sphère de rayon 1.

Toute variation différentielle $d\vec{u}$
s’appuie donc sur la surface de la sphère :
elle est donc perpendiculaire à $\vec{u}$

=> $\vec{u}.d\vec{u}=0$

*Démonstration analytique (**la** démonstration officielle)*

Dans un repère Oxyz fixe où sont définis les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ le vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire

$\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + sin\theta\,\vec{j}$

Si θ passe de θ à θ+dθ

$d\vec{u} = -\sin\theta d\theta\,\vec{i} + \cos\theta d\theta\,\vec{j}$

soit

$d\vec{u} = (-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})d\theta$

Vous prouverez facilement que le vecteur $-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

- a un module égal à 1
- est perpendiculaire à $\vec{u}$ (utilisez le produit scalaire … mais n'hésitez pas en plus à effectuer une construction graphique!).

C'est le vecteur $\vec{v}$ de l'approche "géométrique".

Le vecteur $d\vec{u}$ est donc bien porté par $\vec{v}$ et a pour module dθ.

NB : une démonstration plus rapide consiste à utiliser les propriétés de la variable complexe. Un vecteur unitaire est représenté par $Z = e^{i\theta}$, d'où $dZ = ie^{i\theta}d\theta$: i indique une rotation de $+\pi/2$ du vecteur initial $e^{i\theta}$, et le module de dZ est bien $d\theta$.

A vous de vérifier que

$d\vec{v} = -d\theta.\vec{u}$

Conclusion dans un plan

Nous retenons donc, **très important**, que dans un plan **:**

$d\vec{u} = d\theta.\vec{v}$	**(**$\vec{u}$ **vecteur unitaire, mouvement dans un plan**)

$\vec{v}$ étant un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$, obtenu par rotation de $\vec{u}$ de π/2 **dans le sens des θ croissants.**

La différentielle étant connue, le calcul d'une dérivée quelconque est trivial. En mécanique, la plus communément rencontrée est la dérivée par rapport au temps qui s'écrira donc:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta.\vec{v}}{dt} \qquad \frac{d\vec{u}}{dt} = \omega\vec{v}$$

$d\theta/dt = \omega$ représente la vitesse de rotation que l'on appelle ω. Son unité est le radian par seconde (bannir les degrés, grades, tours …), et elle n'est pas forcément constante!

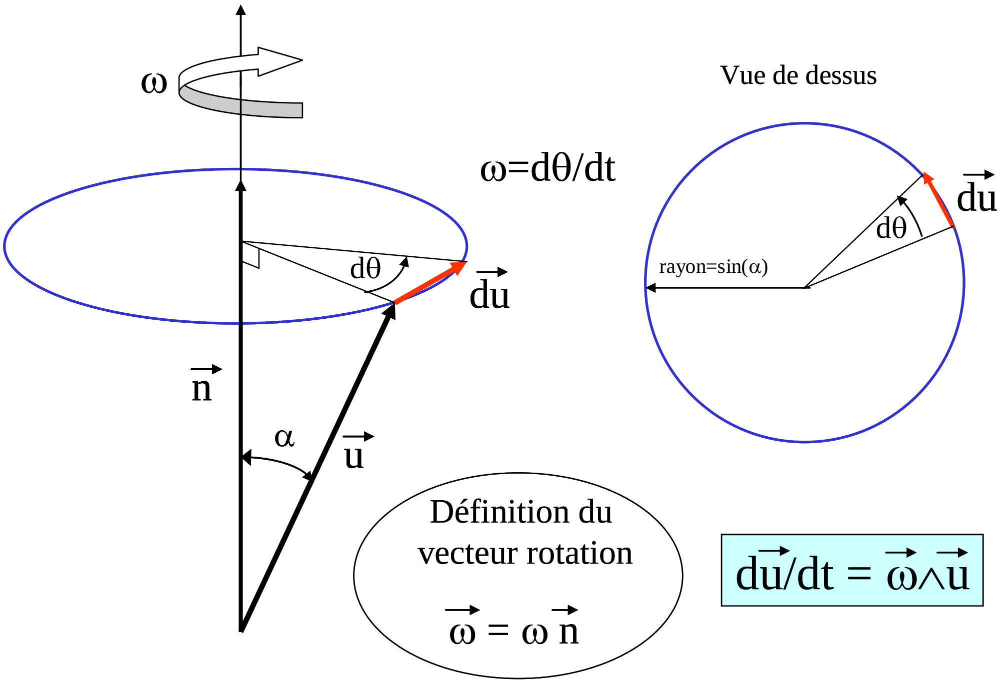
On définit alors le vecteur rotation $\vec{\omega}$, perpendiculaire au plan de rotation, dont le sens est donné par la règle du tire-bouchon ce qui permet d'écrire

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{u}}$$

A vous de vérifier que la direction, le sens et l'amplitude de $\vec{\omega}\wedge\vec{u}$ sont bien compatibles avec $d\vec{u} = d\theta.\vec{v}$

Vous pourrez aussi vérifier que $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{v}$

Différentielle d'un vecteur unitaire dans l'espace (donc valable aussi dans un plan)

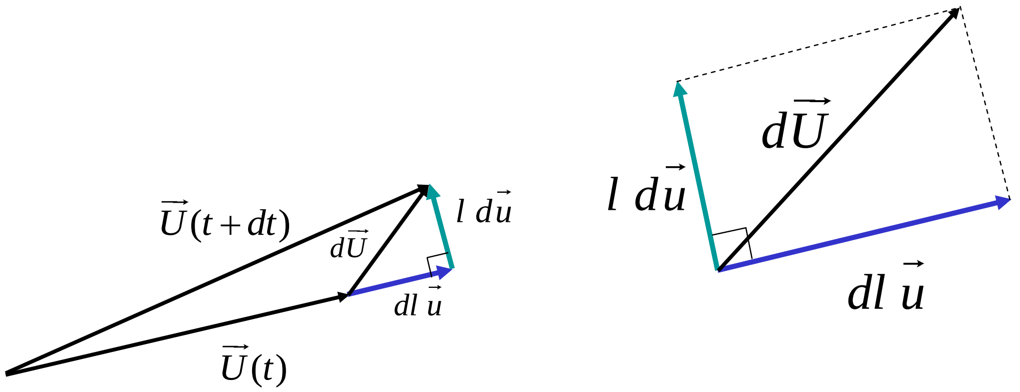


Définition du vecteur rotation

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{n}$$

$$\boxed{d\vec{u}/dt = \vec{\omega} \wedge \vec{u}}$$

Différentielle d'un vecteur dans l'espace (a fortiori dans le plan)



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{U} &= l\,\vec{u} \\ d\vec{U} &= dl\,\vec{u} + l\,d\vec{u} \end{aligned}}$$

3.2 Différentielle /Dérivée d'un vecteur unitaire dans l'espace (lorsque $\vec{\omega}$ et $\vec{u}$ ne sont pas perpendiculaires)

La démonstration nécessite une projection et un développement analytique du style de celui que nous avons effectué dans le plan, mais à 3 dimensions. Nous nous contenterons d'une approche géométrique (cf. figure), mais vous pouvez aussi consulter votre globe terrestre.

Rappel : nous savons déjà que :
$(\vec{u})^2 = 1$ => $2\vec{u}.d\vec{u} = 0$ donc $d\vec{u}$ est **perpendiculaire** à $\vec{u}$
Ceci se comprend très bien lorsqu'on réalise que, quelles que soient les variations de $\vec{u}$, son extrémité se déplace sur une sphère de rayon constant égal à 1 (cf. figure)

1/ Direction et sens de $d\vec{u}$: $\vec{u}$ tourne autour de l'axe défini par $\vec{\omega}$ (donné) sur lequel nous définissons un vecteur unitaire $\vec{n}$.
$\boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{n}}$
Il est clair sur le dessin que l'extrémité de $\vec{u}$ décrit un cercle et que $d\vec{u}$ est perpendiculaire à $\vec{n}$ et à $\vec{u}$: il est donc dirigé comme $\vec{n} \wedge \vec{u}$.

2/ Module : rayon.dθ soit : 1.sin(α).dθ

Ces deux propriétés peuvent être rassemblées en écrivant
$d\vec{u} = d\theta\,(\vec{n} \wedge \vec{u})$
Pour vérification essayez avec α=0 ($\Rightarrow d\vec{u} = \vec{0}$) et α=π/2 ($\Rightarrow d\vec{u} = d\theta.\vec{v}$, cf. différentielle dans un plan). Il lui correspond une écriture dérivée :
$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\vec{n} \wedge \vec{u}) = \omega(\vec{n} \wedge \vec{u}) = \omega\vec{n} \wedge \vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}.$$
En conclusion pour **les vecteurs unitaires**

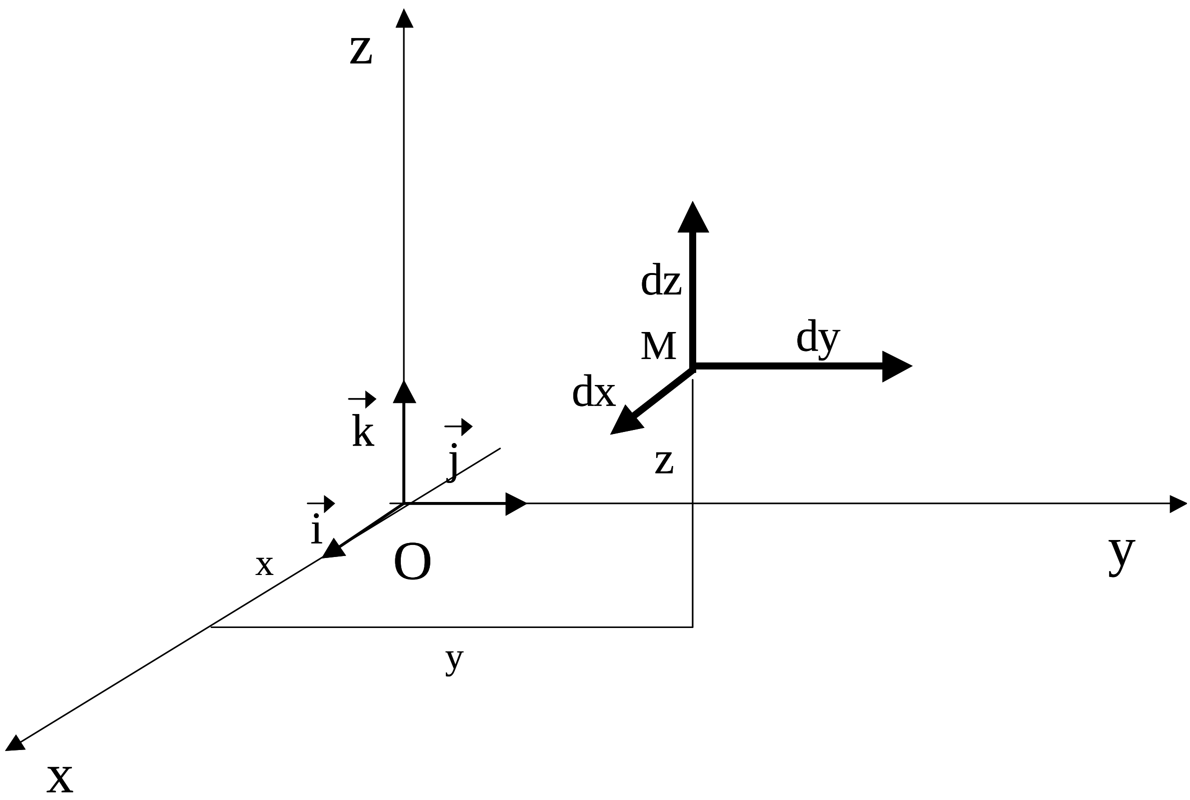
$d\vec{u} = d\theta\,(\vec{n} \wedge \vec{u})$	ou	$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$	$\vec{u}$ (vecteur unitaire)

Valable à **2** ou **3** dimensions, **quelles que soient les directions relatives de $\vec{\omega}$ et $\vec{u}$**
Cette relation est très commode pour traiter des problèmes de manière systématique, surtout à 3 dimensions.
Important: le vecteur rotation a toutes les propriétés d'un vecteur. Si la rotation s'effectue autour de 2 axes, le vecteur rotation est la somme vectorielle des vecteurs rotations liés à chaque axe. C'est le cas par exemple d'une roue de vélo en mouvement lorsque le guidon tourne.

3.3 Différentielle d'un vecteur quelconque: conclusion

La conclusion est résumée sur la figure: la différentielle est la somme de deux composantes orthogonales.

Coordonnées cartésiennes



4. $\overrightarrow{OM}$, $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ dans les différents systèmes de coordonnées

4.1 Coordonnées cartésiennes

C'est le système que l'on utilise par défaut, lorsqu'on n'a pas d'idée particulière sur la symétrie du système proposé.

Vecteurs unitaires, fixes dans le repère: leurs direction sens et module sont donc invariants.
$\vec{i}$, $\vec{j}$ (perpendiculaire à $\vec{i}$) et $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$

<u>Position</u>

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

Les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont constants.
x, y et z sont les trois coordonnées d'espace et varient de $-\infty$ à $+\infty$

<u>Vitesse</u>

Sa définition a été donnée:

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Il faut imaginer un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ lorsque les variables d'espace x , y et z varient. Ici, c'est évident, ce sont :
dx suivant $\vec{i}$, dy suivant $\vec{j}$ et dz suivant $\vec{k}$
ce qui nous conduit à:

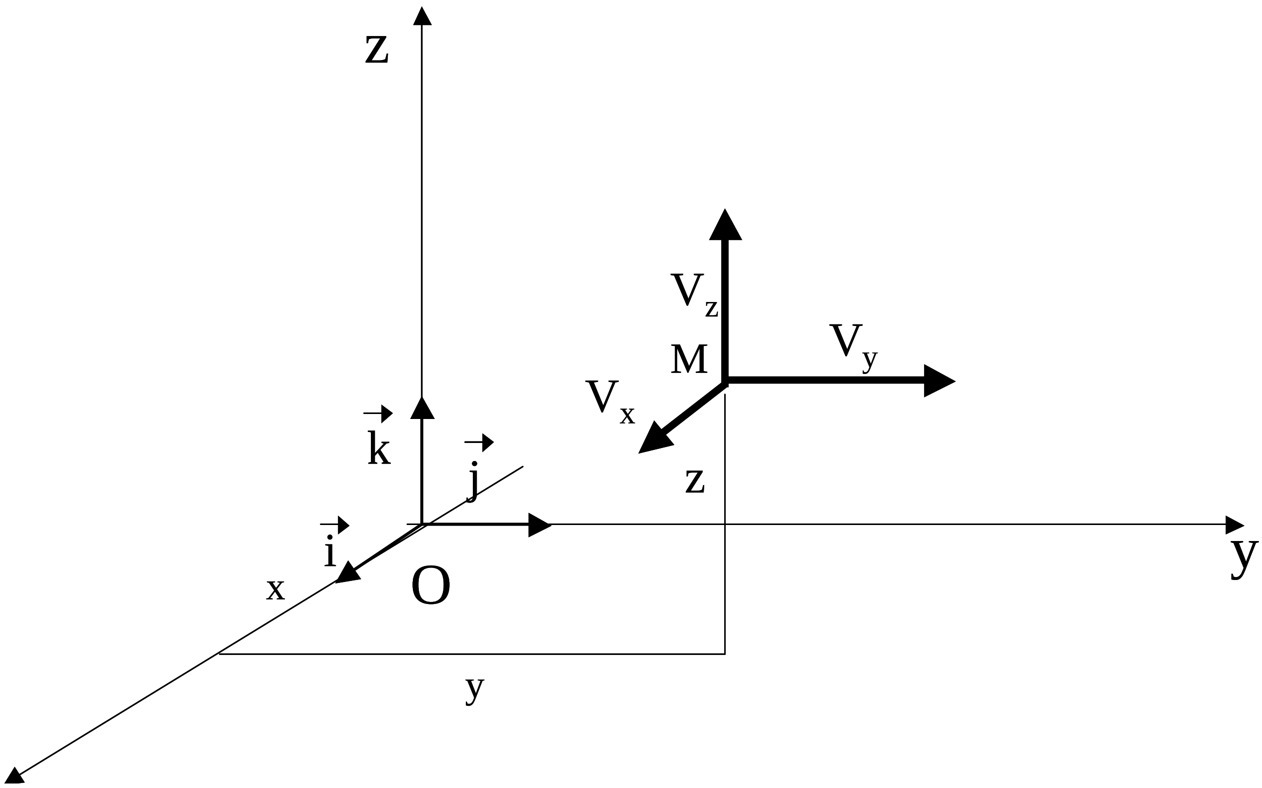
$$d\overrightarrow{OM} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$$

Nous serions évidemment arrivés au même résultat en différentiant directement la position $\overrightarrow{OM}$

Cette relation peut être manipulée à loisir. En particulier, pour obtenir la vitesse, il suffit de la diviser par dt :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}}{dt}$$

Coordonnées cartésiennes: vitesses



qui est plus souvent écrite sous la forme:

$$\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}.\vec{k}$$

Ou encore avec

$$\boxed{V_x = \frac{dx}{dt} \qquad V_y = \frac{dy}{dt} \qquad V_z = \frac{dz}{dt}}$$

qui sont donc simplement les trois scalaires représentant les 3 composantes de la vitesse:

$$\boxed{\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}}$$

Accélération

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Même démarche, nous calculons d'abord la variation de vitesse :

$$d\vec{V} = dV_x.\vec{i} + dV_y.\vec{j} + dV_z.\vec{k}$$

En divisant par dt on obtient l'accélération $\vec{\Gamma}$:

$$\vec{\Gamma} = \frac{dV_x.\vec{i} + dV_y.\vec{j} + dV_z.\vec{k}}{dt}$$ et, en posant

$$\boxed{\Gamma_x = \frac{dV_x}{dt} \qquad \Gamma_y = \frac{dV_y}{dt} \qquad \Gamma_z = \frac{dV_z}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \Gamma_x\vec{i} + \Gamma_y\vec{j} + \Gamma_z\vec{k}}$$

Comme pour les positions et les vitesses, l'accélération est donc simplement la somme des composantes suivant chacun des axes.

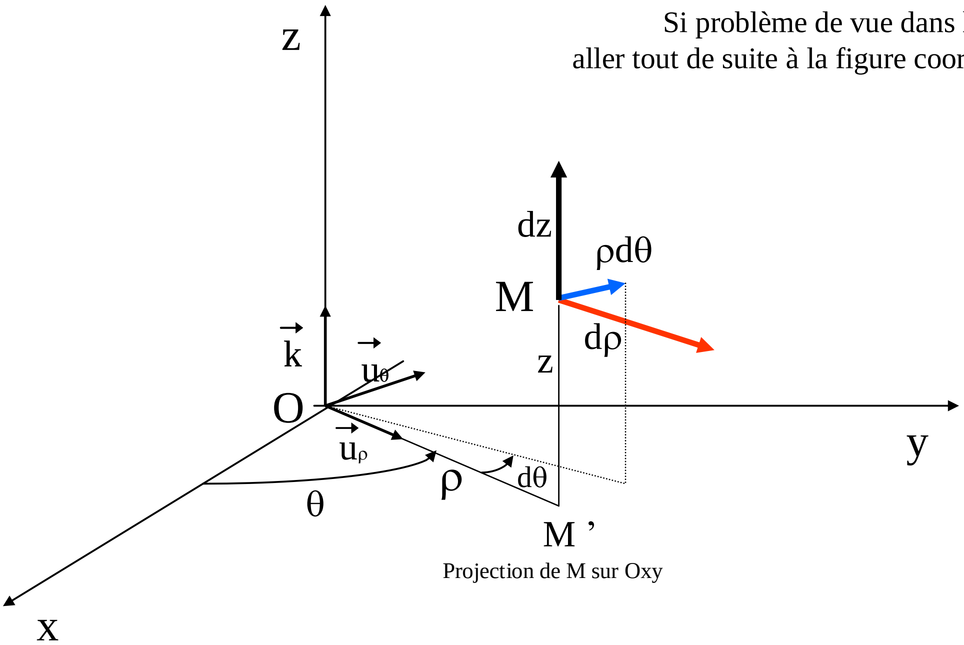
Remarque

$\Gamma_x = \frac{dV_x}{dt}$ s'écrit aussi $\frac{d^2x}{dt^2}$ etc …

En règle générale, il faut éviter les dérivées secondes, quitte à définir des grandeurs intermédiaires, comme V_x, qui ont souvent un sens physique clair.

Coordonnées cylindriques: déplacements

Si problème de vue dans l'espace,
aller tout de suite à la figure coordonnées polaires



Projection de M sur Oxy

4.2 Coordonnées cylindriques (et polaires)

Ces coordonnées particularisent un axe: ici, et souvent, ce sera z (voir figure). Elles seront fréquemment utilisées lorsqu'il existe une rotation autour d'un axe.
Ce système s'appuie sur un système orthonormé Oxyz fixe dans le repère.

Vecteurs unitaires

Ici $\vec{k}$ est fixe, comme en coordonnées cartésiennes mais il n'en est pas de même pour les deux autres vecteurs qui dépendent de la position du point M (voir figure).

$\overrightarrow{u_\rho}$ selon OM', projection normale de OM sur Oxy, repéré par rapport à un axe origine, Ox par exemple, par un angle θ.

$\overrightarrow{u_\theta}$ dans le plan Oxy, perpendiculaire à $\overrightarrow{u_\rho}$ donc lui aussi mobile. Il est obtenu par rotation de $\overrightarrow{u_\rho}$ dans le sens des θ croissants.

Vous vérifierez que $\vec{k} = \overrightarrow{u_\rho} \wedge \overrightarrow{u_\theta}$

Position

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$

ρ : distance à l'axe, varie généralement de 0 à + ∞, mais il est possible traiter un problème avec $-\infty < \rho < \infty$.

θ : azimut (0 à 2π)
z : hauteur (-∞, +∞)
Attention à l'écriture "automatique" parfaitement aberrante (cherchez les erreurs) :
$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + \theta\overrightarrow{u_\theta} + z\vec{k}$

Vitesse

Essayons d'évaluer directement (pour visualiser, voir la figure) un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ lorsque ρ, θ et z varient
Suivant les 3 vecteurs, les déplacements sont dans l'ordre:

$d\rho$ suivant $\overrightarrow{u_\rho}$

$\rho d\theta$ suivant $\overrightarrow{u_\theta}$ **et non pas** $d\theta$ (il faut obtenir une **distance**!)

dz suivant $\vec{k}$

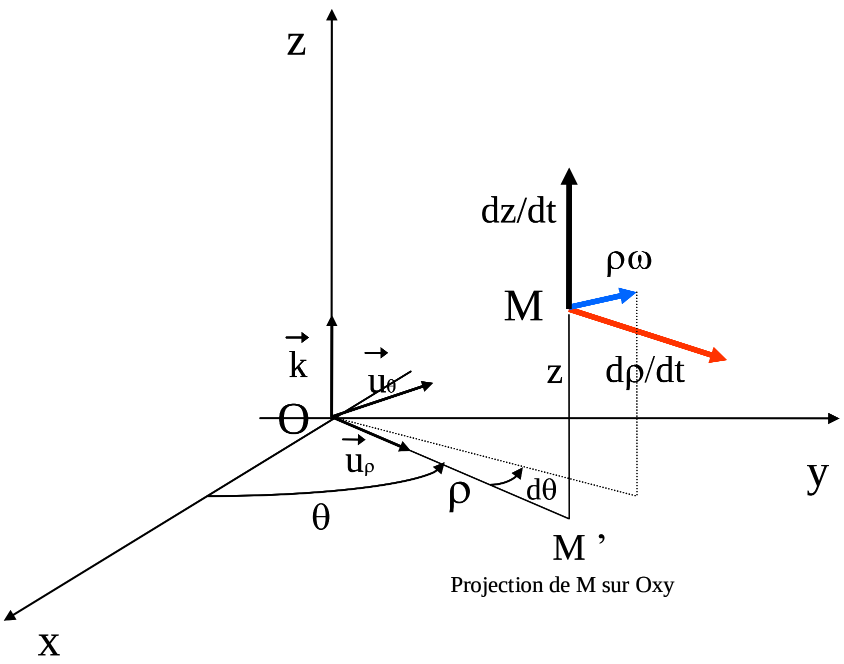
Donc:
$d\overrightarrow{OM} = d\rho.\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\vec{k}$

La vitesse s'écrit donc

$$\vec{V} = \frac{d\rho.\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\vec{k}}{dt}$$

Que nous réécrirons sous la forme:

Coordonnées cylindriques : vitesses



$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$V_\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

$$V_\theta = \rho\omega$$

$$V_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\omega\,\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

où ω est défini par ω = dθ/dt

Pour éviter les dérivées secondes, il est utile de définir:

$V_\rho = \dfrac{d\rho}{dt}$ qui se nomme **vitesse radiale** (suivant le rayon)

$V_z = \dfrac{dz}{dt}$

Finalement

$$\boxed{\vec{V} = V_\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho\omega\,\overrightarrow{u_\theta} + V_z\vec{k}}$$

ρ ω porte le nom de **vitesse orthoradiale (nommée V_θ),** orientée suivant une direction perpendiculaire au rayon**.** A ne pas confondre avec la vitesse tangentielle, qui est justement $\vec{V}$

Remarque 1: nous aurions évidemment obtenu le même résultat en différentiant la position $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$ soit :

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho.\overrightarrow{u_\rho} + \rho.d\overrightarrow{u_\rho} + dz.\vec{k}$$

Qui compte tenu de la relation $d\overrightarrow{u_\rho} = d\theta.\overrightarrow{u_\theta}$ (cf. dérivée d'un vecteur unitaire) redonne bien le déplacement élémentaire précédent.

Remarque 2: vous pouvez vous exercer à retrouver cette relation en dérivant directement $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps, et en utilisant $d\vec{u}/dt = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$, $\vec{\omega}$ étant porté par $\vec{k}$ ($\vec{\omega} = \omega\vec{k}$).

Accélération

Il est tout à fait possible de "visualiser" directement les variations de vitesse; cependant, étant maintenant un peu rodés aux différentielles, nous écrirons directement $d\vec{V}$ à partir de l'expression précédente de $\vec{V}$:

$$d\vec{V} = dV_\rho.\overrightarrow{u_\rho} + V_\rho.d\overrightarrow{u_\rho} + d\rho.\omega.\overrightarrow{u_\theta} + \rho.d\omega.\overrightarrow{u_\theta} + \rho.\omega.\overrightarrow{du_\theta} + dV_z.\vec{k}$$

En tenant compte de $d\overrightarrow{u_\rho} = d\theta.\overrightarrow{u_\theta}$ et $d\overrightarrow{u_\theta} = -d\theta.\overrightarrow{u_\rho}$:

$$\boxed{d\vec{V} = (dV_\rho - \rho.\omega.d\theta)\,\overrightarrow{u_\rho} + (V_\rho.d\theta + d\rho.\omega + \rho.d\omega)\,\overrightarrow{u_\theta} + dV_z\vec{k}}$$

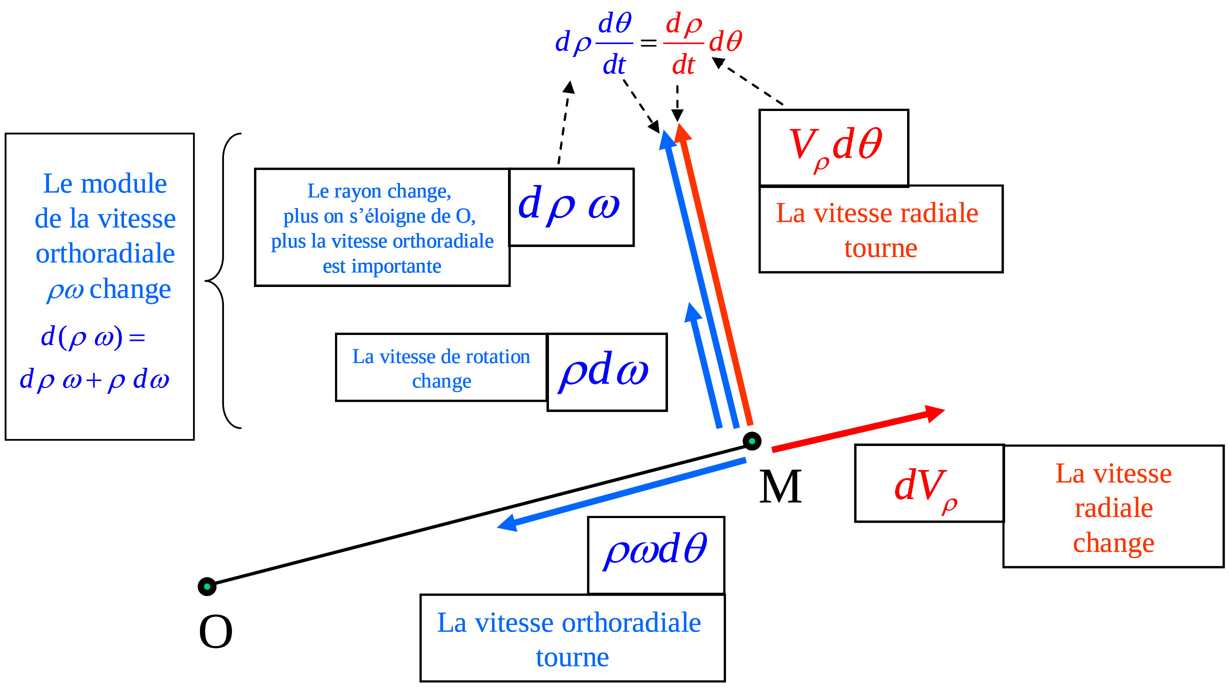
Nous avons ici les 3 composantes de la variation de vitesse.

Le calcul de l'accélération $\vec{\Gamma} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ permet de regrouper 2 termes, et finalement :

$$\boxed{\vec{\Gamma} = (\frac{dV_\rho}{dt} - \rho\omega^2)\,\overrightarrow{u_\rho} + (2V_\rho\omega + \rho\frac{d\omega}{dt})\,\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}}$$

Coordonnées cylindriques sur Oxy (ou polaires): variations des composantes de la vitesse

Chaque vecteur (radial V_ρ et orthoradial ρω) dispose de deux possibilités: changer son module et tourner



$$d\vec{V} = (dV_\rho - \rho\omega d\theta)\,\overrightarrow{u_\rho} + (V_\rho d\theta + d\rho\omega + \rho d\omega)\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Le résultat obtenu pour $\vec{\Gamma}$ n'était pas vraiment intuitif et nous aurons largement l'occasion d'y revenir en TD, atelier….. En vérifier l'homogénéité est un excellent exercice.

Remarque : comme pour la vitesse, vous pouvez aussi vous exercer à retrouver cette relation en dérivant directement $\vec{V}$ par rapport au temps, et en utilisant $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$ etc…

Pour comparer avec certains ouvrages, nous pouvons aussi l'écrire uniquement avec les variables ρ, θ et z :

$$\vec{\Gamma} = (\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho(\frac{d\theta}{dt})^2)\,\overrightarrow{u_\rho} + (2\frac{d\rho}{dt}\omega + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2})\,\overrightarrow{u_\theta} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Examinons chacun des termes de l'accélération **(**une approche numérique sera faite en atelier)

Suivant $\vec{k}$, aucun problème, il s'agit d'une accélération bien connue le long d'un axe.

L'accélération radiale $\overrightarrow{\Gamma_\rho}$, suivant $\overrightarrow{u_\rho}$ $(\Gamma_\rho = \frac{dV_\rho}{dt} - \rho\omega^2)$ comprend 2 termes:

- $\frac{dV_\rho}{dt}$ (ou $\frac{d^2\rho}{dt^2}$)

qui est aussi l'accélération ordinaire le long d'un axe: faire θ=Cte pour comprendre.

- $-\rho\omega^2$

toujours dirigée vers l'origine, appelée accélération centripète: faire ρ=Cte.

L'accélération orthoradiale $\overrightarrow{\Gamma_\theta}$ suivant $\overrightarrow{u_\theta}$ $(\Gamma_\theta = 2V_\rho\omega + \rho\frac{d\omega}{dt})$ comprend, elle aussi, 2 termes :

- $2V_\rho\omega$

appelée accélération de Coriolis, couplage des vitesses de translation et de rotation.
Lapalissade mathématique: $2V_\rho\omega = V_\rho\omega + V_\rho\omega$ **mais**:

Un premier $V_\rho\omega$ est issu du terme $V_\rho d\theta$ dans la différentielle $d\vec{V}$ (cf. $d\vec{V}$). Il est à mettre sur le compte de la rotation ($d\theta$), donc du changement de direction de la vitesse radiale V_ρ.

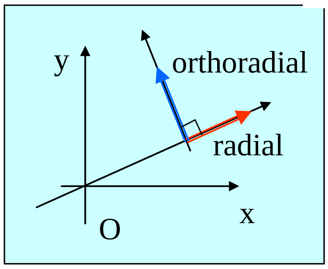
Le deuxième $V_\rho\omega$ est issu du terme $d\rho.\omega$ dans la différentielle $d\vec{V}$. Il est dû à l'augmentation de la vitesse orthoradiale lorsque le rayon augmente.

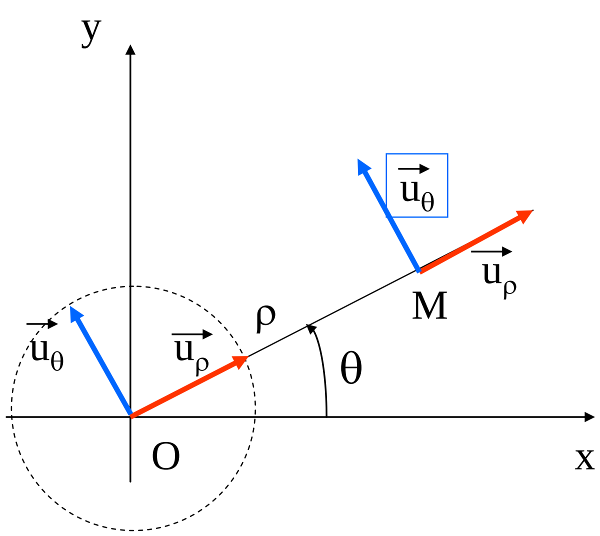
Dans les 2 cas nous avons à faire à $\frac{d\rho\, d\theta}{dt}$, mais une fois dt divise $d\rho$, et l'autre fois $d\theta$.

- $\rho\frac{d\omega}{dt}$

qui se comprend bien avec ρ=Cte : c'est l'accélération liée au fait que la vitesse orthoradiale, varie si la vitesse de rotation ω change.
Notons que dans le cas très particulier d'un mouvement circulaire (ρ=Cte), la vitesse orthoradiale est aussi la vitesse tangentielle (faire un dessin, c'est évident).

Coordonnées polaires





Si besoin (rare) :

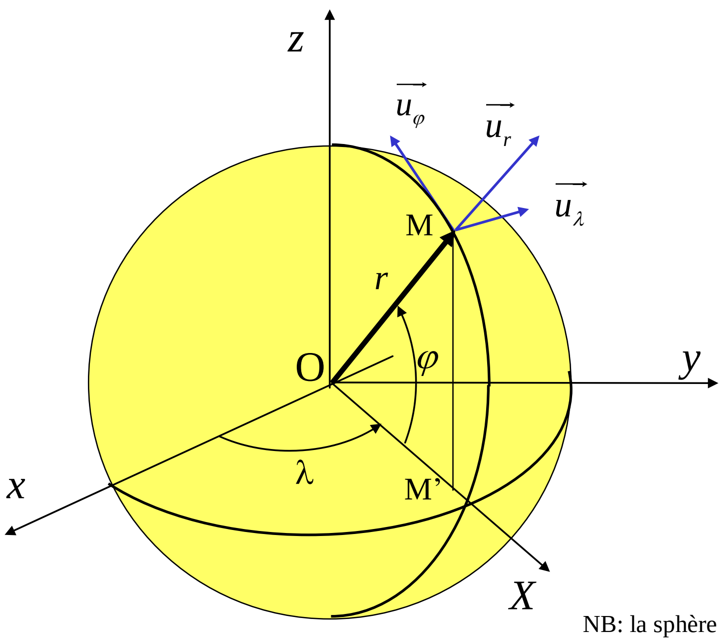
$x = \rho.\cos\theta$

$y = \rho.\sin\theta$

Important, pour évaluer les variations des vecteurs, il est très commode de les ramener au centre:
l'extrémité d'un vecteur unitaire se déplace sur un cercle de rayon 1

NB: dans un repère orthonormé, nous représentons très généralement les vecteurs unitaires à l'origine, non?

Coordonnées sphériques



A 3 dimensions,
en coordonnées sphériques,
le globe terrestre s'impose:

r : rayon

$\vec{u}_r$: verticale

λ : longitude

$\vec{u}_\lambda$: vers l'Est

φ : latitude

$\vec{u}_\varphi$: vers le Nord

NB: la sphère est destinée à rendre plus tangible
la disposition des vecteurs.
Il est bien évident que son rayon r est variable.

Coordonnées polaires.

Elles sont un cas particulier des coordonnées cylindriques (cf. fig.).
C'est un repère à 2 dimensions où les variables sont ρ et θ.
Elles reviennent à prendre un repère cylindrique et à faire:
$z = Cte$ ou plus simplement $z = 0$, ainsi évidemment que $V_z = 0$ et $\Gamma_z = 0$.

Dans ce cas, et c'est très rapide, vous pouvez utiliser la variable complexe, avec $Z = \rho\, e^{i\theta}$.

4.3 Coordonnées sphériques.

Ces coordonnées, comme les cylindriques particularisent un axe, z en général, et seront utilisées lorsque le système étudié présente un ou plusieurs axes de rotation (cf. fig.)
Aucun des vecteurs unitaires de la base n'est fixe dans le repère, ils dépendent tous de la position du point M
Ce système s'appuie lui aussi sur un système orthonormé Oxyz fixe dans le repère.

Vecteurs unitaires
$\overrightarrow{u_r}$ selon $\overrightarrow{OM}$
$\overrightarrow{u_\lambda}$ perpendiculaire au plan défini par Oz et OM et perpendiculaire à $\overrightarrow{u_r}$, obtenu par une rotation dans le sens des λ croissants, dirigé vers l'Est
$\overrightarrow{u_\varphi} = \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\lambda}$, dans le plan défini par Oz, OM, dirigé vers le Nord

Position

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\, \overrightarrow{u_r}}$$

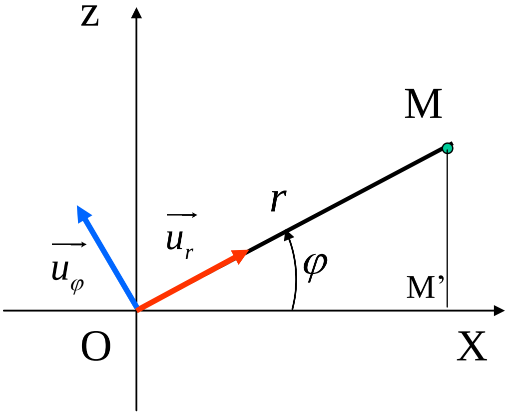
La position est définie très simplement par un seul vecteur! Ceci se paie par des vecteurs de base plus complexes qu'en coordonnées cylindriques, et a fortiori cartésiennes.
r: distance à l'origine, varie généralement de 0, à $+\infty$, mais il est possible de traiter un problème avec $-\infty < r < \infty$.
λ : longitude (0 à 2π, ou -π à +π)
φ : latitude, varie généralement de –π/2 à +π/2, mais on peut utiliser une amplitude de 2π, pour traiter l'orbite du satellite Spot Image par exemple.

Ce sont typiquement les grandeurs utilisées pour se repérer sur terre, donc n'hésitez pas à consulter … votre globe terrestre. La co-latitude, habituelle chez les physiciens, $(= \pi/2 - \varphi)$ est le complément de la latitude des géographes.

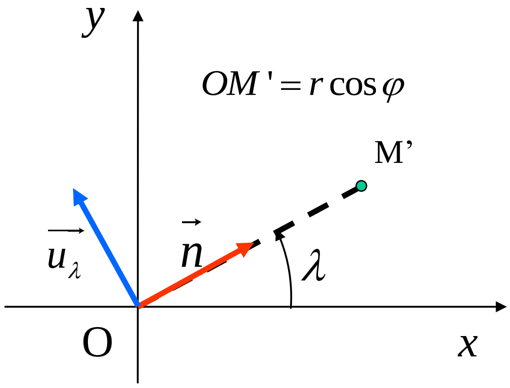
Vitesse

Essayons encore d'évaluer directement, en visualisant sur un globe terrestre par exemple, un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$, lorsque r, λ et φ varient.

Plan méridien



Plan équatorial



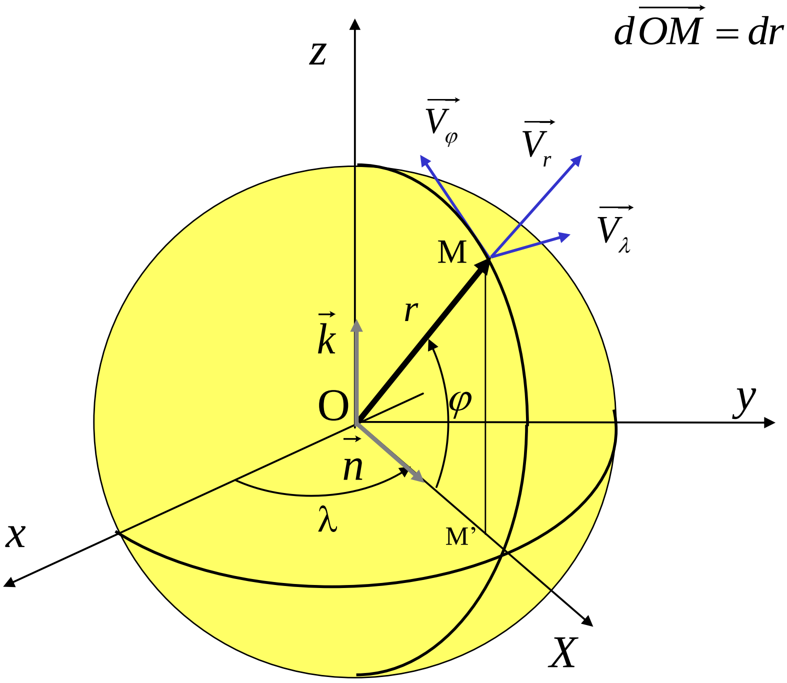
Si besoin (rare) :

$$x = r.\cos\varphi.\cos\lambda$$

$$y = r.\cos\varphi.\sin\lambda$$

$$z = r.\sin\varphi$$

Coordonnées sphériques: déplacements élémentaires et vitesses



$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + r\cos\varphi\, d\lambda.\overrightarrow{u_\lambda} + rd\varphi.\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$V_r = \frac{dr}{dt}$$

$$V_\lambda = \frac{r\cos\varphi\, d\lambda}{dt}$$

$$V_\varphi = \frac{rd\varphi}{dt}$$

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr.\overrightarrow{u_r} + r\,d\varphi.\overrightarrow{u_\varphi} + r\cos\varphi\,d\lambda.\overrightarrow{u_\lambda}}$$

Relation importante à bien assimiler. Attention, le $\cos\varphi$ est souvent oublié. Il signifie simplement qu'il est plus court de faire le "tour" du monde près d'un pôle qu'à l'équateur. Attention aussi de ne pas permuter sinus et cosinus. Si vous n'êtes pas sûr, le mieux est d'essayer avec 0 et π/2.
La vitesse s'en déduit immédiatement :

$$\boxed{\vec{V} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\cos\varphi\frac{d\lambda}{dt}\overrightarrow{u_\lambda} + r\frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\varphi}}$$

Deuxième méthode :
Il est ici particulièrement instructif de calculer directement la vitesse $\vec{V}$ à partir de $d\overrightarrow{OM}/dt$, en utilisant la relation générale $d\vec{u}/dt = \overrightarrow{\omega_{total}} \wedge \vec{u}$. Prendre garde au vecteur rotation. Ici, il représente la somme vectorielle des deux rotations possibles :

$$\overrightarrow{\omega_{total}} = \frac{d\lambda}{dt}\vec{k} - \frac{d\varphi}{dt}\overrightarrow{u_\lambda}$$

attention au signe moins … qui vous sera confirmé par le tire-bouchon.
L'exercice est fortement recommandé.

Accélération

Les développements sont un peu longs et nous ne donnons ici que l'expression finale. Nous effectuerons quelques calculs d'accélération dans des cas particuliers en TD.
Encore une fois, il est tout à fait possible de "visualiser" directement les variations de la vitesse: à vos globes terrestres. Sinon, il faut utiliser à nouveau $d\vec{u}/dt = \overrightarrow{\omega_{total}} \wedge \vec{u}$.
Nous poserons pour simplifier l'écriture :

$$\boxed{V_r = \frac{dr}{dt} \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \Omega = \frac{d\lambda}{dt}}$$

L'accélération s'écrit alors :

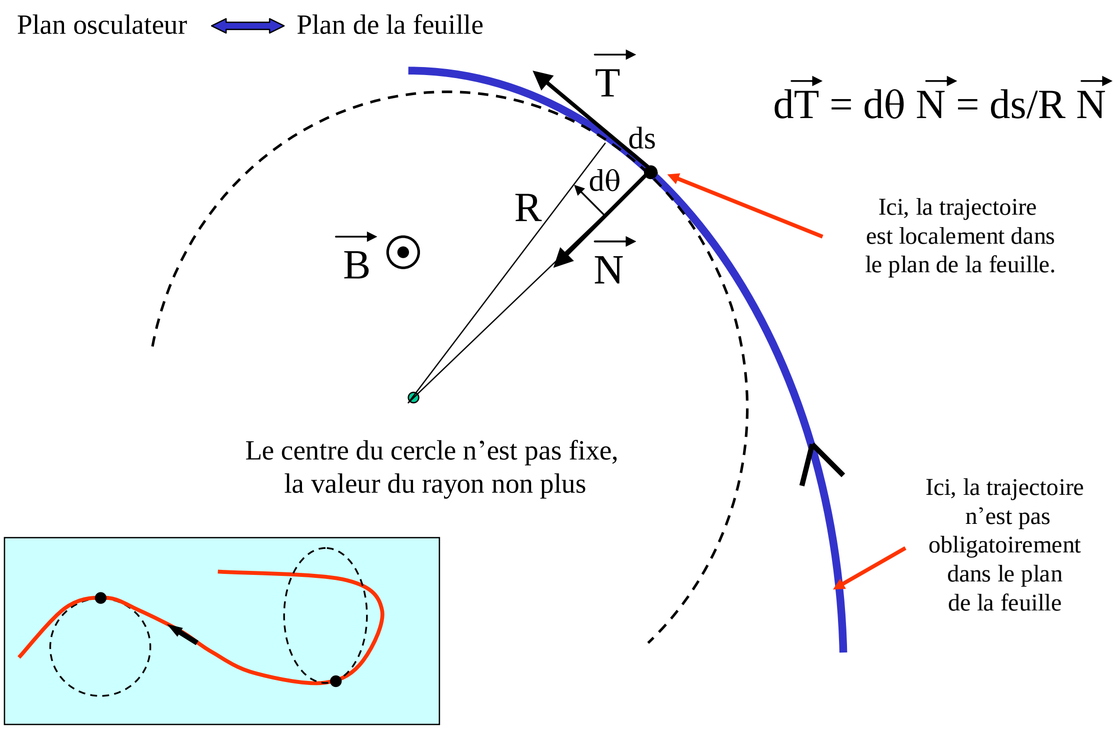
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\Gamma} = &[\frac{dV_r}{dt} - r\,\omega^2 - r\cos\varphi\;\;\Omega^2\cos\varphi]\,\vec{u}_r + \\ &[r\frac{d\omega}{dt} + 2V_r\;\omega + r\cos\varphi\;\;\Omega^2\sin\varphi]\,\overrightarrow{u_\varphi} + \\ &[r\cos\varphi\frac{d\Omega}{dt} + 2V_r\cos\varphi\;\;\Omega - 2\,r\sin\varphi\;\omega\Omega]\,\overrightarrow{u_\lambda}\end{aligned}}$$

Avec $\varphi = 0$, ou $\lambda = Cte$, nous retrouvons les coordonnées polaires.
Certains termes sont très simples à comprendre : essayez en bloquant successivement 2 des 3 variables r, φ et λ, puis en fixant une seule variable.

En définissant un nouveau vecteur unitaire $\vec{n}$ perpendiculaire à $\vec{k}$, et situé dans le plan méridien (cf. figure), deux termes se regroupent et s'interprètent alors très facilement comme une accélération centripète :

$$-r\cos\varphi\,\Omega^2\cos\varphi\,\vec{u}_r + r\cos\varphi\,\Omega^2\sin\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi} = -r\cos\varphi\,\Omega^2\left(\cos\varphi\,\vec{u}_r - \sin\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}\right) = -(r\cos\varphi)\Omega^2\,\vec{n}$$

Repère de Frenet



4.4 Coordonnées curvilignes, ou repère de Frenet.

Il est à noter que système de coordonnées et repère sont ici confondus.

Définition du repère

C'est un repère local uniquement défini à partir des caractéristiques de la trajectoire C au point M. Certaines relations et propriétés s'expriment très simplement dans ce repère.

A un instant donné, il est toujours possible de définir un **plan osculateur** qui contient localement la trajectoire C du point.
Trois vecteurs unitaires sont alors définis de la manière suivante :
$\vec{T}$: tangent à la trajectoire C, donc dans le plan osculateur, orienté dans le sens du mouvement

$\vec{N}$: normal à $\vec{T}$, et donc à la trajectoire C, lui aussi dans le plan osculateur. Il est défini par la relation, maintenant classique, de la différentielle d'un vecteur unitaire qui tourne dans un plan:
$\boxed{d\vec{T} = d\theta.\vec{N}}$

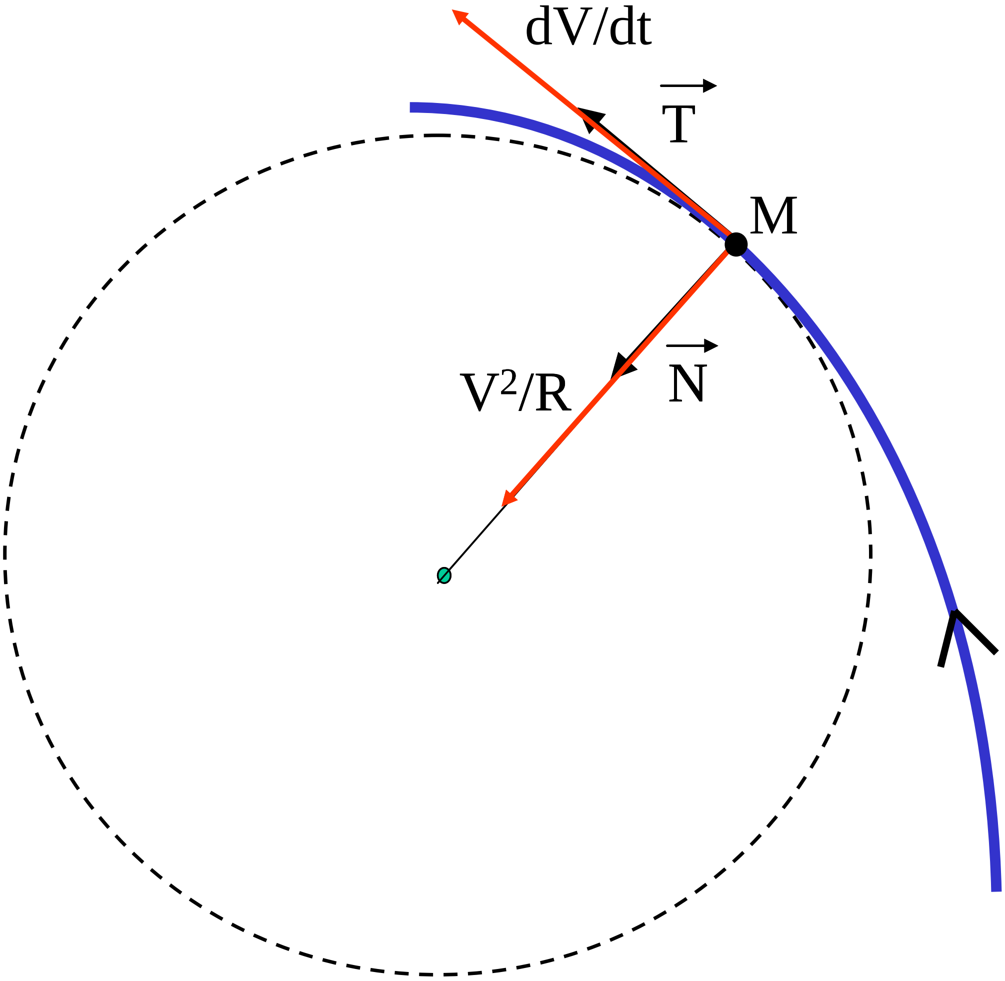
En définissant l'abscisse curviligne s, distance mesurée sur la trajectoire à partir d'une origine quelconque, et R le rayon de courbure de C au point M, l'angle $d\theta$ peut s'écrire
$ds = R\,d\theta$ d'où la définition plus classique :

$\boxed{\frac{\vec{N}}{R} = \frac{d\vec{T}}{ds}}$ définition de $\vec{N}$

$\vec{N}$ est dirigé vers la concavité de la courbe : par exemple si C est un cercle, $\vec{N}$ est dirigé vers son centre.

$\vec{B}$ est le vecteur binormal, qui respecte:
$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$
$\vec{B}$ est normal au plan osculateur puisqu'il est normal à $\vec{T}$ et $\vec{N}$, qui sont tous les deux dans le plan osculateur.

Repère de Frenet: accélération



Position

La position est par définition confondue avec l'origine du système

Vitesse

Le vecteur $\vec{T}$ étant tangent à la trajectoire, dans le sens du déplacement, la vitesse s'écrit de manière évidente: $\vec{V} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$ soit avec $V = \frac{ds}{dt}$ qui représente la vitesse, forcément >0.

$$\boxed{\vec{V} = V\vec{T}}$$

Elle n'a donc qu'une composante, qui est la vitesse tangentielle.

NB : la distance totale parcourue entre t_1 et t_2 se déduit immédiatement de $V = \frac{ds}{dt}$:

$$ds = Vdt \qquad ou \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} Vdt$$

Accélération

La variation de vitesse s'écrit aisément:

$$d\vec{V} = dV.\vec{T} + V.d\vec{T}$$

D'où l'accélération,

$$\vec{\Gamma} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + V\frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

et, en utilisant la définition de $\vec{N}$ pour exprimer $d\vec{T}$:

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \frac{dV}{dt}\vec{T} + \frac{V^2}{R}\vec{N} \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}}$$

L'accélération est située dans le plan osculateur, et n'a donc aucune composante suivant le vecteur binormal $\vec{B}$.

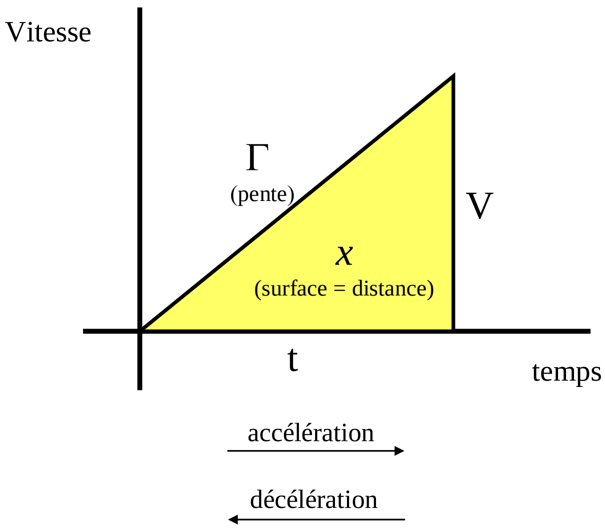
$\frac{dV}{dt}$ est l'accélération tangentielle (et non pas orthoradiale, sauf cas particulier)

$\frac{V^2}{R}$ l'accélération normale

En prenant l'exemple particulier d'une trajectoire circulaire, vous pouvez essayer de calculer l'accélération dans un système cylindrique puis dans un repère de Frenet et comparer les deux expressions.

Le repère de Frenet est donc un repère qui conduit à une expression très simple de la vitesse et de l'accélération, mais dont l'origine et tous les vecteurs de base sont fonction du point M. Il ne permet pas de décrire directement la trajectoire, mais est très commode pour en exprimer certaines propriétés.

Mouvement rectiligne, accélération constante: le triangle magique



De simples considérations de pente et de surface du triangle conduisent immédiatement à :

$V = \Gamma \,.\, t$

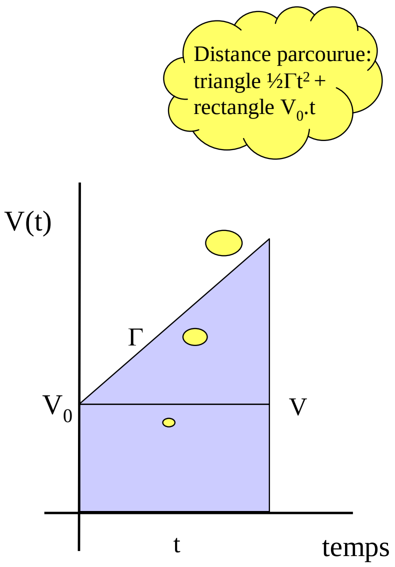
$x = ½\ V.t$

et donc à:

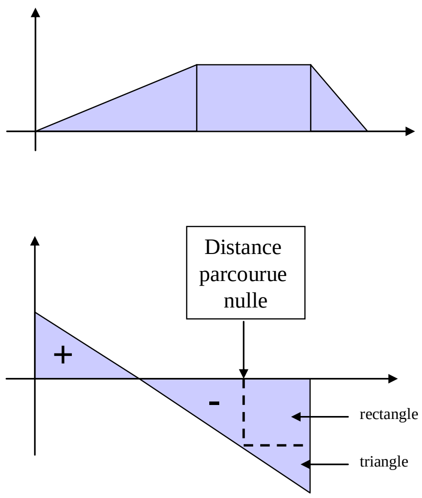
$x = ½\ \Gamma.t^2$

$V^2 = 2\,x\,\Gamma$

Accélération constante : faire parler les figures V(t)



A quels cas simples correspondent ces 2 graphes V(t)



5. Conclusion

Nous avons maintenant à notre disposition plusieurs systèmes de coordonnées nous permettant d'exprimer la position la vitesse et l'accélération. Ceci nous aidera plus tard à exprimer la relation fondamentale de la dynamique dans un repère Galiléen. A partir de cette relation, nous pourrons exprimer la vitesse et la trajectoire si les forces sont connues, ou, à l'inverse, les forces si la trajectoire est connue.

A ce stade, nous avons tous les éléments nécessaires et suffisants pour traiter un problème de mécanique. Les notions développées par la suite, moment cinétique, travail, énergie cinétique, potentielle et mécanique, ne sont pas indispensables, mais elles permettent dans certains cas de simplifier les résolutions.

Annexe: différentielles de scalaires, vecteurs...

Fonction scalaire d'une variable (t)

$x = \tfrac{1}{2} g t^2$

$x + \delta x = \tfrac{1}{2} g (t + \delta t)^2 = \tfrac{1}{2} g [t^2 + 2t.\delta t + (\delta t)^2]$

Par soustraction:

$\delta x = g.t.\delta t + \tfrac{1}{2} g (\delta t)^2 \qquad ou \qquad \delta x / \delta t = g.t + \tfrac{1}{2} g.\delta t$

Lorsque δt tend vers zéro (noté alors dt en mathématiques), le deuxième terme ($\tfrac{1}{2} g.\delta t$), appelé terme de second ordre disparaît (revoir la notion de dérivée si nécessaire). D’où:

$dx/dt = g.t \qquad ou \quad dx = g.t.dt$

Dans les exemples qui suivent, la démarche est strictement la même.

Fonction scalaire de deux variables (surface d'une table)

$S = a.b$

$S + \delta S = (a + \delta a)(b + \delta b) = a.b + \delta a.b + a.\delta b + \delta a.\delta b$

$dS = (da).b + a.(db) \qquad car\ \delta a.\delta b\ est\ du\ second\ ordre$

Produit d'un scalaire par un vecteur

$\vec{C} = a.\vec{B}$

$\vec{C} + \delta\vec{C} = (a + \delta a)(\vec{B} + \delta\vec{B}) = a.\vec{B} + \delta a.\vec{B} + a.\delta\vec{B} + \delta a.\delta\vec{B}$

$d\vec{C} = (da).\vec{B} + a.(d\vec{B})$

Produit scalaire de deux vecteurs

$C = \vec{A}.\vec{B}$

$C + \delta C = (\vec{A} + \delta\vec{A})(\vec{B} + \delta\vec{B}) = \vec{A}.\vec{B} + (\delta\vec{A}).\vec{B} + \vec{A}.(\delta\vec{B}) + (\delta\vec{A}).(\delta\vec{B})$

$dC = (d\vec{A}).\vec{B} + \vec{A}.(d\vec{B})$

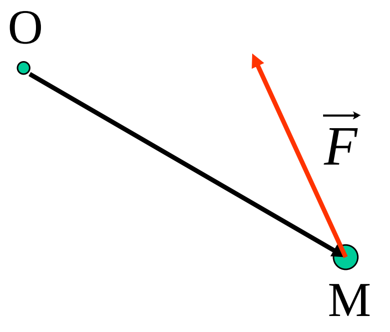
Produit vectoriel

$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

$\vec{C} + \delta\vec{C} = (\vec{A} + \delta\vec{A}) \wedge (\vec{B} + \delta\vec{B}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + (\delta\vec{A}) \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge (\delta\vec{B}) + (\delta\vec{A}) \wedge (\delta\vec{B})$

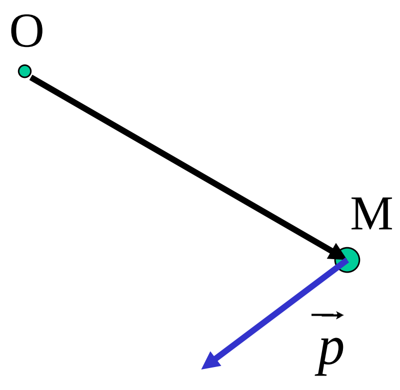
$d\vec{C} = (d\vec{A}) \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge (d\vec{B})$

Moment d'une force



$$\overrightarrow{m_f} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Moment cinétique



$$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$$

Rappel : $\vec{p} = m\vec{V}$

IV. Moments
Théorème du moment cinétique
Application : mouvement à force centrale

1. Moment d'une force

Le moment d'une force $\vec{F}$, appliquée en un point M, par rapport à un point O, <u>est défini par</u> :

$\overrightarrow{m_f} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$	moment d'une force **(1)**

L'unité SI est le m.N : attention, une énergie s'exprime aussi en m.N, ou N.m (ou Joule), mais les deux grandeurs ne sont pas de même nature: l'énergie est un scalaire, tandis que le moment d'une force est un vecteur. Ne pas écrire mN qui signifierait milliNewton.
Pour un segment $\overrightarrow{OM}$ et une force $\vec{F}$ donnés, le moment est maximum lorsque $\overrightarrow{OM}$ est perpendiculaire à $\vec{F}$, et nul s'ils sont colinéaires.
Attention, le moment dépend de l'origine O choisie.

Le moment $\overrightarrow{m_f}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}$ et à $\vec{F}$, et pour le sens, à vos tire-bouchons, ou boulons à pas normal (à droite).

Exemple de moment : moment de serrage d'un boulon, égal au produit de la force par le bras de levier; les clés dynamométriques sont graduées en m.N (ou m.daN). En fait, dans le langage commun, on parle souvent de couple, ce qui est inexact, voir en fin de chapitre le moment d'un couple.

2. Moment cinétique

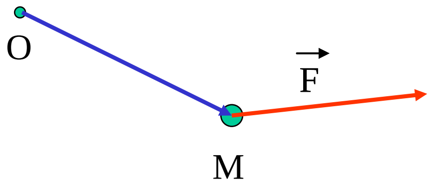
Le moment cinétique d'une masse de quantité de mouvement $\vec{p}$, située au point M, par rapport à un point O, <u>est défini par</u> :

$\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$	moment cinétique **(2)**

Son unité est le kg.m^2.s^{-1}. Bien que compliquée, elle ne porte pas de nom spécifique.
Son orientation est liée au sens de rotation autour du point O (cf. tire-bouchon).

Moment d’une force

Définition vectorielle

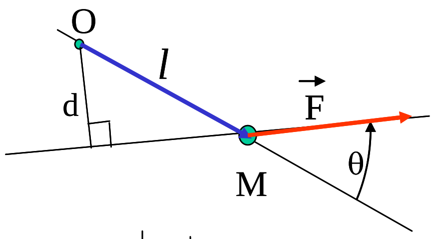


$$\vec{m}_f = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Si $\vec{OM}$ et $\vec{F}$ sont dans le plan de la feuille, le moment est perpendiculaire à la feuille, ici dirigé vers le lecteur

Module

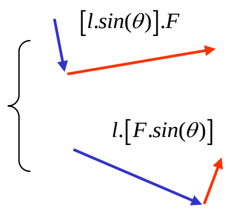
$$\left|\vec{m}_f\right| = l \,.\, F \,.\, \sin(\theta)$$



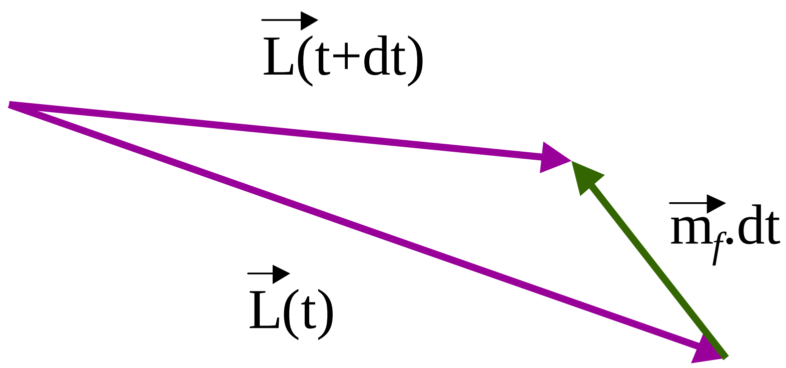
$$\left|m_f\right| = d \,.\, F$$

d: bras de levier

Il existe en fait 2 possibilités de projection:



Théorème du moment cinétique



Comme le moment d'une force, le moment cinétique dépend de l'origine O, que l'on choisira en fonction du système à étudier.
Il est nul si $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{p}$ sont colinéaires.

Dans un mouvement de rotation suivant un cercle de centre O, le moment cinétique/O est égal au produit : rayon * masse * vitesse. Il est perpendiculaire au plan du cercle et le tire bouchon vous donnera son sens.

3. Théorème du moment cinétique

Il établit un lien entre la variation du moment cinétique et le moment de la force (tous deux exprimés par rapport au <u>même</u> point O). Ce théorème est l'équivalent du principe fondamental de la dynamique qui établit un lien entre la variation de la quantité de mouvement et la force appliquée. **(2)** =>

$$d\vec{L} = d\overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} + \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{p}$$

Or $d\overrightarrow{OM} = \vec{V}dt$ et, comme $\vec{p} = m\vec{V}$, le premier produit vectoriel est nul.

Dans le deuxième produit, $d\vec{p} = \vec{F}dt$ (principe fondamental) et nous retrouvons donc la définition du moment d'une force **(1).**

D'où le théorème du moment cinétique, valable même si la masse n'est pas constante:

$d\vec{L} = \overrightarrow{m_f}\, dt$	théorème du moment cinétique	**(3)**

La conclusion est donc que l'application pendant dt d'une force $\vec{F}$, qui présente un moment $\overrightarrow{m_f}$ par rapport à un point O, produit une variation $d\vec{L} = \overrightarrow{m_f}dt$ du système.

Attention:

- **le principe fondamental a été utilisé et il est donc nécessaire de se placer dans un référentiel Galiléen.**
- **pour que $\vec{V}$ soit la vitesse du point M ($d\overrightarrow{OM} = \vec{V}dt$), il faut évidemment que le point O soit FIXE dans le référentiel choisi.** Mais ce point n'est pas forcément l'origine du repère**.**

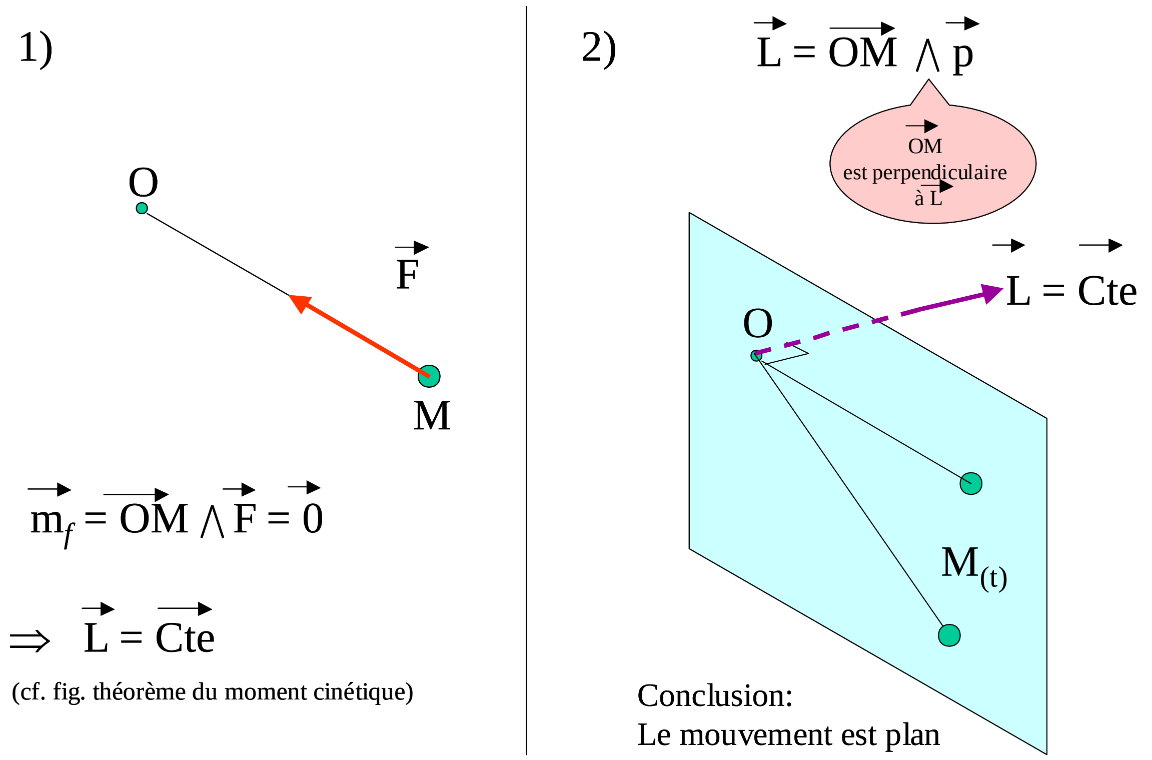
Sous sa forme dérivée, ce théorème devient:

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{m_f}$	théorème du moment cinétique	**(4)**

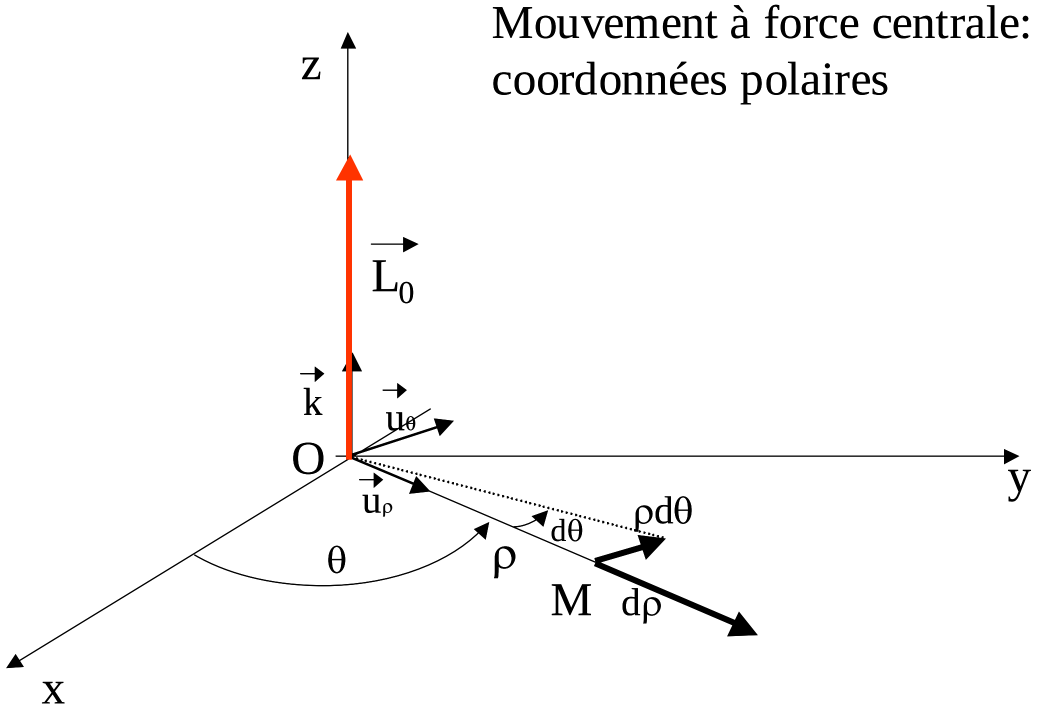
Il est extrêmement pratique pour étudier les problèmes de rotation autour d'un point. L'application la plus spectaculaire est sans doute l'effet gyroscopique (démonstration avec une roue de vélo en amphi). Nous en donnons plus loin une autre très belle illustration avec le mouvement à force centrale.

Remarquez ici la différence entre un principe (hypothèse de travail vérifiée par l'expérience, comme le principe fondamental de la dynamique) et un théorème, comme le théorème du moment cinétique que nous avons démontré, à partir du PFD et de propriétés d'opérateurs mathématiques.

Mouvement à force centrale



Mouvement à force centrale: coordonnées polaires



4. Application : mouvement à force centrale

Prenons l'exemple d'un satellite. La force de gravitation qui le contrôle passe en permanence par le centre de la terre, que l'on supposera immobile. C'est l'exemple type d'un mouvement à force centrale : un chapitre spécial sera consacré à ces mouvements en fin de cours.

Dans un tel mouvement, en prenant judicieusement (nous sommes libres) pour point O celui par où la force passe en permanence, ici le centre de la terre, le moment est nul car $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont alors colinéaires.
Donc d'après **(1)** $\overrightarrow{m_f} = \vec{0}$ ce qui implique selon **(3)** que $d\vec{L} = \vec{0}$ => $\vec{L} = \overrightarrow{Cte} = \overrightarrow{L_0}$

$\overrightarrow{L_0}$ est un **vecteur constant** (direction, sens et module) défini, par exemple, par les conditions initiales $\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM_0} \wedge m\overrightarrow{V_0}$

$\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = \overrightarrow{L_0}$	Mouvement à force centrale passant par O	**(5)**

Conséquences :

1/ Le produit vectoriel **(5)** implique que $\overrightarrow{OM}$ soit toujours perpendiculaire au **vecteur** $\overrightarrow{L_0}$, ***constant***. Si O est supposé immobile, une première conséquence est que **<u>la trajectoire est contenue dans un plan</u>,** perpendiculaire à $\overrightarrow{L_0}$ **.**

2/ Plaçons nous dans ce plan.
En choisissant un système de coordonnées cylindrique (plan z = 0) nous pouvons écrire :

$$\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = \rho\overrightarrow{u_\rho} \wedge m(\frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{\rho d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}) = m\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\rho} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = m\rho^2 \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

Le moment cinétique étant perpendiculaire au plan de la trajectoire il s'écrit:

$$\overrightarrow{L_0} = L_0\vec{k}$$

Donc nécessairement:

$$m\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = L_0$$

La deuxième conclusion est donc que le produit $\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$ $(= \rho^2\omega)$ est constant

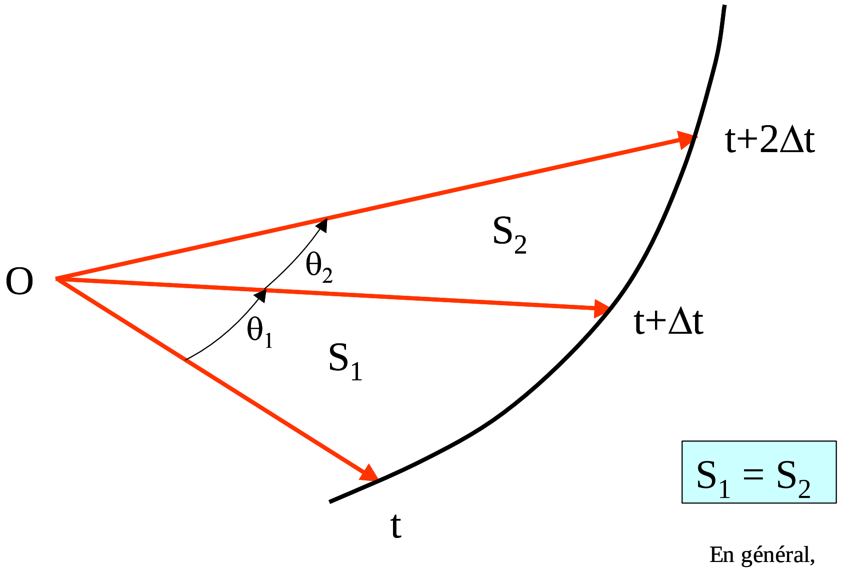
Cette loi s'appelle la loi des aires car:

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C \qquad => \qquad \rho^2 d\theta = C.dt \qquad \text{où } C \text{ est une constante}$$

Or $\frac{1}{2}\rho^2 d\theta = dS$ = surface balayée par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant dt .
(cf. figure Loi des aires dans le chapitre Résolution du problème des 2 corps)
D'où la conclusion:

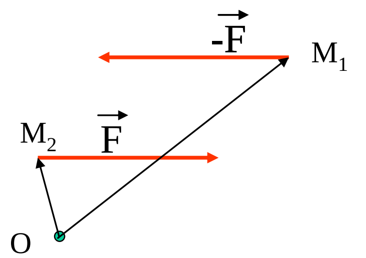
$$dS = (C/2).dt \qquad \text{soit encore} \qquad S = (C/2).t + C'$$

Loi des aires

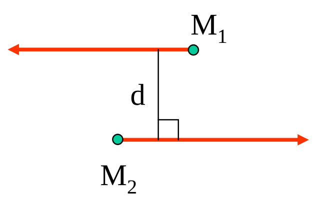


En général,
θ_1 est différent de θ_2

Moment d'un couple

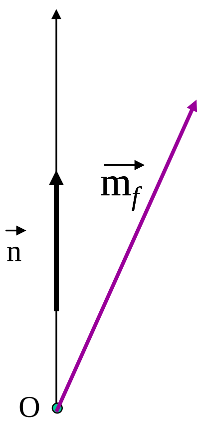


$$\vec{m}_f = \vec{OM_1} \wedge -\vec{F} + \vec{OM_2} \wedge \vec{F} = \vec{M_1M_2} \wedge \vec{F}$$



$$m_f = F \, . \, d$$

Moment force / axe



$$\text{moment / axe} = \vec{m_f} \, . \, \vec{n}$$

Si scalaire >0, le moment entraîne
un mouvement dans le sens
du tire bouchon lié à $\vec{n}$.

La surface balayée par le rayon vecteur est une fonction linéaire du temps.

La loi est connue sous la forme:
les aires balayées pendant des intervalles de temps égaux sont égales
et elle constitue la deuxième loi de Kepler.

5. Extensions : moment d'un couple, et moment par rapport à un axe

5.1 Moment d'un couple

Un couple est constitué de 2 forces égales et opposées (même module, même direction, de sens opposé, mais pas colinéaires). Son moment est la somme de chacun des moments:

$$\overrightarrow{m_f} = \overrightarrow{OM_1} \wedge (-\vec{F}) + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F} \qquad \text{soit :}$$

$$\overrightarrow{m_f} = \overrightarrow{M_1O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F} \qquad \text{qui s'écrit finalement :}$$

$$\overrightarrow{m_f} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F}$$

Contrairement au moment d'une force, celui d'un couple est donc indépendant de l'origine choisie. Il est nul si les forces sont colinéaires, ce qui se conçoit aisément.

5.2 Moment par rapport à un axe

En mécanique de rotation des solides, ou tout simplement lorsqu'on serre une vis, c'est le moment par rapport à l'axe (de la vis par exemple) qui est la valeur "efficace".
Si le point O est sur cet axe, et si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire de cet axe, le moment "efficace" par rapport à l'axe est donné par le scalaire :

$$\overrightarrow{m_f}.\vec{n}$$

Si le produit scalaire est > 0, le moment engendre une rotation dans le sens du tire-bouchon.

Pour résoudre de petits problèmes, tels que celui du treuil et de sa manivelle, ou de la balance romaine, précisons que, pour qu'un système en rotation autour d'un axe ne soit pas accéléré (entre autres cas, immobile), il faut que la somme des moments, par rapport à cet axe, des forces extérieures appliquées soit nulle.

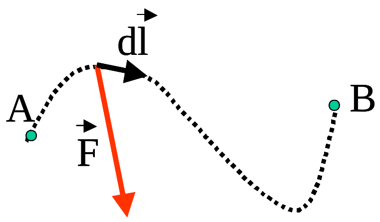
6. Conclusion

Nous avons défini le moment d'une force et le moment cinétique, et démontré le théorème du moment cinétique qui, nous l'avons vu sur le cas particulier de la force centrale, peut conduire très rapidement à des conclusions intéressantes.

Avec les moments se terminent les approches vectorielles de la mécanique. Les futures notions de travail et d'énergie seront uniquement scalaires donc plus faciles à manipuler.

V. TRAVAIL, PUISSANCE, ENERGIE CINETIQUE

Travail



$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

Eviter d'appliquer directement la relation:

$$\cancel{W_A^B = \vec{F} \cdot \vec{AB}}$$

Elle n'est valable que si
- le module,
- la direction
- et le sens

de la force
sont constants,
ce qui est très rarement le cas.

V. Travail, puissance, énergie cinétique

Nous introduisons ici des grandeurs scalaires, à priori plus faciles à manipuler, mais en contrepartie, elles ne donnent généralement pas tous les renseignements. Dans le cadre de ce cours, la seule relation qui permette de résoudre totalement un problème de mécanique est le PFD.

1. Travail d'une force

1.1 Définition différentielle

La définition différentielle du travail W d'une force $\vec{F}$ qui s'exerce sur un mobile qui se déplace de $d\vec{l}$ s'écrit :

$$\boxed{dW = \vec{F}.d\vec{l}}$$

Ce produit scalaire peut-être positif, négatif ou nul. Mathématiquement, cette différentielle s'appelle la circulation élémentaire. L'unité du travail est le Joule (J).

Cette notion de travail est assez subtile, et n'est pas toujours intuitive. Il faut se méfier des approches physiologiques : en effet maintenir un objet pesant à bout de bras demande beaucoup d'efforts et consomme des Joules, mais au sens où nous l'entendons en mécanique, le travail effectué est nul car il n'y a pas de déplacement.

Le travail est dit moteur s'il est positif et résistant s'il est négatif.

1.2 Travail sur un parcours

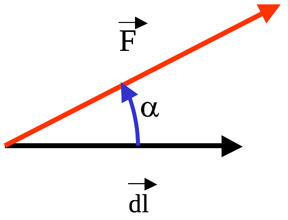
Définition mécanique du travail

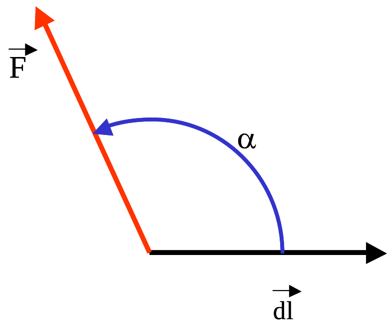
$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$$

Cette expression exprime la circulation (notion mathématique) du vecteur $\vec{F}$ sur un parcours donné qui va de A vers B. Ce travail peut dépendre du trajet suivi et du sens de parcours: c'est le cas pour un marcheur ou un cycliste.

Travail moteur et résistant

$$dW = \vec{F}.\vec{dl}$$



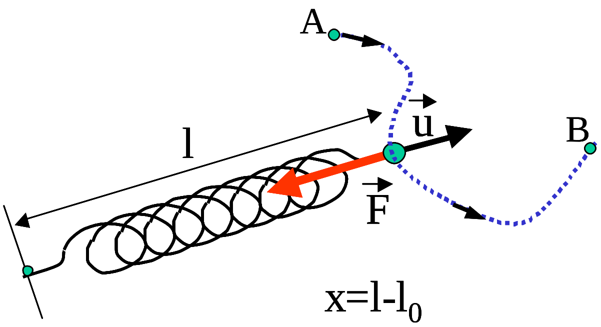


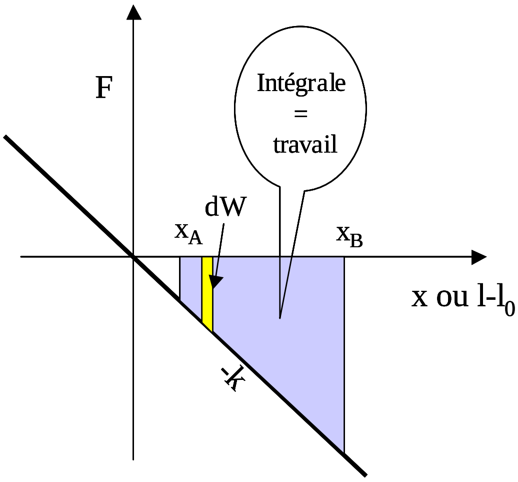
$0 < \alpha < \pi/2$
$dW > 0$
Travail moteur

$\alpha = \pi/2$?

$\pi/2 < \alpha < \pi$
$dW < 0$
Travail résistant

Travail d'un ressort





$$dW = - k\ x\ dx$$

Même si $\vec{u}$ n'est pas constant (cf. texte)

$$W_A{}^B = -\tfrac{1}{2}\, k\,(x_B{}^2 - x_A{}^2)$$

NB:
1/ se calcule très facilement à partir de surfaces de triangles
2/ passer de 0 à x puis de x à 2x n'est pas équivalent :
triangle -> trapèze

1.3 Exemples

Travail de la force magnétique.

$\vec{F} = q.\vec{V} \wedge \vec{B}$

$d\vec{l} = \vec{V}dt$

Il est inutile d'écrire dW car la force et le déplacement sont perpendiculaires, donc le travail élémentaire est nul. Une force magnétique ne travaille pas.

Travail d'un ressort (trajet quelconque).

$\vec{F} = -k(l - l_0)\,\vec{u}$

$\vec{l} = l\vec{u}$ d'où

$d\vec{l} = dl\,\vec{u} + l\,d\vec{u}$

$dW = -k(l - l_0)\,\vec{u}\,(dl\,\vec{u} + l\,d\vec{u}) = -k(l - l_0)(dl + l\,\vec{u}d\vec{u})$

Or (rappel) $(\vec{u})^2 = 1$ => $2\vec{u}.d\vec{u} = 0$ donc :

$dW = -k(l - l_0)dl$

Appelons x l'allongement $l - l_0$: $x = l - l_0$. Ceci ne suppose pas que l'on se déplace suivant un axe x ! c'est un simple changement de variable. Puisque $dx = dl$:

$dW = -kxdx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$

Si nous partons d'un point A où l'allongement est x_A pour aller en B (x_B), le travail s'écrira :

$W_A^B = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$

Le travail est donc indépendant du trajet, il ne dépend que des allongements initiaux et finaux.

NB : cette démonstration est plus simple si l'extrémité du ressort se déplace suivant un axe fixe, mais elle est alors moins générale.

1.4 Cas très particulier de la force constante

Si la force $\vec{F}$ est constante, ce qui est rare :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}\int_A^B d\vec{l}$$

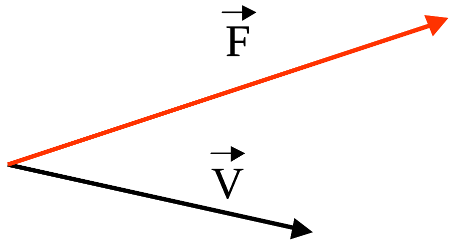
$\int_A^B d\vec{l}$ est tout simplement la somme de tous les déplacements élémentaires qui mènent de A à B. C'est donc $\overrightarrow{AB}$.

$W_A^B = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = |F|.|AB|.\cos(\alpha)$

si α est l'angle que font les deux vecteurs entre eux.

Même si elle est souvent citée, il vaut mieux oublier cette relation, et appliquer systématiquement la définition différentielle du travail, c'est beaucoup plus sûr.

Puissance $P = \dfrac{dW}{dt}$



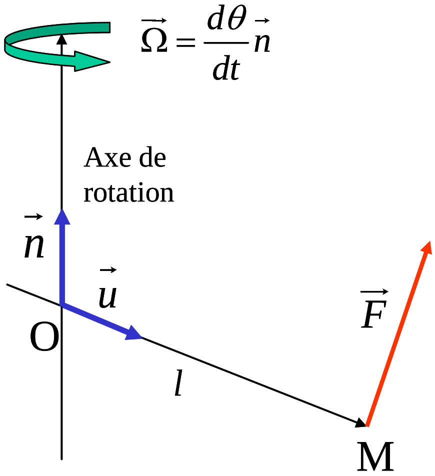
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{l}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

$$\boxed{P = \vec{F}\,.\,\vec{V}}$$

Watt (W) Newton (N) m/s

Puissance et travail d'un moment (rotation, l=Cte)

$$\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{n}$$



$$\boxed{P = \vec{F}.\vec{V} \qquad \vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

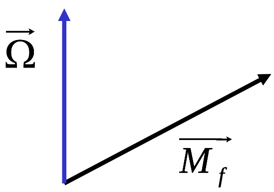
$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(l\vec{u})}{dt} = l\frac{d\vec{u}}{dt} = l\vec{\Omega}\wedge\vec{u} = \vec{\Omega}\wedge l\vec{u} = \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$$

Au passage, résultat très intéressant pour la dérivée d'un vecteur de module constant

$$\boxed{P = \vec{F}.\vec{V} = \vec{F}.(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}).\vec{\Omega} = \overrightarrow{M_f}.\vec{\Omega}}$$

Fait appel à une propriété des produits mixtes scalaires/vectoriel: si un parallélépipède a pour côtés a, b et c, $(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}$ représente le volume du parallélépipède et il n'est donc pas surprenant que: $(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c} = \vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c})$ *etc...*

Pour un moment parallèle à l'axe de rotation, la puissance est égale au produit du moment par la vitesse de rotation.
Automobile : puissance = (vitesse rotation) * ("couple" moteur)



Watt $\rightarrow \boxed{P = \overrightarrow{M_f}.\vec{\Omega}} \leftarrow$ rad/s

$dW = Pdt$

m.N

unitaire

Joule $\rightarrow \boxed{dW = \overrightarrow{M_f}.\vec{n}\,d\theta} \leftarrow$ rad

2. Puissance

La puissance instantanée est définie à partir du travail :

$P = \frac{dW}{dt}$	une puissance s'exprime en Watt (W)

Une ancienne unité est malheureusement toujours utilisée dans l'automobile : le cheval
1ch = 736Watts
A partir de la définition du travail, cette relation se réécrit :

$P = \frac{\vec{F}.d\vec{l}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{l}}{dt}$ Donc :

$$\boxed{P = \vec{F}.\vec{V}}$$

A l'inverse, le travail peut donc s'exprimer à partir de la puissance :
$dW = Pdt$
Et le travail peut donc être obtenu en intégrant la puissance sur l'intervalle de temps considéré.

Application :
puissance nécessaire à un véhicule pour se déplacer dans l'air, hors frottements solides.
Nous avons vu que le frottement visqueux s'écrit :
$\vec{F_f} = -\frac{1}{2}C_x\rho SV\vec{V}$
La force nécessaire au véhicule pour vaincre le frottement de l'air est égale et opposée à celle des forces de frottement soit :
$P = \vec{F}.\vec{V} = (\frac{1}{2}C_xS\rho V\vec{V})\vec{V} = \frac{1}{2}C_xS\rho V^3$
Elle croit donc comme le cube de la vitesse du véhicule.

Le problème exactement inverse est celui du moulin à vent, dont la puissance varie avec une loi du même type, mais où le terme
$\frac{1}{2}C_xS$
est proportionnel (mais pas égal) à la surface balayée par les pales.
La puissance d'un moulin à vent croit donc comme le cube de la vitesse du vent.

3. Energie cinétique

Cette notion combine la définition du travail et le PFD appliqué pour une masse constante: la relation établie ne sera donc pas valable pour des vitesses relativistes. D'après sa définition:

$dW = \vec{F}.d\vec{l}$ or : $\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$ PFD pour une masse constante, d'où

$$dW = m\frac{d\vec{V}}{dt}d\vec{l} = md\vec{V}\frac{d\vec{l}}{dt} = m(d\vec{V})\vec{V} = md[\tfrac{1}{2}(\vec{V})^2] = md[\tfrac{1}{2}V^2] = d(\tfrac{1}{2}mV^2)$$

La quantité $\frac{1}{2}mV^2$ semble donc intéressante. Elle a été nommée énergie cinétique et s'exprime comme toute énergie en Joules.

$E_c = \frac{1}{2}mV^2$	Energie cinétique

Energie cinétique

$$dW = \vec{F} \, . \, \vec{dl}$$

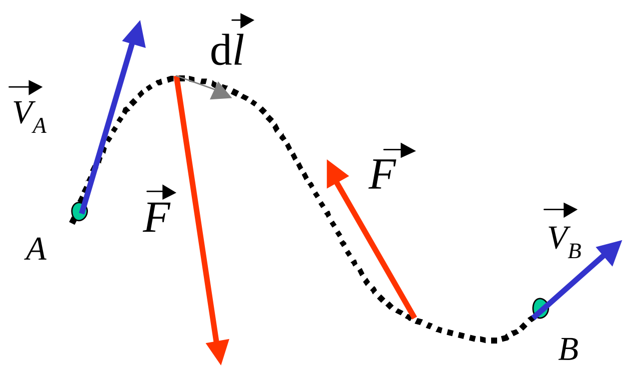
$$\vec{F} = m \, d\vec{V}/dt$$

$$\longrightarrow \quad dW = d\left(\tfrac{1}{2}mV^2\right)$$

définition

$$E_c = \tfrac{1}{2}mV^2$$

Théorème de l'énergie cinétique



$$E_c = \tfrac{1}{2}\, mV^2$$

$$dW = \vec{F} . \vec{dl}$$

$$dE_c = dW$$

$$\tfrac{1}{2}\, mV_B^{\,2} - \tfrac{1}{2}\, mV_A^{\,2} = W_A^{\,B}$$

Attention pour un système de deux masses de centre de masse G à ne pas écrire :

$E_C = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_G^2$ ce serait faux dans la plupart des cas.

NB : Compte tenu de l'importance de la quantité de mouvement, il est courant de trouver l'énergie cinétique sous la forme:

$E_c = \dfrac{p^2}{2m}$	Energie cinétique

4. Théorème de l'énergie cinétique

Nous venons de démontrer que :

$dW = dE_c$	avec $E_c = \frac{1}{2}mV^2$

Ainsi, lorsqu'une force agit sur un mobile de masse m, la variation de son énergie cinétique est égale au travail effectué par la force.
Cette relation peut évidemment être intégrée :

$$W_A^B = \int_A^B d(\tfrac{1}{2}mV^2) = [\tfrac{1}{2}mV^2]_A^B \quad \text{soit} \quad W_A^B = \tfrac{1}{2}mV_B^2 - \tfrac{1}{2}mV_A^2$$

ce qui permet d'écrire le théorème de l'énergie cinétique sous sa forme la plus connue,

$W_A^B = E_c^B - E_c^A$

Le travail est très commode d'emploi puisqu'il est scalaire, mais, sauf si le problème est à une dimension, il ne permet généralement pas, à lui seul, de décrire la trajectoire.
Attention, la définition de l'énergie cinétique utilise le PFD, et **le théorème de l'énergie cinétique doit donc être employé exclusivement dans un repère inertiel**.

NB: attention (erreur classique), à ne pas écrire $W_A^B = \frac{1}{2}m(V_B - V_A)^2$

5. Energie cinétique: ouverture relativiste

Une approche très simplifiée de la mécanique relativiste, consiste à considérer que la masse est fonction de la vitesse V ; nous l'appellerons m_I (masse inertielle) et m_0 représentera la masse au repos. Si c exprime la vitesse de la lumière:

$$m_I = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} \qquad \textit{où} \qquad V < c$$

L'énergie cinétique associée à une particule s'écrit :

$E_c = (m_I - m_0)c^2$

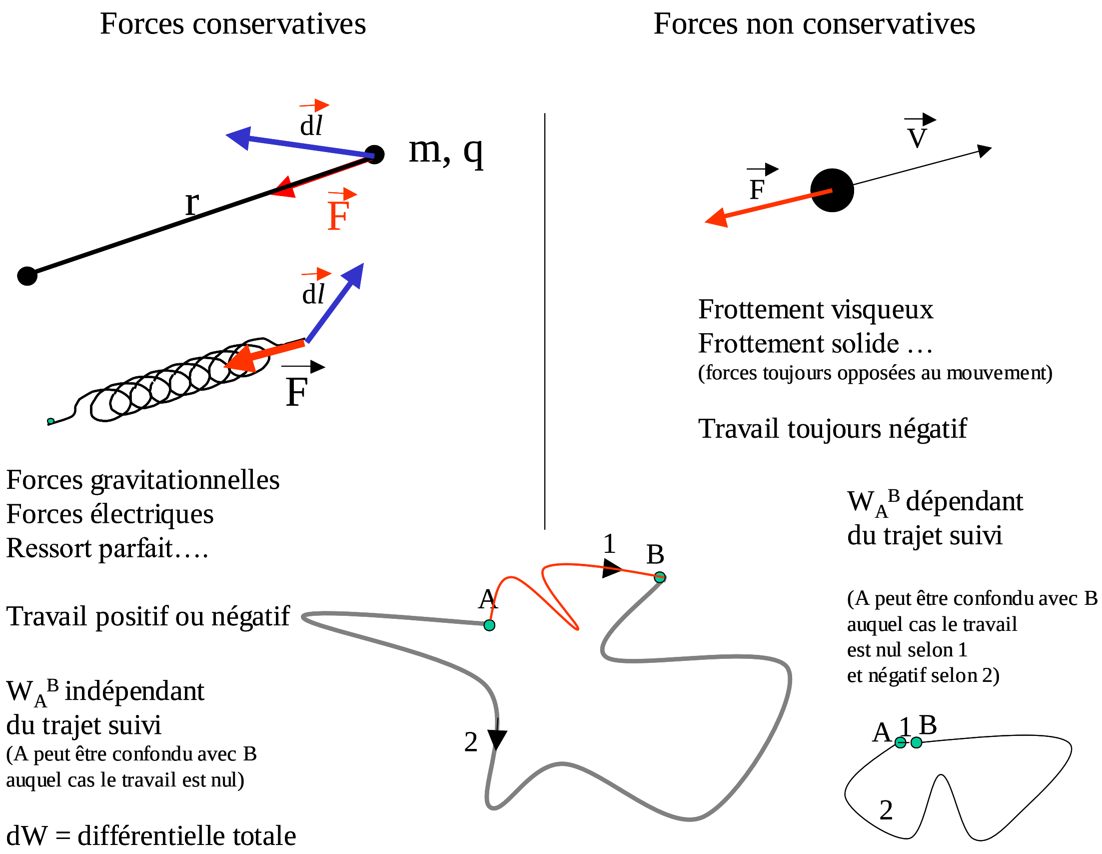
Cela doit vous rappeler la célèbre relation proposée par Einstein il y a cent ans pour l'énergie totale associée à une masse m: "$E = mc^2$".

Lorsque $V/c \ll 1$, $(1 - V^2/c^2)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2}V^2/c^2$,

ce qui conduit à l'expression non relativiste $E_c \approx \frac{1}{2}m_0V^2$

Rappel : sous sa forme $d\vec{p} = \vec{F}dt$

le PFD est valable dans tous les cas, y compris en mécanique relativiste.


Forces conservatives
Forces non conservatives
dl
m, q
r
F
dl
F
V
F
Frottement visqueux
Frottement solide …
(forces toujours opposées au mouvement)
Travail toujours négatif
Forces gravitationnelles
Forces électriques
Ressort parfait….
W_A^B dépendant
du trajet suivi
1
B
A
Travail positif ou négatif
(A peut être confondu avec B
auquel cas le travail
est nul selon 1
et négatif selon 2)
W_A^B indépendant
du trajet suivi
(A peut être confondu avec B
auquel cas le travail est nul)
2
A 1 B
2
dW = différentielle totale

VI. Energies potentielle et mécanique

Ces deux notions n'apporteront pour nous pas beaucoup plus que les notions de travail et d'énergie cinétique. Elles ne sont donc pas indispensables, mais sont très utilisées car elles permettent une formulation élégante des lois de l'énergie et peuvent simplifier certaines discussions.
Nous serons amenés à classer les forces en 2 catégories : conservatives ou non conservatives

1. Forces conservatives et non conservatives

1.1 Forces conservatives

Partons d'exemples pour faciliter la compréhension.

Travail fourni par un ressort

Nous avons établi dans le chapitre travail que :

$dW = -d(\tfrac{1}{2}kx^2)$ ou encore

$W_A^B = -\tfrac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$

Ce travail ne dépend que des allongements initiaux et finaux. Il est indépendant du chemin suivi et peut être positif ou négatif.

Travail fourni par les forces de pesanteur.

$dW = d(K_G \dfrac{m_1 m_2}{r})$ (cf. fin du chapitre gravitation) ou encore

$W_A^B = K_G m_1 m_2 (\dfrac{1}{r_B} - \dfrac{1}{r_A})$

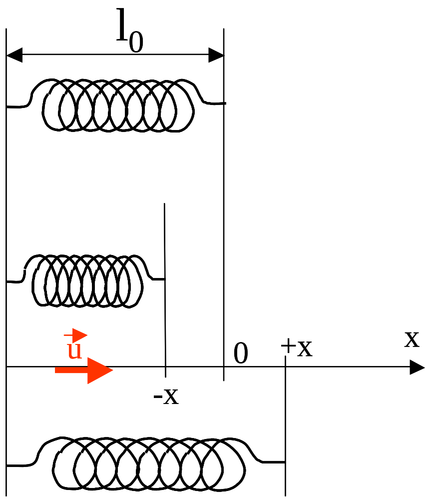
Là aussi, le travail effectué par les forces de pesanteur est indépendant du chemin suivi. Il ne dépend que des distances entre les deux masses au début et à la fin du parcours, et il peut être moteur ou résistant.

Ces deux exemples sont typiques de forces conservatives :
- le travail élémentaire est une différentielle totale
- le travail ne dépend pas du parcours suivi pour aller de A à B, ce qui est mathématiquement une conséquence de la différentielle totale.

1.2 Forces non conservatives (dissipatives)

Il serait suffisant de dire que ce sont toutes les forces qui ne sont pas conservatives !
Donnons quand même quelques exemples.

Forces vers potentiels (1)

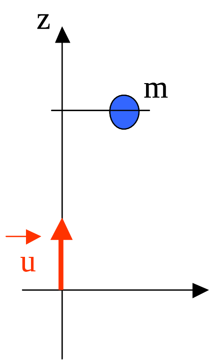


$\vec{F} = -kx\,\vec{u}$

$E_p = \frac{1}{2} kx^2 + Cte$

$x>0$, $F<0$

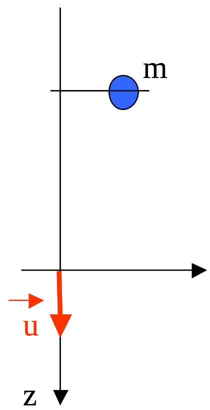
$x<0$, $F>0$



$\vec{F} = -mg\,\vec{u}$

$E_p = +mgz + Cte$

Fonction croissante de l'altitude



$\vec{F} = +mg\,\vec{u}$

$E_p = -mgz + Cte$

Fonction croissante de l'altitude

Force de frottement visqueux $\vec{F} = -k\vec{V}$ où k est positif.

$dW = -k\vec{V}d\vec{l}$ qui peut s'écrire :

$$dW = -k\vec{V}\frac{d\vec{l}}{dt}dt = -kV^2dt$$

Cette expression fait intervenir à la fois la vitesse et le temps. A moins de remonter le temps, elle est toujours négative. Le travail dépend évidemment du trajet suivi pour aller de A à B: il suffit d'imaginer deux chemins de longueurs différentes parcourus à la même vitesse … les temps de parcours seront différents. Il n'existe pas de différentielle totale pour ce travail.

Force de frottement visqueux $\vec{F} = -\frac{1}{2}C_x\rho SV^2\vec{u}$

Pour ce cas, la conclusion peut se déduire de notre expérience journalière, sans écrire d'équation, puisque c'est typiquement la force de frottement de l'air qui s'oppose au cycliste ou à la voiture : le travail effectué dépend évidemment du trajet suivi, et même de la vitesse à laquelle on l'effectue, et il est manifestement toujours négatif.
Ecrivons quand même les équations :

$$dW = -\tfrac{1}{2}C_x\rho SV\vec{V}\,d\vec{l} = -\tfrac{1}{2}C_x\rho SV\vec{V}(\vec{V}dt)$$

$$dW = -\tfrac{1}{2}C_x\rho SV^3dt$$

Là encore, on montre qu'il n'existe pas de différentielle totale.

Force de frottement solide $\vec{F} = -R_T\vec{u}$

où $\vec{u}$ est dans le sens du mouvement et $R_T > 0$.

$$dW = -R_T\vec{u}.d\vec{l} = -R_T\vec{u}.(\vec{u}dl + ld\vec{u}) = -R_Tdl$$

Dans le cas, fréquent, où R_T est constant, il semble bien que l'on tienne une différentielle totale ($dW = -d(R_Tl)$), mais c'est faux car si $dl < 0$, alors R_T doit changer de signe ($R_T < 0$).
Même conclusion, évidente dans la vie de tous les jours, le travail effectué par cette force est toujours négatif et dépend du chemin choisi.
C'est la propriété de toujours être négative qui justifie le nom de force non conservative ou dissipative : pour le système, l'énergie est perdue, "dissipée". En fait elle est transformée.

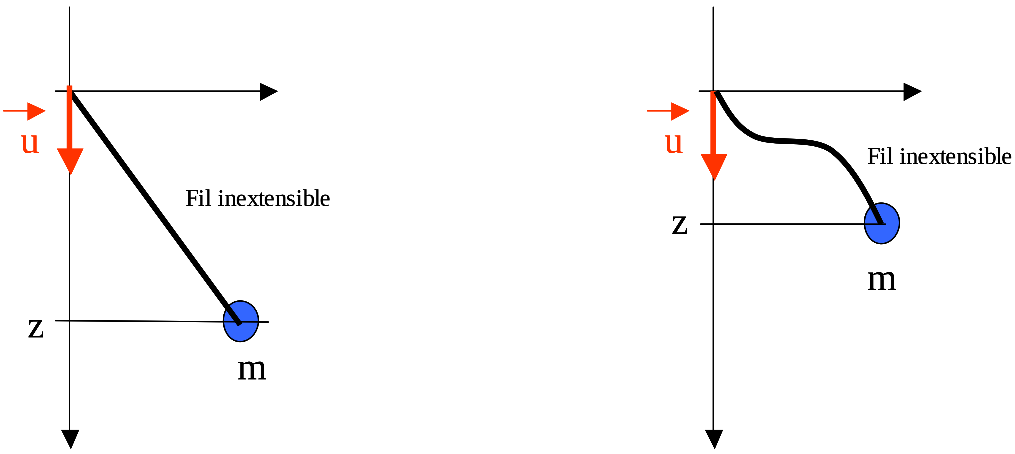
2. Energie potentielle (forces conservatives seulement)

C'est une grandeur définie pour les seules forces conservatives.
Tout travail élémentaire d'une force conservative peut se mettre sous la forme d'une différentielle totale dW, et l'énergie potentielle est définie par :

$dE_p = -dW$	Définition de l'énergie potentielle

Nous verrons plus loin l'utilité du signe négatif.
E_p est une énergie et s'exprime donc en Joules.

Forces vers potentiels (2)



$$\vec{F} = + mg\,\vec{u}$$

$$E_p = - mgz + Cte$$

Exemples :
Pour le ressort,

$dW = -d(\frac{1}{2}kx^2)$ donc $dE_p = d(\frac{1}{2}kx^2)$ et par conséquent,

$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + Cte$ ou $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + Cte$

Pour les forces gravitationnelles,

$dW = d(K_G \frac{m_1 m_2}{r})$ donc $dE_p = -d(K_G \frac{m_1 m_2}{r})$ et,

$E_p = -K_G \frac{m_1 m_2}{r} + Cte'$

Il est toujours surprenant au début de voir une grandeur définie à une constante près: cela fait désordre non ? En fait cette constante n'a aucune importance pour l'étude d'un système car nous nous servons toujours de différences ou de différentielles d'énergies potentielles, et la constante disparaît. Comme elle n'a aucune importance, elle peut être choisie arbitrairement, et elle est généralement fixée de façon à simplifier, ou rendre plus parlantes, les expressions utilisées.

Le nom d'énergie potentielle vient de la possibilité, de la potentialité, qu'à un système de fournir de l'énergie lorsqu'il possède une énergie potentielle : eau stockée dans les barrages, ressort comprimé ou en extension …

3. Force et énergie potentielle

A une seule dimension, *x* par exemple, la définition de l'énergie potentielle se résume à :

$dE_p = -dW = -Fdx$ donc $dE_p = -Fdx$

Si la fonction énergie potentielle est connue, la force peut donc se calculer simplement :

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

A plusieurs dimensions,

$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, et donc : $dE_p = -(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}).(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$

$dE_p = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$

et chacune des composantes se calcule donc par:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Si bien que l'on peut écrire :

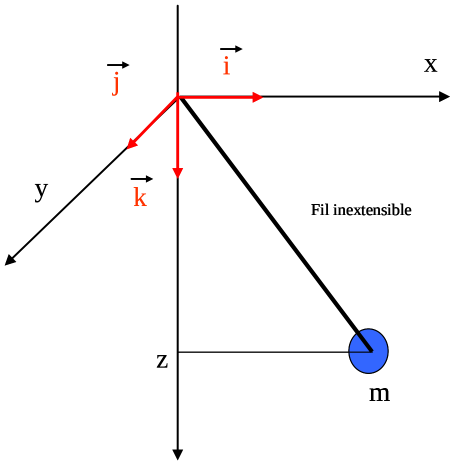
$$\boxed{\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)}$$

qui s'écrit de manière condensée sous la forme :

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_p)$ ou $\vec{F} = -\vec{\nabla}(E_p)$

Il est donc parfaitement possible de passer des potentiels aux forces, et réciproquement.

Potentiel vers force



$E_p = -mgz$

$\vec{F}_p = -(\partial E_p/\partial x\ \vec{i} + \partial E_p/\partial y\ \vec{j} + \partial E_p/\partial z\ \vec{k})$

$\vec{F}_p = +\ mg\ \vec{k}$

Attention:
cette opération ne permet évidemment
que le calcul de la force liée à Ep.
Ici, la force exercée par le fil (qui ne travaille jamais)
et celle du frottement de l'air (non conservative)
doivent être appréciées différemment.

NB:
le pendule peut avoir une trajectoire quelconque
et le fil peut même être non tendu

4. Travail et énergie potentielle

A partir de la définition de E_p

$dW = -dE_p$

le travail fourni par une force entre 2 points A et B s'écrit :

$W_A^B = E_p^A - E_p^B$

expression où l'on utilise effectivement une différence et où la constante ne joue aucun rôle, comme promis.
Attention au signe : ce que l'on avait (E_p^A), moins ce qui reste (E_p^B) a contribué à fournir du travail.

Pour les forces conservatives, il n'y a pas fondamentalement de différence entre travail et énergie potentielle, et leurs différentielles sont d'ailleurs égales, au signe près. Mais le travail est une grandeur calculée entre deux états, tandis que l'énergie potentielle est une fonction qui caractérise un état du système.

Rappel: pour les forces non conservatives, il n'est pas possible de définir une énergie potentielle.

5. Energie mécanique

Nous avons établi au chapitre précédent le théorème de l'énergie cinétique qui stipule que :

$W_A^B = E_c^B - E_c^A$

Nous allons ici distinguer le travail des forces conservatives et non conservatives :

$W_A^B = (W_A^B)_C + (W_A^B)_{NC}$

En exprimant le travail des forces conservatives à partir de l'énergie potentielle, on obtient :

$W_A^B = E_p^A - E_p^B + (W_A^B)_{NC}$

d'où, en faisant maintenant intervenir l'énergie cinétique pour remplacer W_A^B :

$E_c^B - E_c^A = E_p^A - E_p^B + (W_A^B)_{NC}$ et donc :

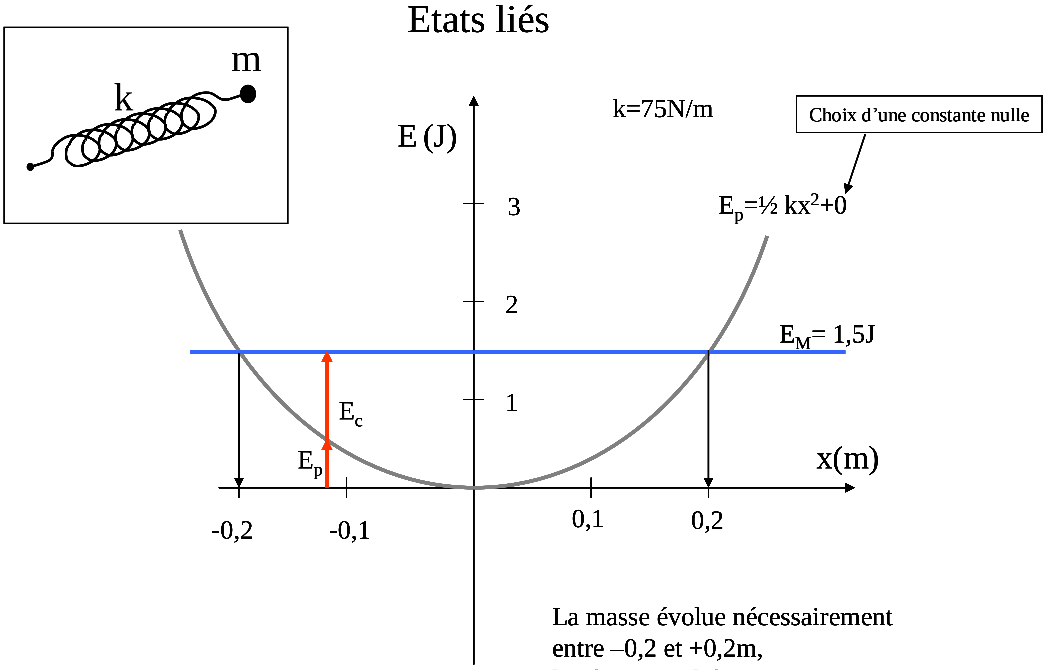
$(E_c^B + E_p^B) - (E_c^A + E_p^A) = (W_A^B)_{NC}$

Il est tentant de définir une nouvelle grandeur, telle que :

$\boxed{E_M = E_c + E_p}$ *Energie Mécanique*

qui sera baptisée énergie mécanique.
Le signe moins qui a été introduit dans la définition de l'énergie potentielle permet de définir E_M par une addition. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'additionnent, elles représentent de l'énergie "disponible".

Etats liés



La masse évolue nécessairement
entre –0,2 et +0,2m,
les états sont liés,
le système est contraint.

6. Théorème de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique vérifie donc :

$$\boxed{E_M^B - E_M^A = (W_A^B)_{NC}}$$

Donc lorsqu'un système matériel décrit une trajectoire entre 2 points A et B, la variation de l'énergie mécanique d'un système matériel, est égale au travail des forces non conservatives qui agissent sur lui.

Le travail d'une force non conservative étant toujours négatif, l'énergie mécanique d'un système *ne peut donc que décroître* : $E_M^B < E_M^A$ (si B est postérieur à A bien sûr !).

7. Systèmes non dissipatifs

7.1 Propriété

Ces systèmes ne font intervenir que des forces conservatives (non dissipatives), donc d'après le théorème de l'énergie mécanique que nous venons d'établir:

$E_M^B - E_M^A = 0$ $\qquad\qquad$ $E_M = Cte$

En l'absence de force dissipative, l'énergie mécanique d'un système est constante.

7.2 Diagramme d'énergie et états liés

L'énergie cinétique étant nécessairement positive ($\frac{1}{2}mV^2$), la définition de l'énergie mécanique

$E_M = E_c + E_p$ $\qquad\qquad$ exige que :

$E_M \geq E_p$

Cette inégalité impose une contrainte sur les états possibles du système. L'énergie potentielle est condamnée à être inférieure à l'énergie mécanique et toutes les configurations ne sont donc pas possibles, ce que nous allons voir sur un exemple.

Exemple : système masse ressort

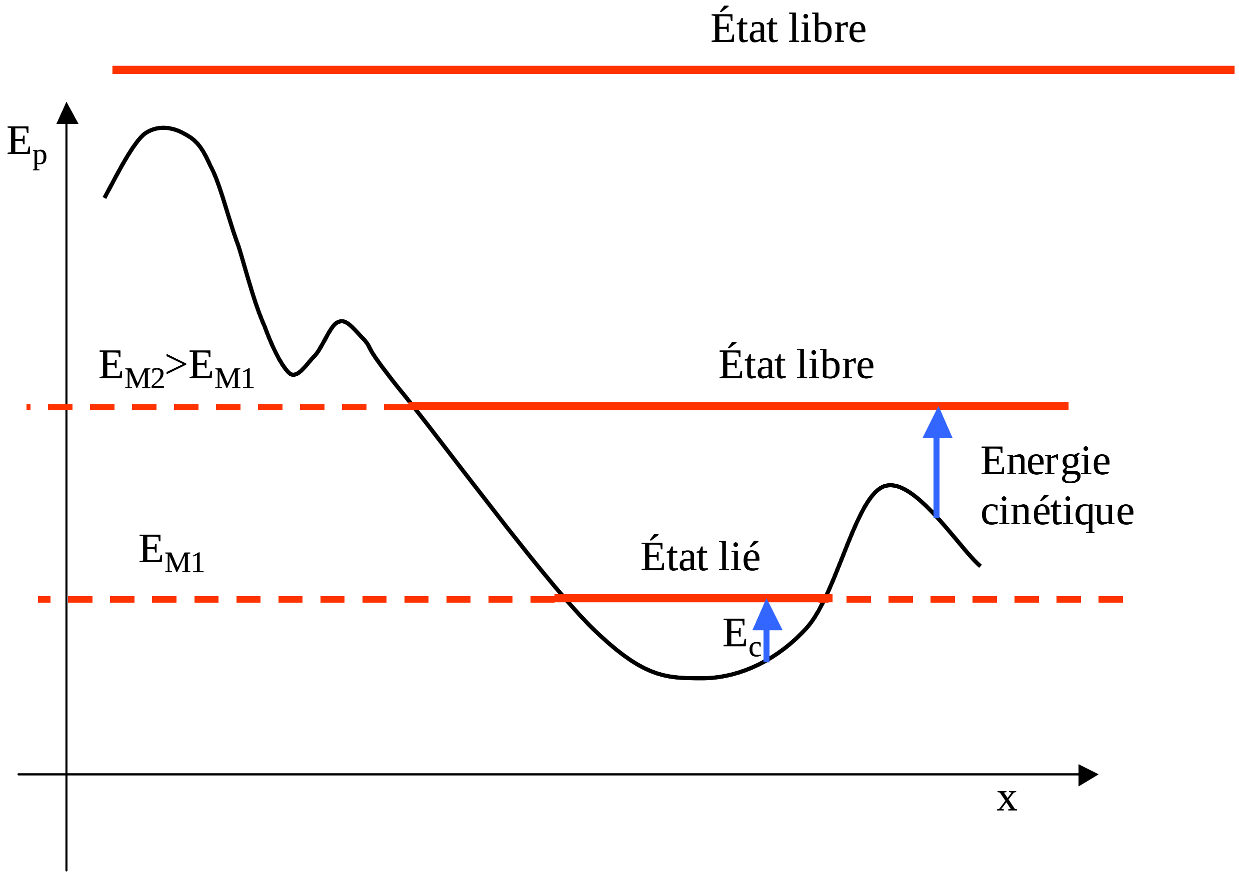
Soit une masse posée sur une table sans frottement, et reliée à un ressort à spires non jointives. Au départ, la masse est éloignée de sa position d'équilibre (équilibre qui correspond au ressort non tendu) jusqu'à une valeur x_0 , puis elle est lâchée sans vitesse initiale et évolue librement.

L'énergie potentielle du ressort s'écrit :

$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + Cte$

Cette force étant conservative, l'énergie mécanique est constante.

Nous pouvons alors représenter cette énergie potentielle en fonction de la variable x (parabole). Comme elle est toujours inférieure à E_M , une horizontale la limite, et contraint donc x à rester entre 2 limites. Les états possibles sont dits liés, et un tel diagramme s'appelle un diagramme d'énergie.


État libre
E_p
$E_{M2}>E_{M1}$
État libre
Energie
cinétique
E_{M1}
État lié
E_c
x

L'énergie mécanique est facile à calculer, puisque au temps t=0, l'énergie cinétique est nulle donc:

$E_M = 0 + E_p = 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 + Cte$

Il est aisé de montrer ici que $-x_0 < x < +x_0$ car :

$E_M \geq E_P \quad \Rightarrow \quad 0 + \frac{1}{2}kx_0^2 + Cte \geq 0 + \frac{1}{2}kx^2 + Cte \quad => \quad x_0^2 \geq x^2$

A propos de la constante :
nous venons de montrer que le choix de la constante n'a pas d'incidence sur la conclusion. Donnons en une autre illustration :

$E_M = E_c + E_p$ s'écrit ici :

$0 + \frac{1}{2}kx_0^2 + Cte = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2 + Cte$

relation qui nous permet de calculer l'énergie cinétique pour une configuration quelconque du système :

$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2$

L'énergie cinétique ne dépend donc pas de la constante, la vitesse non plus.
Répétons-le : l'énergie potentielle et l'énergie mécanique sont fonction de la même constante qui est totalement arbitraire … et souvent prise nulle.

7.3 Etats libres et liés. Conditions d'équilibre

Nous nous limiterons à un système dont l'état dépend d'une seule variable, x par exemple.
Nous avons vu sur un exemple les états liés qui contraignent la variable à rester entre des valeurs définies par l'énergie mécanique.

Pour des systèmes plus complexes, suivant l'énergie mécanique, les états peuvent aussi être liés ou libres.
Une bille évoluant sur des reliefs est une très bonne illustration. Suivant son énergie, elle peut soit rester localisée (état lié), soit franchir les reliefs (états libres). Ses limites d'évolution sont celles qui autorisent une énergie cinétique positive.

Un équilibre est dit stable si le système y reste lorsqu'il est sans vitesse, et s'il y retourne spontanément après avoir été légèrement écarté de cet état.
Il faut donc que la force soit nulle dans cet état et qu'il y ait une force de rappel et donc que :

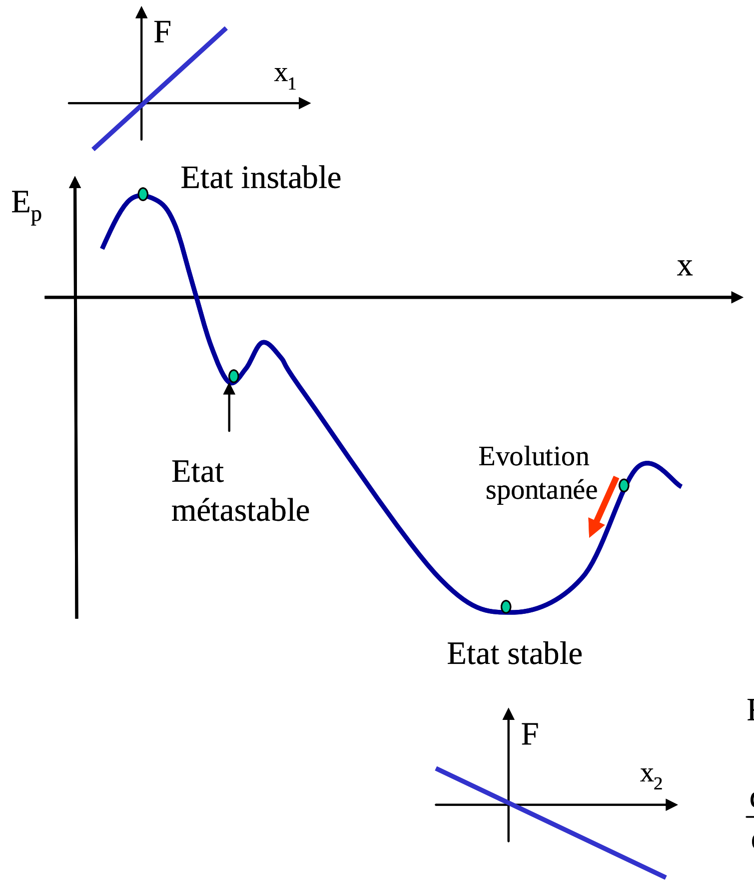
$F = 0 \quad$ et $\quad \frac{dF}{dx} < 0$

ainsi, si l'écart est positif, la force est négative et ramène le système vers l'équilibre.
Il en est de même si $dx < 0$: la force est alors positive.
Inversement, un système est dit en équilibre instable si :

$F = 0 \quad$ et $\quad \frac{dF}{dx} > 0$

car dès qu'il s'éloigne de l'état d'équilibre, la force accélère le mouvement et l'écarte de cet état.

Etats stables, instables et métastables



$$F = 0 \iff \frac{dE_P}{dx} = 0$$

$$\frac{dF}{dx} < 0 \iff \frac{d^2E_P}{dx^2} > 0$$

Un équilibre métastable correspond à la définition d'un état stable, mais il existe un état stable dont l'énergie potentielle est plus faible : la pièce de monnaie sur la tranche, ou le randonneur sur une vire en dessus du vide.

Compte tenu de la relation

$$F = \frac{-dE_p}{dx}$$

Les conditions d'équilibres peuvent s'écrire :
Avec la force

Force / Equilibre	F	$\frac{dF}{dx}$
Stable (ou métastable)	0	<0
Instable	0	>0

Avec l'énergie potentielle :

Potentiel / Equilibre	$\frac{dE_p}{dx}$	$\frac{d^2E_p}{dx^2}$
Stable (ou métastable)	0	>0
Instable	0	<0

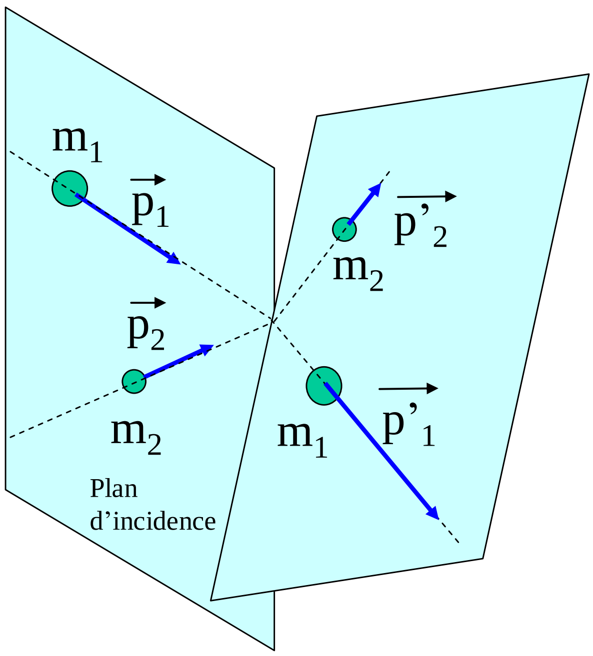
Rappel de mathématique : la dérivée seconde indique la concavité; si elle est positive, la concavité est tournée vers les énergies croissantes ("vers le haut"). Un équilibre stable correspond donc à une dépression de potentiel, on parle souvent de puits de potentiel. La force de pesanteur, associée aux reliefs terrestres, en est un exemple parfaitement évident : en fond de vallée un objet est stable et la force résultante (pesanteur + réaction du sol) est nulle, tandis qu'au sommet d'un pic, l'état est manifestement instable (et la force nulle là aussi).

8. Utilisation de l'énergie potentielle et du travail

Il faut bien se rendre compte que l'énergie potentielle et le travail sont deux notions très proches. Il ne faut surtout pas s'imaginer que certains problèmes sont insolubles sans les notions d'énergies potentielle et mécanique … et de toute manière le PFD suffit ! Par contre l'énergie potentielle est indispensable si les forces ne sont pas données : elles seront obtenues par dérivation par rapport aux coordonnées d'espace.

Reprenons l'exemple du système masse-ressort et appliquons lui le théorème de l'énergie cinétique.
L'expression du travail d'un ressort :
$W_A^B = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$ peut tout aussi bien s'écrire : $W_{x_0}^x = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2)$
Donc d'après le théorème de l'énergie cinétique :
$\frac{1}{2}mV^2 - 0 = -\frac{1}{2}k(x^2 - x_0^2)$
L'expression est identique à celle que nous avons établie précédemment, sans l'intervention de l'énigmatique constante ! Le changement travail-potentiel consiste en fait à changer le signe du travail (et donc son nom) en le faisant passer de l'autre côté du signe égal.

Collision 3D



$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^{\,\prime} + \vec{p}_2^{\,\prime}$$

Si les forces extérieures
- sont nulles
- ou n'ont pas le temps d'agir

Rappel: $d\vec{p} = \vec{F}_{ext.}\, dt$

VII. Collisions

1. Introduction

L'étude des collisions est une application très intéressante, et particulièrement instructive, des lois de la mécanique concernant la quantité de mouvement et l'énergie cinétique. Il ne sera pas fait appel ici aux autres notions vectorielles ou scalaires.
Dans l'étude d'une collision, on ne s'intéresse pas au détail de l'interaction, mais seulement aux caractéristiques de chacune des particules avant et après l'interaction. Le terme collision est à prendre au sens large, il n'y a pas forcément un contact "physique" pour les objets (comète autour du soleil ou déviation des charges électriques par exemple). On considère simplement deux corps avant que les forces d'interaction soient notables, puis, après rapprochement conduisant à des forces significatives, à leurs nouvelles caractéristiques, lorsque les interactions redeviennent négligeables.
Une collision sera ici vue sous sa forme la plus simple : **deux points matériels sont en interaction, sans aucune autre force extérieure appliquée à ce système (*).**
Les deux seules forces en présence sont donc les actions réciproques :
$\overrightarrow{F_{1/2}}$ et $\overrightarrow{F_{2/1}}$ avec
$\overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2/1}} = \vec{0}$

2. Conservation de la quantité de mouvement

Avant collision les quantités de mouvement sont respectivement notées :
$\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$
Après collision, elles deviennent :
$\overrightarrow{p'_1}$ et $\overrightarrow{p'_2}$
Il a été établi dans le chapitre "Principes fondamentaux de la dynamique : application" que dans le cas où il n'y a pas de force extérieure appliquée, la quantité totale de mouvement est constante. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}}$$

Cette relation est valable même si la masse n'est pas constante.

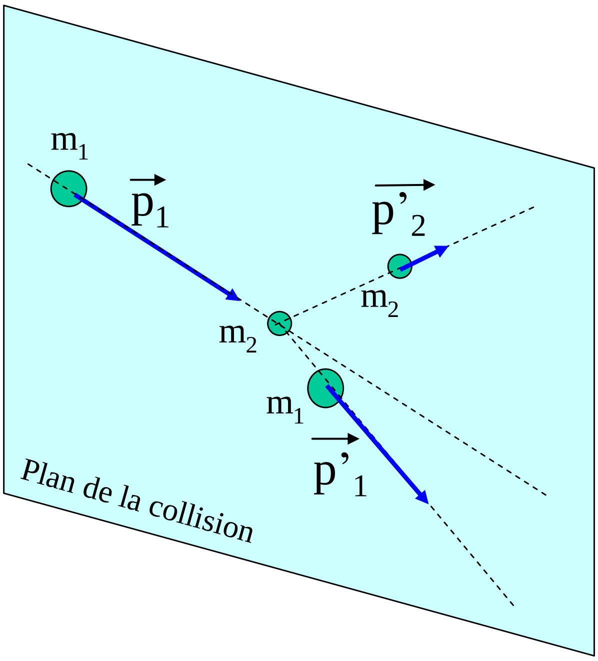
3. Dimensions de la collision.

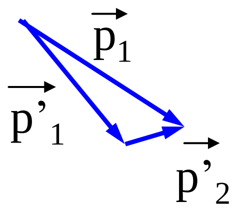
Dans le cas général, la collision se déroule à 3 dimensions : les deux vecteurs $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{p_2}$ définissent un plan, et $\overrightarrow{p'_1}$ et $\overrightarrow{p'_2}$ définissent généralement un autre plan.

(*) Plus généralement, si dt représente le temps d'interaction, il suffit que $\vec{F}dt$ soit négligeable devant les quantités de mouvement des masses en interaction.

Collision 2D

(ici m_2 immobile)

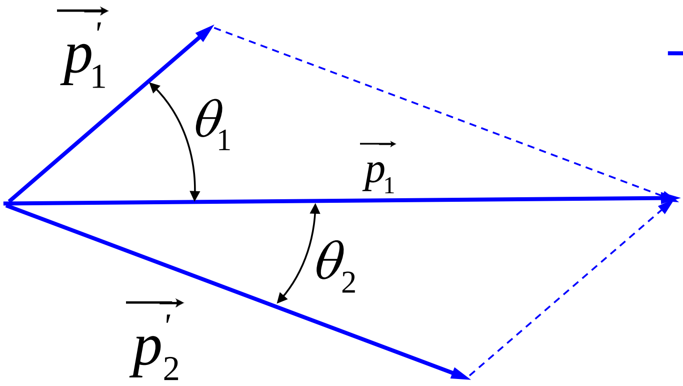


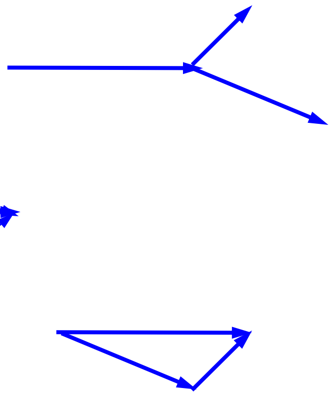


$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'}$$

Collision, m_2 au repos

(vecteurs dans le plan de la feuille)





$$\vec{p}_1 = \vec{p}_1^{\,'} + \vec{p}_2^{\,'}$$

$$\textit{masses constantes} \quad \Rightarrow \quad m_1\vec{V}_1 = m_1\vec{V}_1^{\,'} + m_2\vec{V}_2^{\,'} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} m_1V_1 = m_1V_1^{'}\cos\theta_1 + m_2V_2^{'}\cos\theta_2 \\ m_1V_1^{'}\sin\theta_1 = m_2V_2^{'}\sin\theta_2 \end{array}$$

Dans le cas particulier d'une collision où une des particules est immobile (m_2 par exemple), l'ensemble de la collision se déroule dans un seul plan.

En effet, puisque $\overrightarrow{p_2} = \vec{0}$:

$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p_1'} + \overrightarrow{p_2'}$

Ces trois vecteurs composent un triangle qui définit le plan de la collision. La collision se présente comme un problème à deux dimensions. Mais en fait le plan peut tourner autour de $\overrightarrow{p_1}$ et tout l'espace peut donc être balayé.

NB : le cas général 3D peut se ramener à ce cas en opérant un changement de référentiel pour rendre m_2 immobile.

4. Relation entre les vitesses (masses constantes)

Simplification :
dans toute la suite, nous allons nous situer dans le cas de masses constantes.
La masse étant constante, la conservation de la quantité de mouvement devient :

$m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2} = m_1\overrightarrow{V_1'} + m_2\overrightarrow{V_2'}$

Soit aussi :

$$\boxed{m_1(\overrightarrow{V_1'} - \overrightarrow{V_1}) = -m_2(\overrightarrow{V_2'} - \overrightarrow{V_2}) \qquad\qquad m = Cte}$$

Le produit de la masse par la variation de vitesses est donc le même pour chacune des particules, au signe près.
Attention, c'est une relation vectorielle.

Les masses m_1 et m_2 sont connues ainsi que les vitesses $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$. Nous recherchons $\overrightarrow{V_1'}$ et $\overrightarrow{V_2'}$, que nous allons calculer dans quelques cas typiques.

5. Collisions élastiques (conservation de l'énergie cinétique)

5.1 Propriétés

Ce sont les collisions qui se déroulent avec conservation de l'énergie cinétique du système. Il est inutile de parler ici de l'énergie mécanique puisqu'il n'existe pas d'énergie potentielle, les forces extérieures étant nulles.
Rappel : l'écriture $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ nécessite que la masse soit constante.

La conservation de l'énergie cinétique se traduit donc par :

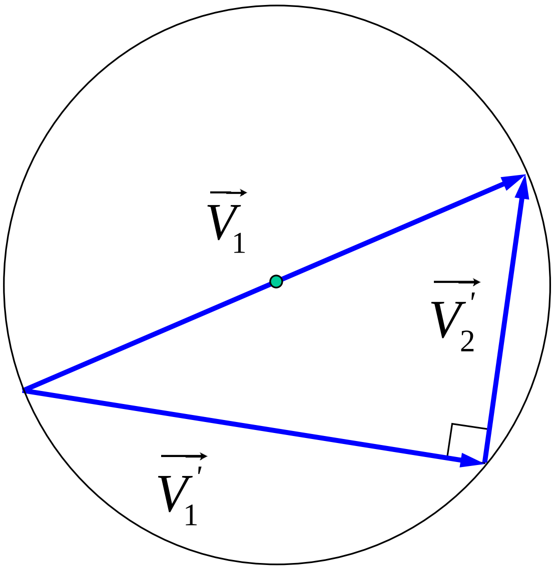
$$\frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V_2'^2$$

Elle peut se réécrire sous la forme :

$$m_1(V_1' - V_1)(V_1' + V_1) = -m_2(V_2' - V_2)(V_2' + V_2)$$

relation scalaire, qui présente une certaine similitude avec la relation vectorielle entre les vitesses issue de la conservation de la quantité de mouvement (cf. paragraphe précédent).

Collision élastique (conservation E_c) avec m_2 au repos et m_1=m_2

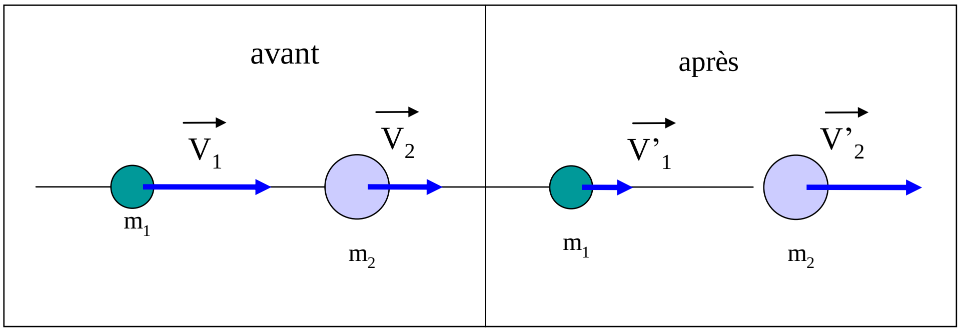


$$V_1^2 = V_1^{'2} + V_2^{'2}$$

$$p_1^2 = p_1^{'2} + p_2^{'2}$$

Schéma identique pour les $\vec{p}$

Collision élastique directe (sur un axe)



$$V_1^{'} = \frac{2m_2V_2 + (m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2}$$

$$V_2^{'} = \frac{2m_1V_1 + (m_2 - m_1)V_2}{m_2 + m_1}$$

En l'absence d'information supplémentaire, nous ne pouvons pas résoudre le système, c'est à dire déterminer $\overrightarrow{V_1'}$ et $\overrightarrow{V_2'}$ car nous avons 6 inconnues (3 pour chacun des vecteurs) et seulement 4 équations : 3 fournies par l'équation vectorielle des vitesses, et une par l'équation scalaire.
A deux dimensions (dans un plan) il reste 4 inconnues pour 3 équations.
Nous allons donc considérer des cas particuliers.

5.2 Collision élastique de deux masses identiques dont une est immobile.

Si $m_1 = m_2$, et si la masse 2 est supposée immobile, les relations de conservation se simplifient sous la forme :

$\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{V_1'} + \overrightarrow{V_2'}$ et

$V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2$

Une interprétation géométrique évidente (théorème de Pythagore) prouve que les deux vitesses finales $\overrightarrow{V_1'}$ et $\overrightarrow{V_2'}$ sont perpendiculaires.
Sans indication supplémentaire, on ne peut rien dire de plus. Tous les triangles rectangles inscrits dans un cercle de diamètre $\overrightarrow{V_1}$ sont possibles. Pour aller plus loin, il faut un paramètre supplémentaire, par exemple la déviation θ de la masse 1. Il vient alors :

$V_1' = V_1 \cos\theta$

$V_2' = V_1 \sin\theta$

5.3 Collision élastique directe

Par définition, une collision est directe si tout se déroule sur un même axe: toutes les vitesses sont alors colinéaires.
La relation vectorielle des vitesses se projette donc sur cet axe de la manière suivante :

$m_1(V_1' - V_1) = -m_2(V_2' - V_2)$ (a)

Avec l'équation de conservation de l'énergie, nous avons donc 2 équations pour deux inconnues, V_1' et V_2' qui sont bien entendu des variables algébriques.
En divisant entre elles la deuxième relation de conservation de l'énergie

$m_1(V_1' - V_1)(V_1' + V_1) = -m_2(V_2' - V_2)(V_2' + V_2)$

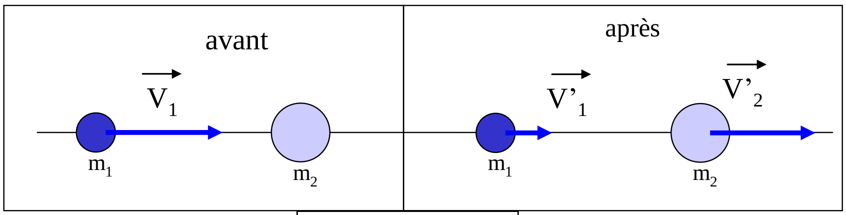
et celle que nous venons d'établir, nous obtenons une relation très simple entre les vitesses : les sommes des vitesses de chaque masse avant et après collision sont égales.

$V_1' + V_1 = V_2' + V_2$ (b)

Les carrés disparaissent donc, et à partir des deux équations (a) et (b), nous aboutissons facilement à :

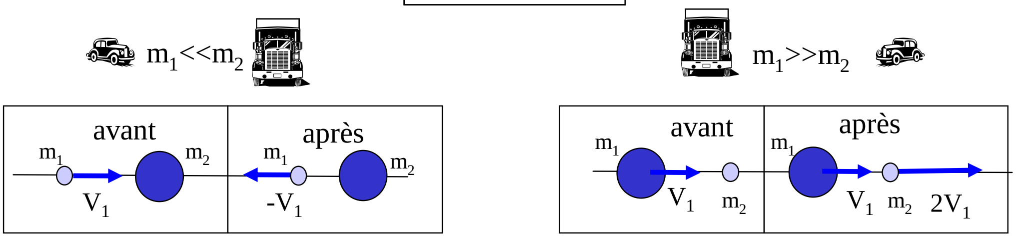
$V_1' = \dfrac{2m_2V_2 + (m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2}$ $V_2' = \dfrac{2m_1V_1 + (m_2 - m_1)V_2}{m_2 + m_1}$	collision élastique sur un axe déterminé (directe)

Collision élastique directe, m_2 immobile



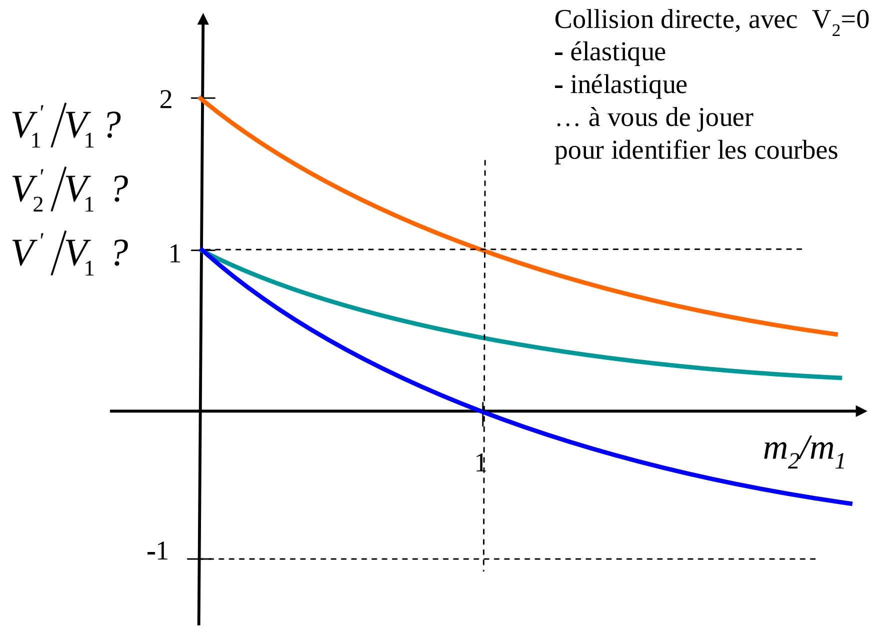
$$V_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

$$V_2' = \frac{2m_1}{m_2 + m_1} V_1$$



Dans les 2 cas DANGER pour la masse faible: variation de vitesse $=2V_1$
forte variation de quantité de mouvement => forces élevées car … $\vec{F} = d\vec{p}/dt$

Repère du laboratoire, $V_2=0$



5.4 Collision élastique directe avec une masse immobile

Un cas particulier important est celui d'un corps de vitesse V_1 qui entre en collision avec un objet immobile ($V_2 = 0$). Les deux relations se simplifient sous la forme :

$$V_1^{'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_1$$

$$V_2^{'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_1$$

Si $m_1 < m_2$, le choc fait rebrousser chemin à m_1.

Si $m_1 = m_2$, m_1 s'immobilise et m_2 part avec la vitesse V_1 (c'est le carreau de la pétanque)

Si $m_1 > m_2$, m_1 garde le même sens de déplacement.

Un résultat curieux est que si $m_1 >> m_2$, m_2 acquerra une vitesse double de celle de m_1, qui elle ne changera pratiquement pas de vitesse. Moralité routière … même si la collision n'est pas vraiment élastique !?

Considérations d'énergies. L'énergie de la particule 1, seule énergie existante avant la collision :

$$E_{c1} = \tfrac{1}{2} m_1 V_1^2$$

se répartit entre les deux masses de la manière suivante :

$$E_{c1}^{'} = (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})^2 E_{c1}$$

$$E_{c2}^{'} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{c1}$$

Cette dernière relation indique que le transfert d'énergie de la masse 1 à la masse 2, $E_{c2}^{'} / E_{c1}$, est très faible si $m_1 << m_2$, mais aussi si $m_1 >> m_2$. Il est maximum et total si $m_1 = m_2$ car $E_{c1}^{'} = 0$. C'est encore le carreau de la pétanque.

Remarque: masses et rapport de masses.

Nous constatons que toutes nos relations peuvent s'écrire en utilisant seulement le rapport des masses, nous n'avons pas besoin de leurs valeurs individuelles. Ceci pouvait d'ailleurs être déduit immédiatement des équations de conservation.

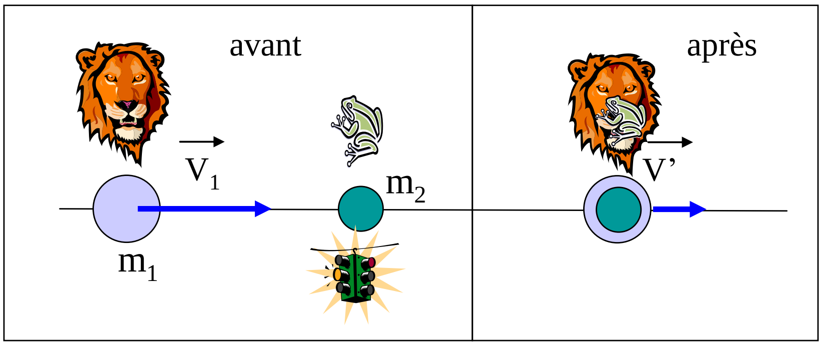
Par exemple, avec $k = m_2 / m_1$:

$$V_1^{'} = \frac{1-k}{1+k} V_1$$

$$E_{c2}^{'} = \frac{4k}{(1+k)^2} E_{c1}$$

Ce sera vrai aussi pour la suite, mais nous garderons les expressions en fonction des masses, pour rester plus près des grandeurs physiques.

Collision inélastique (non conservation Ec), avec m_2 immobile et encastrement

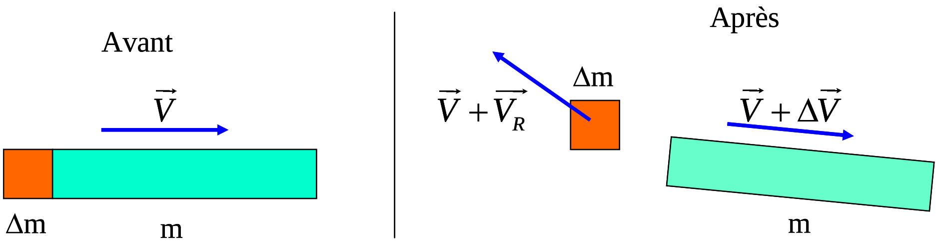


$$m_1\vec{V_1} = (m_1 + m_2)\vec{V'}$$

Une collision inélastique avec une masse immobile est forcément directe (sur un axe)

La collision inélastique à l'envers … ou la poussée d'une fusée

(Δm éjecté avec $\vec{V_R}$ <u>par rapport à la fusée</u>)



$$(m+\Delta m)\vec{V} = m(\vec{V}+\Delta\vec{V}) + \Delta m(\vec{V}+\vec{V_R})$$

$$\vec{0} = m.\Delta\vec{V} + \Delta m.\vec{V_R}$$

$$\Delta\vec{V} = -\frac{\Delta m}{m}\vec{V_R} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Accélération} \\ \text{Freinage} \\ \text{Changement trajectoire} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{Poussée} = m\vec{\Gamma}_{(masse\, m)} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{V_R}$$

(accessoirement, remarquer que mathématiquement: Δm = - dm)

6. Collision inélastique (non conservation de E_c). Encastrement.

Elles se caractérisent par une dissipation d'énergie et peuvent être de genres très variés :

- endoénergétique (déformation ou dislocation d'une ou des deux masses par exemple)
- exoénergétique (explosion, fusion, fission…)

et les solutions sont donc variées.

Nous allons étudier un cas typique, l'encastrement: après la collision les objets restent solidaires. La collision est dite **totalement inélastique**.

Après collision, ils possèdent donc la même vitesse $\overrightarrow{V'}$. L'équation est simple:

$$\boxed{m_1\overrightarrow{V_1} + m_2\overrightarrow{V_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{V'}}$$

Nous traiterons ci-dessous le cas de deux objets dont un est immobile au départ: $\overrightarrow{V_2} = \vec{0}$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement conduit donc à :

$\overrightarrow{V'} = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{V_1}$ ce qui prouve que $\overrightarrow{V'}$ et $\overrightarrow{V_1}$ sont colinéaires.

Calculons les variations de vitesse :

Masse 1: $V' - V_1 = \dfrac{-m_2}{m_1 + m_2}V_1$

Masse 2 $V' - 0 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}V_1$

Et donc, en effectuant le rapport :

$$\left|\frac{V' - 0}{V' - V_1}\right| = \frac{m_1}{m_2}$$

Encore une fois, c'est la plus petite masse qui subit la plus grande variation de vitesse, ce qui était déjà le cas pour une collision élastique. Une collision entre véhicules est généralement partiellement élastique, ce qui ne change rien à la conclusion : la masse la moins importante subit toujours le maximum de variation de vitesse.

La perte d'énergie cinétique du système se calcule aisément, et est égale à :

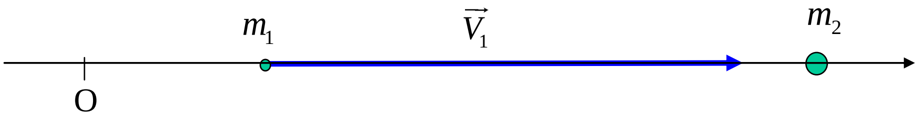
$$\frac{m_2}{m_1 + m_2}E_{c1}$$

Elle est faible si $m_2 << m_1$, d'autant plus grande que la masse m_2 est élevée, et quasiment totale si $m_2 >> m_1$.

NB : que les collisions soient élastiques ou inélastiques, il est toujours possible de se ramener au cas où un des deux objets est immobile en effectuant un changement de référentiel (et repère par la même occasion) se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{V_2}$ par exemple.

Collision élastique, masse 2 immobile

Repère du laboratoire : **avant**



$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}_G = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1$$

Repère du centre de masse:

quantité de mouvement totale toujours nulle

quatre |quantités de mouvement| égales

Avant

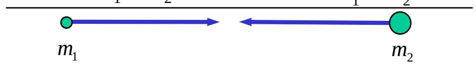
La masse 2 étant immobile dans le laboratoire,

$\vec{V}_2^* = -\vec{V}_G = -[m_1/(m_1+m_2)]\vec{V}_1$

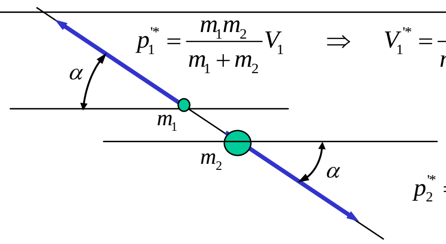
Et par conséquent:

$\vec{p}_2^* = -[m_1 m_2/(m_1+m_2)]\vec{V}_1 = -\vec{p}_1^*$

$$\vec{p}_1^* = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1 \qquad \vec{p}_2^* = -\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1$$



Après



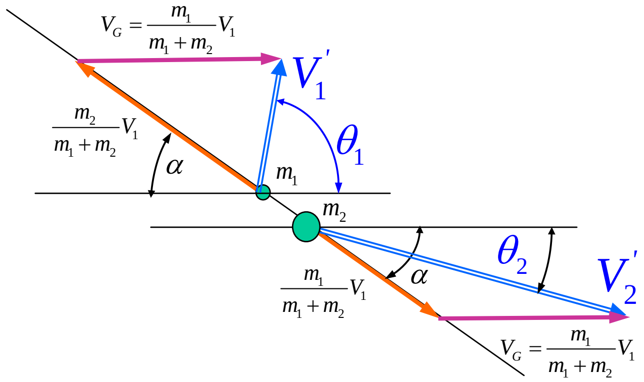
$$p_1^{'*} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}V_1 \quad \Rightarrow \quad V_1^{'*} = \frac{m_2}{m_1+m_2}V_1$$

$0 < \alpha < \pi$

$$p_2^{'*} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}V_1 \quad \Rightarrow \quad V_2^{'*} = \frac{m_1}{m_1+m_2}V_1$$

Retour dans le repère du laboratoire (après)

Ajouter $\vec{V}_G$ aux vitesses

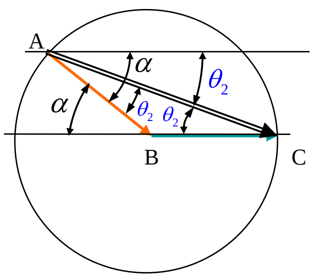


$$tg\theta_2 = \frac{\frac{m_1}{m_1+m_2}V_1 \sin\alpha}{\frac{m_1}{m_1+m_2}V_1\cos\alpha + \frac{m_1}{m_1+m_2}V_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 1} = \frac{2\sin\alpha/2\cos\alpha/2}{2\cos^2\alpha/2} = tg\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{\alpha}{2}$$

$$tg\theta_1 = \frac{\frac{m_2}{m_1+m_2}V_1 \sin\alpha}{\frac{m_1}{m_1+m_2}V_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}V_1\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\frac{m_1}{m_2} - \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad tg\theta_1 = \frac{\sin 2\theta_2}{\frac{m_1}{m_2} - \cos 2\theta_2}$$

Rappel: dans le plan nous avons 4 inconnues
(2 composantes pour chaque vecteur vitesse après collision)
et seulement 3 équations.
Donc il faut une donnée supplémentaire pour résoudre le système

Démonstration géométrique pour $\theta_2(\alpha)$



ABC Isocèle
(ou théorème de l'angle au centre et de l'angle au sommet) =>

$\Rightarrow \quad \alpha = 2\theta_2$

Information supplémentaire (triangle ABC):

$$V_2' = 2\frac{m_1}{m_1+m_2}V_1\cos\theta_2$$

7. Collisions et référentiel lié au centre de masse

7.1 Cas général

La somme des forces extérieures étant nulle, **la vitesse du centre de masse $\overrightarrow{V_G}$ est constante** (cf. Chapitre Principes fondamentaux, Centre de masse). Nous allons montrer qu'un référentiel **en translation** à la vitesses $\overrightarrow{V_G}$ par rapport au laboratoire, est un référentiel privilégié pour exprimer les propriétés des collisions. Le plus simple est de prendre un repère ayant son origine en G (GXYZ). Attention, le centre de masse a été défini pour des masses constantes.

Si G est le centre de masse de deux points situés en M_1 et M_2, alors, par définition $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$

Dans ce référentiel, G est fixe et par conséquent, $d\overrightarrow{GM_i}/dt$ exprime la vitesse $\overrightarrow{V_i^*}$ du point M_i (l'astérisque indique que la vitesse est exprimée dans un repère lié au centre de masse).

La dérivée par rapport au temps de la définition du centre de masse conduit à :

$m_1\overrightarrow{V_1^*} + m_2\overrightarrow{V_2^*} = \vec{0}$ soit : $\overrightarrow{p_1^*} + \overrightarrow{p_2^*} = \vec{0}$

La quantité de mouvement totale exprimée dans un repère lié au centre de masse est donc nulle.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc:

$$\overrightarrow{p_1^*} + \overrightarrow{p_2^*} = \overrightarrow{p_1'^*} + \overrightarrow{p_2'^*} = \vec{0}$$

Chacune des deux sommes nulles nous conduit à:

$|p_1^*| = |p_2^*|$ et $|p'^*_1| = |p'^*_2|$

7.2 Collision élastique

Dans le repère GXYZ du centre de masse, la conservation de l'énergie devient

$$\frac{1}{2}\frac{(p_1^*)^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{(p_2^*)^2}{m_2} = \frac{1}{2}\frac{(p_1'^*)^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{(p_2'^*)^2}{m_2}$$

D'après les résultats précédents $|p_1^*| = |p_2^*|$ et $|p'^*_1| = |p'^*_2|$ donc :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(p_1^*)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(p_1'^*)^2$$

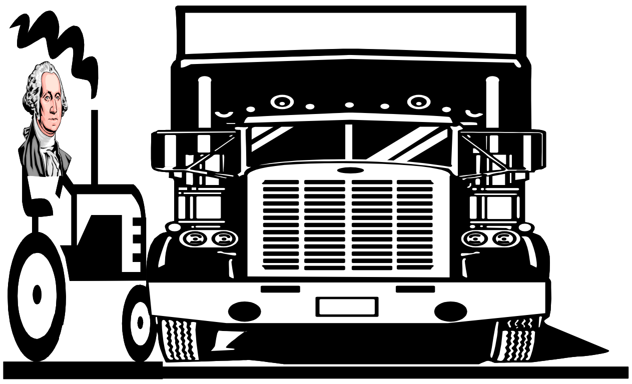
Ce qui prouve que $(p_1^*)^2 = (p_1'^*)^2$ et donc que la norme de la quantité de mouvement de chaque masse, exprimée dans un repère lié au centre de masse n'a pas varié : $|p_1^*| = |p'^*_1|$.

Cette égalité, ajouté aux relations précédentes $|p_1^*| = |p_2^*|$ et $|p'^*_1| = |p'^*_2|$, prouve que les quatre normes des quantités de mouvement impliquées dans la collision sont égales :

$$\boxed{|p_1^*| = |p_2^*| = |p_1'^*| = |p_2'^*|}$$

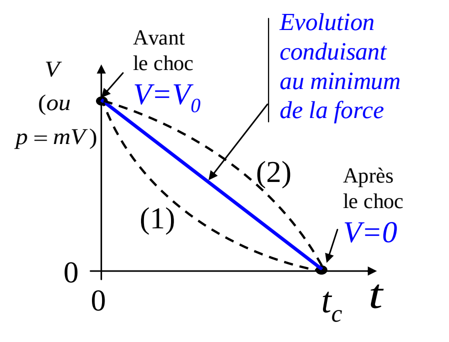
Ce résultat, d'une très grande simplicité, confirme qu'un référentiel lié au centre de masse est bien un référentiel privilégié.

Choc, élastique ou non, et sécurité



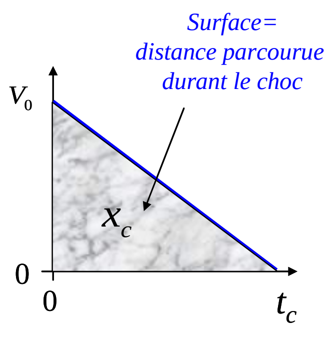
Dans un choc, ce qui est important pour l'organisme, ce sont les forces qui lui sont appliquées.
Prenons l'exemple des cervicales de la colonne vertébrale qui doivent assurer avec les muscles le maintien de la tête.
La **force** est égale à **dp/dt** , ou plus physiquement δp/δt,
p étant la quantité de mouvement DE LA TETE, δp sa variation, et δt la durée de la collision.
Les forces sont donc d'autant moins élevées:
- que la tête est légère, mais là on n'y peut pas grand chose
- que la variation de vitesse est moins élevée: donc se trouver de préférence dans un véhicule de masse élevée.
- que le temps durant lequel cette variation s'opère est long: donc élasticité souhaitable
pour le véhicule et la ceinture… mais pas trop!

Choc inélastique contre un mur



La droite conduit à une force |F | =dp/dt moins élevée que d'autres courbes que l'on pourrait imaginer, telles que (1) ou (2) C'est un cas (idéalisé) qui permet d'estimer la force minimale que subit le corps en décélération.

$$Force\,minimale = \frac{mV_0}{t_c}$$



$$x_c = \frac{1}{2}V_0 t_c$$

$$Force\,minimale = \frac{\frac{1}{2}mV_0^2}{x_c} = \frac{Energie\,cinétique}{x_c}$$

Attention, pour les vitesses, ceci implique seulement :

$|V_1^*| = |V'^*_1|$

$|V_2^*| = |V'^*_2|$

Mais **n'implique pas** par exemple :

$|V_1^*| = |V_2^*|$ Nous avons au contraire, encore une fois: petite masse … grande vitesse

7.3 Collision totalement inélastique (encastrement)

La conclusion du cas général reste évidemment valable :

$|p_1^*| = |p_2^*|$ et $|p'^*_1| = |p'^*_2|$

Après la collision, les deux masses sont solidaires, donc le centre de masse est confondu avec les masses et par conséquent:

$V_1^{'*} = V_2^{'*} = 0$ (et de même évidemment: $p_1^{'*} = p_2^{'*} = 0$)

Les deux masses sont immobiles au point G.

Il n'y a plus d'énergie cinétique dans un repère lié au centre de masse.

L'énergie cinétique de départ, exprimée dans le repère du centre de masse :

$\frac{1}{2}\frac{(p_1^*)^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{(p_2^*)^2}{m_2}$ est totalement perdue.

Ceci n'est pas le cas dans le référentiel du laboratoire, comme nous l'avons vu.

Il est intéressant de montrer que, quel que soit le référentiel et le type de collision, les variations d'énergies cinétiques sont identiques.

7.4 Changement de repère

Il est utile de pouvoir passer des vitesses $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ dans le repère original (du laboratoire) aux vitesses exprimées dans celui du centre de masse … car ils sont rarement confondus.

Il faut repartir de la 2ème définition du centre de masse dans le repère Oxyz

$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$

dont la dérivée par rapport au temps donne la vitesse dans le repère Oxyz:

$(m_1 + m_2)\vec{V_G} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}$

Le repère lié au centre de masse GXYZ est en translation pure par rapport au repère Oxyz. Dans ce cas (cf. Changement de repère), la vitesse de chaque masse dans le repère Oxyz est donnée par:

$\vec{V_1} = \vec{V_G} + \vec{V_1^*}$ *et* $\vec{V_2} = \vec{V_G} + \vec{V_2^*}$

Donc, pour V_1 par exemple :

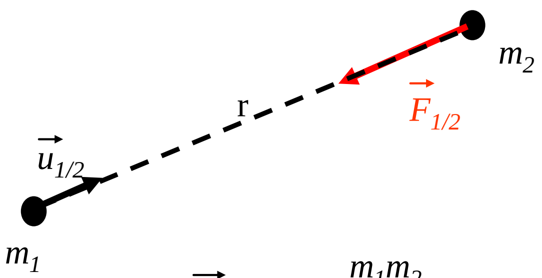
$\vec{V_1} = \vec{V_G} + \vec{V_1^*} = \frac{m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}}{m_1 + m_2} + \vec{V_1^*}$ d'où l'on tire facilement :

$(m_1 + m_2)\vec{V_1^*} = m_2(\vec{V_1} - \vec{V_2})$

Des relations analogues relient V_2^* à $\vec{V_2} - \vec{V_1}$, $V_1^{'*}$ à $\vec{V_1'} - \vec{V_2'}$, et $V_2^{'*}$ à $\vec{V_2'} - \vec{V_1'}$

Force et champ

Force

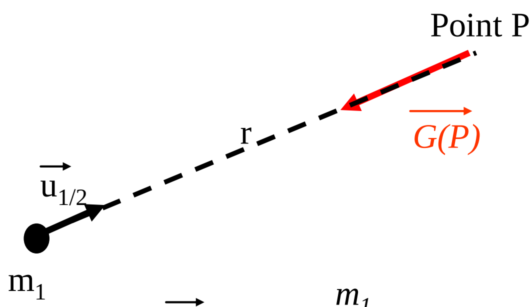


$$\vec{F}_{1/2} = - K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

$$\vec{F}_{1/2} = - \vec{F}_{2/1}$$

Champ

$$\vec{F}_{1/2} = m_2 \, \vec{G}(P)$$



$$\vec{G}(P) = - K_G \frac{m_1}{r^2} \vec{u}_{1/2}$$

Le champ de pesanteur $\vec{G}(P)$ lié à m_1 ne dépend que de la position du point P par rapport à la masse m_1.

m_2 n'intervient pas dans l'expression du champ

VIII. Gravitation

1. Forces de gravitation

La force d'attraction entre 2 masses ponctuelles de masse m_1 et m_2, établie par Newton vers 1650, s'exprime par :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \overrightarrow{u_{1/2}}$$

$\overrightarrow{F_{1/2}}$: action de la masse m_1 sur la masse m_2

K_G : constante de gravitation universelle =6,6726 10^{-11} $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ (précision actuelle 0,01% seulement !)

r : distance entre les deux points

$\overrightarrow{u_{1/2}}$: vecteur unitaire dirigé de 1 vers 2

Cette relation reste vraie si les masses ne sont pas ponctuelles, mais présentent une symétrie sphérique, cf. théorème de Gauss, qui sera démontré en électrostatique.
Attention, il faut non seulement que la masse ait un aspect sphérique, mais aussi que la distribution intérieure des masses soit à symétrie sphérique. Ceci n'impose pas bien sûr une masse volumique constante, elle peut évoluer en fonction du rayon.

2. Champ de gravitation

La force de gravitation est une force d'interaction à distance. Si la masse m_1 est présente quelque part, toute masse m_2 subira une force. Il est commode de réécrire $\overrightarrow{F_{1/2}}$ sous la forme:

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = \left(-K_G \frac{m_1}{r^2} \overrightarrow{u_{1/2}} \right) m_2$$

Pour décrire l'interaction à distance de m_1 sur une masse quelconque (m_2 par exemple) située au point P, il est donc possible de définir un champ de vecteurs

$$\overrightarrow{G_{(P)}} = -K_G \frac{m_1}{r^2} \overrightarrow{u_{1/2}}$$

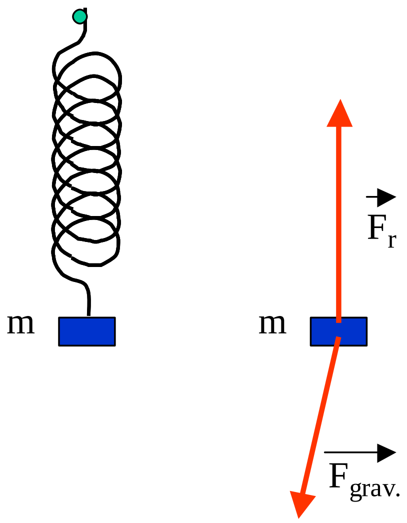
Ce champ n'est fonction que de la valeur de la masse m_1 et de la position du point P par rapport à la masse m_1. Il s'exprime en $m.s^{-2}$.

L'action de m_1 sur m_2 s'écrit alors :

$$\overrightarrow{F_{1/2}} = m_2 \overrightarrow{G_{(P)}}$$

Si la terre était sphérique, on pourrait calculer son champ de gravitation en fonction de r sachant que :
$m_T = 5,977\ 10^{24}$ kg

Poids $\vec{P}$



Définition

$$\vec{P} = -\vec{F}_r$$

$$\vec{F}_r + \vec{F}_{grav.} = m\vec{\Gamma}$$

$$\boxed{\vec{P} = \vec{F}_{grav.} - m\vec{\Gamma}}$$

Remarque : ce qui a été fait pour la masse m_1 aurait pu être fait pour m_2. Le problème est entièrement symétrique. Dans les faits, il existe souvent une très grosse masse (Terre, Planète, Soleil …) qui gère les forces dans son environnement et pour laquelle il est intéressant de définir un champ de gravitation.

3. Poids d'un objet

Nous en donnerons une définition "expérimentale" en suspendant une masse m à un ressort :
le poids est exactement la force égale et opposée à la force $\overrightarrow{F_r}$ exercée par le ressort sur la masse m.

$\overrightarrow{Poids} = -\overrightarrow{F_r}$

3.1 Analyse du poids.

Sa direction, donc celle du ressort, indique par définition la verticale du lieu.
La masse m suspendue n'est soumise qu'à deux forces : celle du ressort et la gravitation. Donc en appliquant le PFD :

$\overrightarrow{F_r} + \overrightarrow{F_{grav.}} = m\vec{\Gamma}$, d'où la relation donnant le poids :

$$\boxed{\overrightarrow{Poids} = \overrightarrow{F_{grav.}} - m\vec{\Gamma}}$$

Il faut donc évaluer les deux composantes du poids. $\overrightarrow{F_{grav.}}$ et $-m\vec{\Gamma}$

$\overrightarrow{F_{grav.}}$

Si la terre était sphérique, cette force serait simple et égale à :

$$\overrightarrow{F_{grav.}} = -(K_G \frac{m_T}{r^2} \overrightarrow{u_r})m$$

$\overrightarrow{u_r}$ est dirigé suivant un rayon (vecteur unitaire identique à celui des coordonnées sphériques).
En se plaçant sur la terre (mais on peut aller sur la lune), à sa surface, $r = R_T$ et le terme entre parenthèses est le $\overrightarrow{G_{(P)}}$ local et vaut 9,81ms^{-2}.

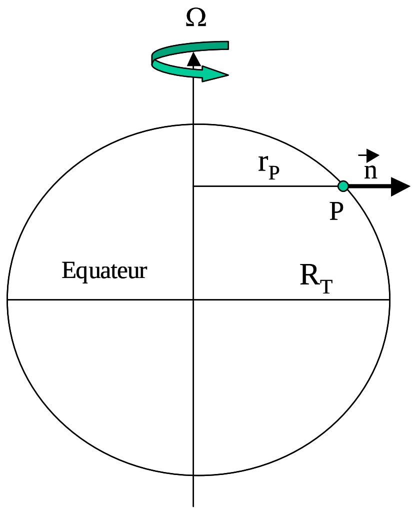
Mais la terre n'est pas tout à fait sphérique, elle se rapproche d'un ellipsoïde d'aplatissement 2 fois 22km, ce qui a plusieurs conséquences :

La force n'est pas égale à $-(K_G \frac{m_T}{r^2} \overrightarrow{u_{1/2}})m$, ni en intensité ni en direction.

La force exercée par la terre ramène les objets vers le plan équatorial, ce qui peut se comprendre, qualitativement, en remplaçant l'ellipsoïde par une sphère à laquelle on rajoute un bourrelet de matière à l'équateur.
Toutefois l'effet lié à une forme ellipsoïdale est faible comparé au terme d'accélération $m\vec{\Gamma}$.

La terre

Accélération d'un point de la terre liée à sa rotation propre

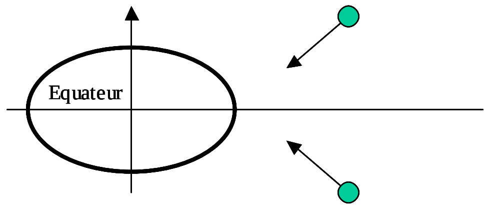


$$\vec{\Gamma} = - r_P \, \Omega^2 \vec{n}$$

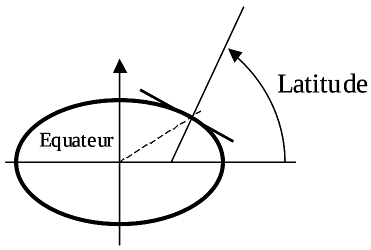
$= 0{,}034 ms^{-2}$ à l'équateur

Effets de la non sphéricité

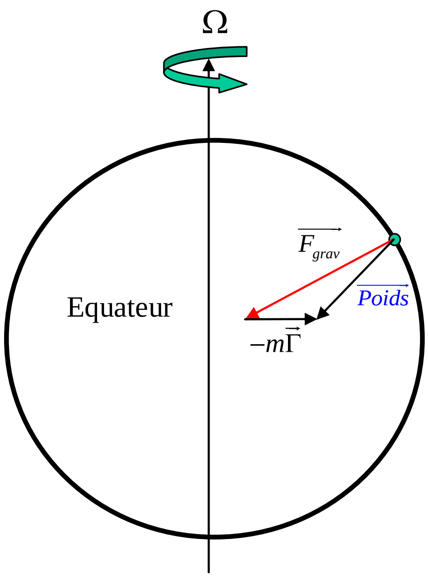
1/ La force n'est pas dirigée vers le centre de la terre
Le renflement de l'équateur "ramène" les objets dans le plan de l'équateur



2/ Définition de la latitude



Bilan gravitation + rotation terre sur elle -même



$m\vec{\Gamma}$

La masse suspendue sous le ressort n'est pas immobile car la terre tourne sur elle-même et autour du soleil.
La rotation ce la terre autour de son axe Sud Nord entraîne la masse m dans un mouvement circulaire uniforme. L'accélération correspondante est parallèle à l'équateur et vaut :

$$-r_P\Omega^2\vec{n}$$

Ce terme est nul aux pôles et maximum à l'équateur où $R_T\Omega^2$ = 0,034ms^{-2}.
Pour insister, cette accélération n'est pas dirigée vers le centre de la sphère terrestre, mais vers le centre du cercle décrit par la masse.

La présence de la Lune et aussi celle du Soleil conduisent à un effet de marée, lié à la force gravitationnelle, mais aussi aux rotations engendrées. Voir la (bonne) littérature ou le site *physique.belledonne ...*et aussi le dernier cours d'amphi. L'ordre de grandeur est 10^{-6}ms^{-2} pour l'effet cumulé de la Lune et du Soleil.

3.2 Bilan

En supposant la terre sphérique et en négligeant l'effet de la rotation de la terre autour du soleil, le poids s'écrit :

$$\overrightarrow{Poids} \sim \left(-K_G\frac{m_T}{r^2}\overrightarrow{u_r} + r_P\Omega^2\vec{n}\right)m$$

4. Accélération locale de la pesanteur

Par définition :

$$\vec{g} = \frac{\overrightarrow{Poids}}{m}$$

Quel est l'intérêt de définir cette grandeur ? Tous les termes qui interviennent dans le poids sont proportionnels à la masse, donc en divisant le poids par la masse, on définit une propriété de l'espace (un champ de vecteurs) qui est indépendante de la masse *m*. C'est très exactement le champ de pesanteur $\overrightarrow{G_{(P)}}$ défini plus haut.

En prenant l'expression approximative du poids établie précédemment, $\vec{g}$ s'écrit :

$$\vec{g} \sim -K_G\frac{m_T}{r^2}\overrightarrow{u_r} + r_P\Omega^2\vec{n}$$

Dans un souci de simplification, nous travaillerons généralement sans le terme d'accélération :

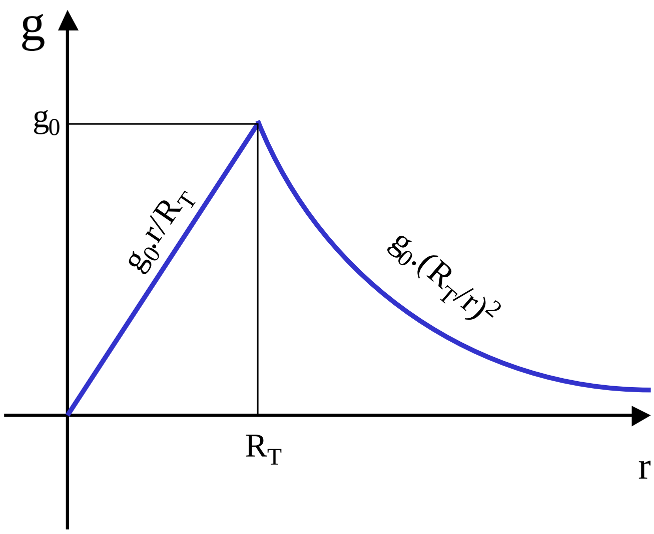
$$\boxed{\vec{g} \sim -K_G\frac{m_T}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$$

Evolution avec l'altitude :
A la surface du sol, $r = R_T$ et nous poserons $g = g_0$. A une altitude z, $r = R_T + z$.
D'où l'évolution relative du module de g :

$$\frac{g}{g_0} = \left(\frac{R_T}{R_T + z}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 + z/R_T}\right)^2 \sim 1 - 2\frac{z}{R_T}$$

Si la terre était sphérique et homogène (ρ = Cte)

(Voir théorème de Gauss en électrostatique)



Sur terre avec un rayon de 40000km/(2π)=6357km, la diminution est de 0,3% à 10km d'altitude.

Et à l'intérieur de la Terre ?
L'accélération g doit être nulle au centre, mais pour $0 < r < R_T$ le problème est compliqué si la masse volumique n'est pas constante … ce qui est le cas.
Par contre si cette masse volumique est supposée constante, g est linéaire jusqu'à la surface où il vaut g_0 (cf. démonstration avec le théorème de Gauss en électrostatique). A l'extérieur il décroît évidemment en $1/r^2$, comme nous l'avons vu.
Un joli petit problème consiste à supposer que l'on puise creuser un tunnel de part en part de la terre, ou prendre un système très peu dense qui pourrait être traversé. Si g varie comme r (variation linéaire), la force est donc proportionnelle à la distance au centre : donc si un objet est lâché de la surface, il va effectuer un mouvement connu … dont on pourra comparer la période avec celle d'un satellite qui ferait le tour : les périodes sont égales!

5. Travail et énergie potentielle ($r>R_T$)

Nous allons ici donner les expressions dans les 2 cas : g constant (approximation) et g en $1/r^2$
Rappel : si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire, $\vec{u}.d\vec{u} = 0$ car $(\vec{u})^2 = 1$

FORCES

$\vec{F} = -mg\vec{k}$ $\vec{k}$ vers le haut.	$\vec{F} = -K_G \dfrac{m_T m}{r^2}\vec{u}_r$

TRAVAIL $dW = \vec{F}.\vec{dl}$

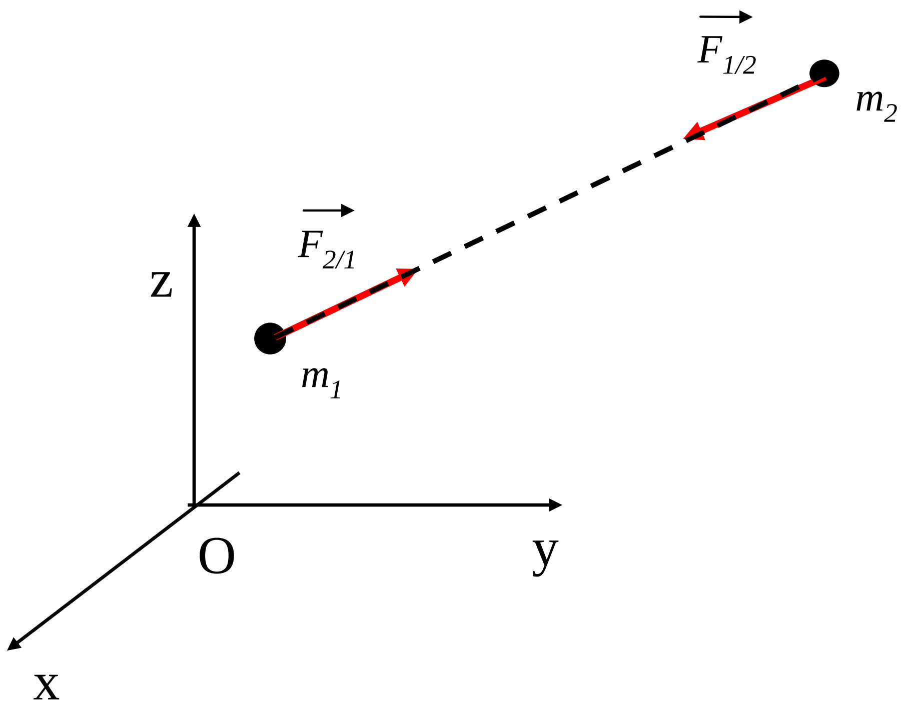
$\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ $dW = -mgdz$ $W_A^B = -mg(z_B - z_A)$	$\vec{dl} = dr.\vec{u_r} + r.d\vec{u_r}$ $dW = -K_G \dfrac{m_T m}{r^2} dr$ $dW = d(K_G \dfrac{m_T m}{r})$ $W_A^B = K_G m_T m(\dfrac{1}{r_B} - \dfrac{1}{r_A})$

ENERGIE POTENTIELLE $dE_p = -dW$

$dE_P = +mgdz$ $E_P = mgz + Cte$	$dE_P = -d(K_G \dfrac{m_T m}{r})$ $E_p = -K_G \dfrac{m_T m}{r} + Cte'$

E_p est une fonction croissante de l'altitude.

Deux corps



IX. Problème des deux corps

L'idée de ce chapitre est d'illustrer l'ensemble du cours avec un système
- qui a été historiquement le grand problème de la mécanique
- qui a généré plusieurs concepts mathématiques: différentielles …
- qui rythme notre vie quotidienne: soleil, …
- et se retrouve souvent d'actualité (satellites …).

C'est un peu le problème des collisions où l'on regarderait le détail de la collision.

Nous allons successivement appliquer au système des deux corps en interaction gravitationnelle, les notions que nous avons développées précédemment.
Les masses seront considérées constantes.

1. Les deux corps (ponctuels, ou à symétrie sphérique)

$\overrightarrow{F_{1/2}} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$

$\vec{u}$ vecteur unitaire, dirigé de 1 vers 2

$\overrightarrow{F_{2/1}} = +K_G \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$

Comme il se doit la troisième loi de Newton (action/réaction) est vérifiée :

$\overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2/1}} = \vec{0}$

2. Quantité de mouvement

$\vec{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$

D'après le PFD :

$d\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{F_{2/1}}dt$

$d\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{F_{1/2}}dt$

D'où :

$d\vec{p} = d\overrightarrow{p_1} + d\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{F_{1/2}}dt + \overrightarrow{F_{2/1}}dt = [\overrightarrow{F_{1/2}} + \overrightarrow{F_{2/1}}]dt$

Qui compte tenu de $\overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{F_{1/2}} = \vec{0}$ conduit à :

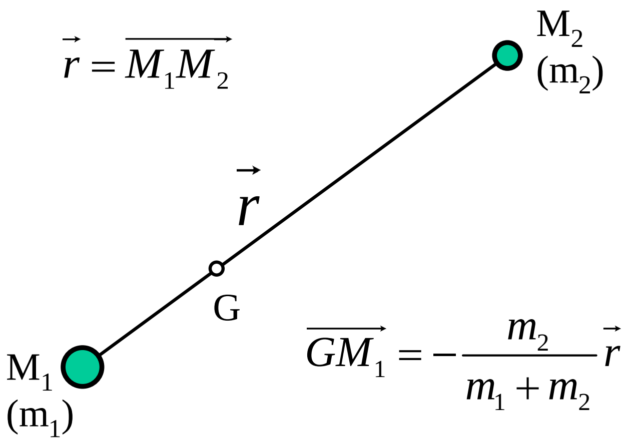
$d\vec{p} = \vec{0}$

La variation de la quantité de mouvement est nulle, donc :

$\boxed{\vec{p} = \overrightarrow{Cte}}$

Centre de masse

$$\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$$



$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\overrightarrow{GM_2} = +\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

3. Centre de masse

La définition générale :

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

se réduit ici à :

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 \overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$$

Pour plus de commodité, nous allons faire intervenir le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$m_1 \overrightarrow{GM_1} + m_2 (\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}) = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad (m_1 + m_2)\overrightarrow{GM_1} = -m_2 \overrightarrow{M_1M_2}$$

En introduisant

$$\boxed{\vec{r} = \overrightarrow{M_1M_2}}$$

les 2 grandeurs $\overrightarrow{GM}_1$ et $\overrightarrow{GM}_2$ s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{GM_1} &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \\ \overrightarrow{GM_2} &= +\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \end{aligned}}$$

Donc si $\vec{r}$ est connu, les positions des masses m_1 et m_2 sont connues par rapport au point G.
Le problème va donc consister à établir les propriétés du centre de masse et à déterminer $\vec{r}$.
Dans la suite, nous aurons besoin des distances (positives) :

$$r_1 = \left|\overrightarrow{GM}_1\right|$$

$$r_2 = \left|\overrightarrow{GM}_2\right|$$

d'après la définition du centre de masse, il est facile de montrer que :

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

Dans le cas très fréquent où $m_1 >> m_2$, G est confondu avec m_1, et $r_2 \sim r$.

4. Propriétés du centre de masse

4.1 Quantité de mouvement.

Soit un repère Galiléen Oxyz.
Introduisons le point O dans la relation de définition du centre de masse :

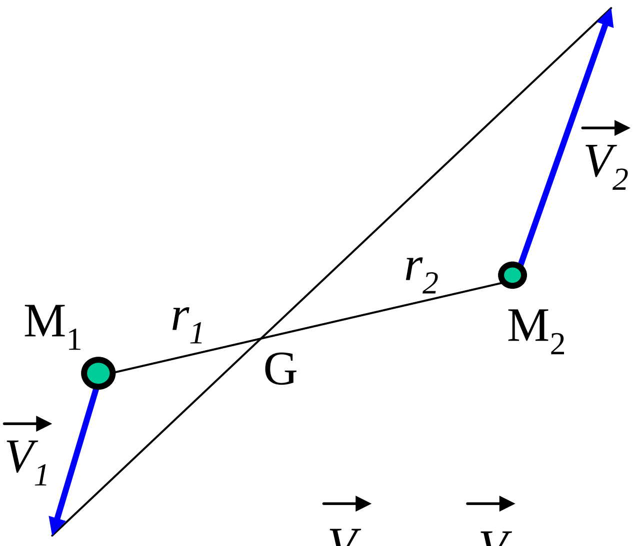
$$m_1(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_1}) + m_2(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_2}) = \vec{0}$$ qui se réécrit :

$$(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}$$ autre manière de définir le centre de masse.

En dérivant par rapport au temps :

$$(m_1 + m_2)\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} = m_1 \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} + m_2 \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt}$$ soit

Vitesses et distances



$$\frac{\vec{V_2}}{r_2} = \frac{-\vec{V_1}}{r_1}$$

$$(m_1+m_2)\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}=m_1\overrightarrow{V_1}+m_2\overrightarrow{V_2}$$

$$(m_1+m_2)\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}=\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=\vec{p}$$

La quantité de mouvement totale $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$ est donc égale à la somme des masses multipliée par la vitesse du centre de masse, comme si la masse m_1+m_2 était affectée au centre de masse G.

4.2 Accélération du centre de masse

Nous avons montré (paragraphe 2) que la quantité de mouvement totale est constante. Donc :

$$(m_1+m_2)\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}=\overrightarrow{Cte}$$

La vitesse du centre de masse $\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ est donc constante, et son accélération est nulle.

NB : Dans le repère Oxyz, la quantité de mouvement totale peut donc être écrite :

$(m_1+m_2)\overrightarrow{V_G}$

5. Repère galiléen lié au centre de masse GXYZ

La vitesse du centre de masse étant constante par rapport au repère Galiléen Oxyz, il est donc possible de définir un nouveau repère galiléen en translation uniforme par rapport à Oxyz, dont l'origine est G : repère GXYZ.

Nous allons maintenant travailler exclusivement dans ce repère et donc toutes les grandeurs vectorielles (positions, vitesses, accélérations, moments) et scalaires (énergies …) seront calculées dans GXYZ. Pour simplifier nous garderons le mêmes notations : par exemple $\overrightarrow{V_1}$ reste $\overrightarrow{V_1}$, pour éviter par exemple d'écrire chaque fois $\overrightarrow{V_1^*}$.

Dans ce repère la quantité de mouvement totale est nulle puisque $\overrightarrow{V_G}=\vec{0}$. Donc :

$$m_1\overrightarrow{V_1}+m_2\overrightarrow{V_2}=\vec{0}$$

et comme d'autre part :

$m_1r_1=m_2r_2$ alors :

$$\boxed{\frac{\overrightarrow{V_1}}{r_1}=-\frac{\overrightarrow{V_2}}{r_2}}$$

Ce qui prouve que les vitesses des deux corps :

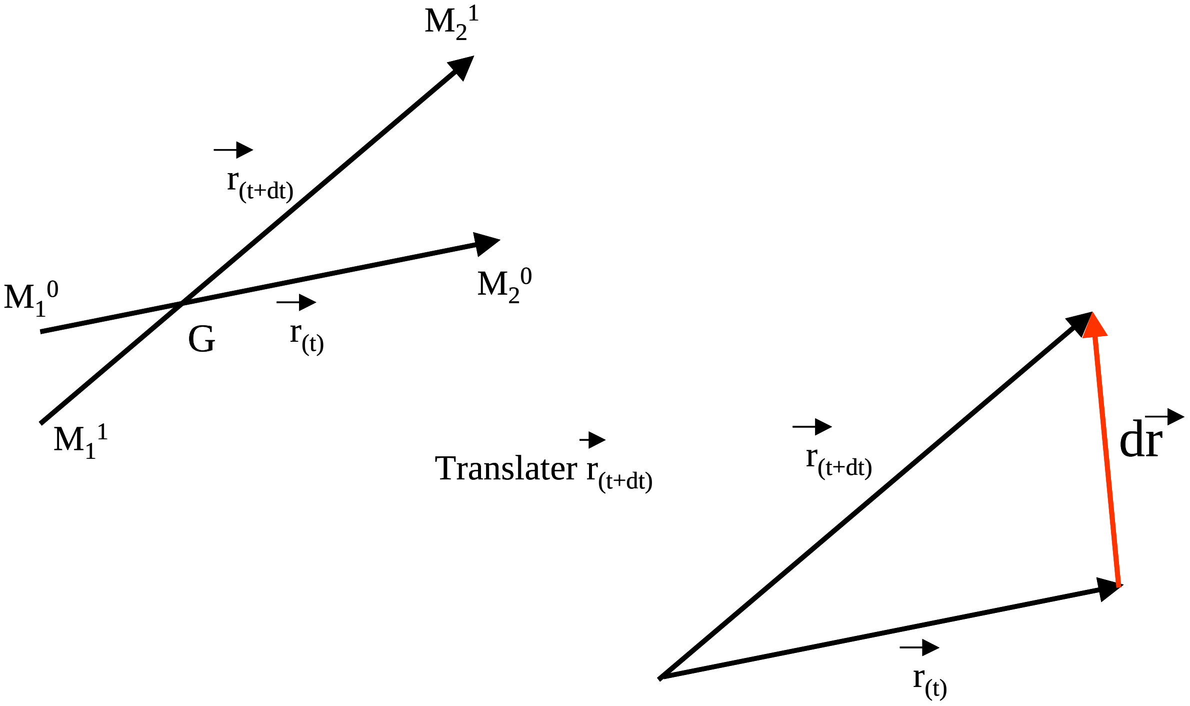
- sont de même direction
- sont de sens opposés
- sont proportionnelles aux distances de chacun des corps au centre de masse.

La figure permet de bien visualiser le mouvement des deux corps par rapport à G.

6. Application du principe fondamental de la dynamique dans GXYZ

Dan le nouveau repère, l'application du PFD conduit à :

Variation du vecteur $\vec{r}$



$$m_1\frac{d^2\overrightarrow{GM_1}}{dt^2}=\overrightarrow{F_{2/1}}$$

$$m_2\frac{d^2\overrightarrow{GM_2}}{dt^2}=\overrightarrow{F_{1/2}}$$

L'idée est de faire apparaître

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{r}\quad(=r\vec{u})$$

En divisant la première équation par m_1, la seconde par m_2 et en effectuant la différence :

$$\frac{d^2\overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2}=-\frac{\overrightarrow{F_{2/1}}}{m_1}+\frac{\overrightarrow{F_{1/2}}}{m_2}$$

qui en tenant compte de $\overrightarrow{F_{1/2}}+\overrightarrow{F_{2/1}}=\vec{0}$ se résume à :

$$\frac{d^2\overrightarrow{M_1M_2}}{dt^2}=(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})\overrightarrow{F_{1/2}}$$

d'où en explicitant la force :

$$\frac{d^2(r\vec{u})}{dt^2}=-(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})K_Gm_1m_2\frac{\vec{u}}{r^2}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{d^2(r\vec{u})}{dt^2}=-\frac{K_G(m_1+m_2)}{r^2}\vec{u}}$$

Cette équation est suffisante pour décrire $\vec{r}(t)$. Elle sera résolue plus loin.

Pour simplifier certaines écritures, la masse réduite μ est souvent introduite :

$$\boxed{\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}}\qquad\text{ou}\qquad\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

Elle est dite réduite car μ est plus faible que la plus faible des 2 masses. D'où :

$$\mu\frac{d^2(r\vec{u})}{dt^2}=-\frac{K_Gm_1m_2}{r^2}\vec{u}$$

équation de la forme $m\vec{\Gamma}=\vec{F}$

7. Moment cinétique

Le moment cinétique total est la somme des moments cinétique de chacun des corps (c'est une simple addition de vecteurs). Nous le calculerons par rapport au point G, ce qui simplifiera plus loin l'application du théorème du moment cinétique.

$$\vec{L}=\overrightarrow{GM_1}\wedge m_1\frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}+\overrightarrow{GM_2}\wedge m_2\frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}$$

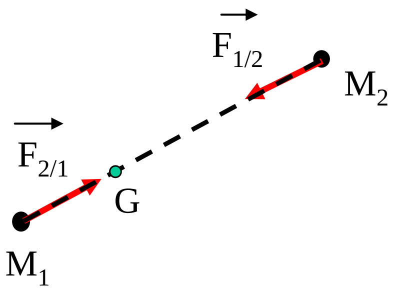
D'après les expressions de $\overrightarrow{GM_1}$ et $\overrightarrow{GM_2}$ établies dans le paragraphe centre de masse:

$$\frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}=+\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

En remplaçant chaque $\overrightarrow{GM_i}$ et sa dérivée $\frac{d\overrightarrow{GM_i}}{dt}$ par son expression en fonction de $\vec{r}$, le moment cinétique s'écrit finalement :

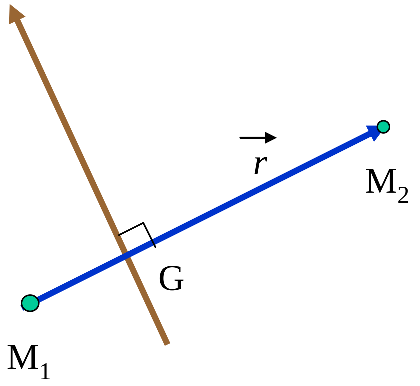
Moment cinétique



$$\overrightarrow{m_f} = \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{F_{1/2}} = \vec{O}$$

$$d\vec{L} = \overrightarrow{m_f}\, dt = \vec{O}$$

$$\vec{L} = \overrightarrow{Cte} = \vec{r} \wedge m\vec{V}$$



$\vec{r}$ perpendiculaire à $\vec{L}$, conclusion : mouvement plan

$\vec{L} = \mu\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$

Le vecteur $\vec{r}$ est bien défini ($= \overrightarrow{M_1M_2}$) et $d\vec{r}$ est explicité sur la figure.

Important : ces deux vecteurs $\vec{r}$ et $d\vec{r}$ définissent un plan, et $\vec{L}$ est perpendiculaire à ce plan.

8. Théorème du moment cinétique

8.1 Application du théorème

Ce théorème s'écrit :

$d\vec{L} = \overrightarrow{m_f}.dt$

où $\vec{L}$ est le moment cinétique par rapport à un **point fixe** du repère Galiléen utilisé, et $\overrightarrow{m_f}$ le moment des forces par rapport à ce point.

Il semble tout à fait opportun de choisir le centre de masse G pour appliquer ce théorème car les deux forces passent par le centre de masse. C'est aussi la raison pour laquelle nous avons calculé $\vec{L}$ par rapport au point G.

Le calcul du moment des forces devient :

$\overrightarrow{m_f} = \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{F_{2/1}} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{F_{1/2}}$

Les forces étant colinéaires aux $\overrightarrow{GM_i}$, les produits vectoriels sont nuls, et le moment total des forces est nul. Donc :

$$\boxed{\begin{aligned} d\vec{L} &= \vec{0} \\ \vec{L} &= \overrightarrow{Cte} \end{aligned}}$$

Remarque 1 : dans le chapitre moment, nous avions montré que le moment de deux forces égales et opposées (c'est le cas ici) est nul si les forces sont colinéaires (ce qui est aussi le cas). Nous aurions pu nous servir directement de ce résultat.

Rappel qui pourra vous servir un jour : pour un couple le moment des forces est indépendant du point fixe choisi.

Remarque 2 : cette conservation du moment cinétique est vraie pour toute force centrale: forces électrostatiques, corde, élastique …

8.2 Conséquence : mouvement dans un plan

$\vec{L}$ est perpendiculaire à $\vec{r}$ [car $\vec{L} = \mu\vec{r} \wedge (d\vec{r}/dt)$]

D'autre part :

$\vec{L} = \overrightarrow{Cte}$

Donc $\vec{r}$ est un vecteur :

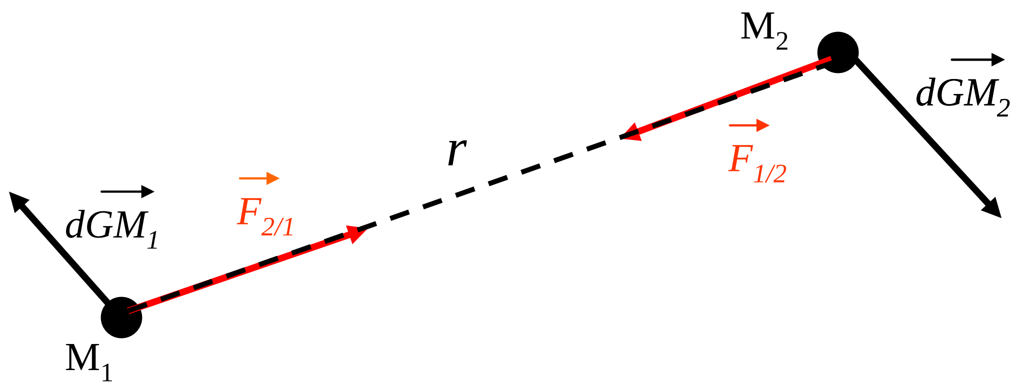
- constamment perpendiculaire au vecteur fixe $\vec{L}$
- qui passe toujours par le point G

LE MOUVEMENT EST DONC CONTENU DANS UN PLAN.

Cette conclusion fondamentale pour l'étude ultérieure aurait bien sûr pu être démontrée avec le PFD, mais la démonstration par le moment cinétique est de loin la plus élégante.

Remarque : beaucoup d'ouvrages font intervenir à la fois $\vec{r}$ et $d\vec{r}/dt$ pour démontrer que le problème se ramène à un problème plan : nous venons de voir que c'est inutile.

Travail des forces gravitationnelles



$$dW = \vec{F}_{2/1} d\overrightarrow{GM}_1 + \vec{F}_{1/2} d\overrightarrow{GM}_2$$

voir texte

$$dW = -K_G \frac{m_1 m_2}{r} dr$$

Il reste simplement à préciser ce plan : il peut-être défini à un instant quelconque par $\vec{r}$ et $d\vec{r}$ (ou $d\vec{r}/dt$), par exemple par les conditions initiales $\vec{r_0}$ et $\vec{V_0}$, mais il peut aussi l'être par la connaissance des positions à deux instants …
Il serait aussi possible ici de démontrer la loi des aires, mais elle a déjà été établie dans le chapitre moment cinétique, et nous allons la retrouver dans le chapitre suivant.

9. Energie cinétique du système

L'énergie cinétique est l'addition de deux scalaires :

$$E_c = \tfrac{1}{2} m_1 V_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Les vitesses V_1 et V_2 sont en fait $\dfrac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}$ établis précédemment :

$$E_c = \tfrac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2$$

Qui s'écrit simplement :

$$E_c = \tfrac{1}{2} \mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \qquad E_c = \tfrac{1}{2} \mu V^2 \qquad \left(\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \right)$$

Répartition de l'énergie cinétique : il est aisé de montrer que $m_1 (E_C)_1 = m_2 (E_C)_2$.
C'est la plus petite des deux masses qui possède la plus grande énergie cinétique.

10. Travail des forces gravitationnelles

Les travaux élémentaires s'ajoutent :

$$dW = \overrightarrow{F_{2/1}}\, d\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{F_{1/2}}\, d\overrightarrow{GM_2}$$

$$dW = -\overrightarrow{F_{1/2}}\, d\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{F_{1/2}}\, d(\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{M_1 M_2})$$

$$dW = \overrightarrow{F_{1/2}}\, d\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{F_{1/2}}\, d\vec{r}$$

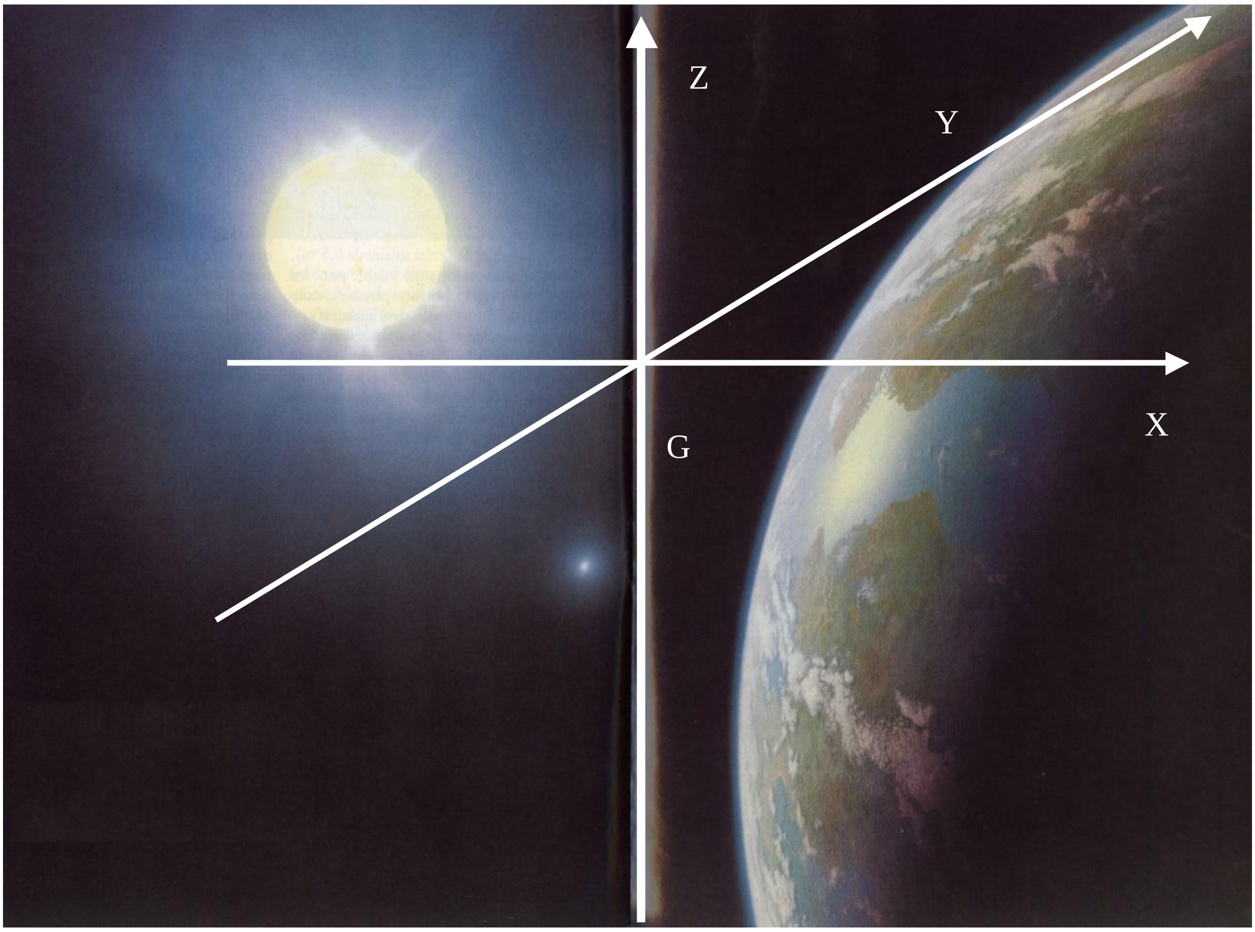
En explicitant la force :

$$dW = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}.d\vec{r}$$

Or

$d\vec{r} = d(r\vec{u}) = dr.\vec{u} + r.d\vec{u}$, et (rappel) $\vec{u}.d\vec{u} = 0$. Donc :

$$\boxed{dW = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr}$$


Z
Y
X
G

ou

$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = \left[K_G \frac{m_1 m_2}{r} \right]_A^B = K_G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Ce travail ne dépend que des distances initiale et finale. Il est négatif si les deux corps s'éloignent (r_B>r_A).

11. Energie potentielle

Par définition :

$dE_p = -dW$ d'où :

$$dE_P = +K_G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -d\left(K_G \frac{m_1 m_2}{r}\right)$$

$$\boxed{E_P = -K_G \frac{m_1 m_2}{r} + Cte}$$

C'est une fonction croissante de la distance entre les deux masses.
L'énergie potentielle est souvent prise nulle pour une distance infinie, ce qui ici annulerait la constante.

12. Energie mécanique

Par définition :

$$E_M = E_C + E_P$$

$$\boxed{E_M = \tfrac{1}{2} \mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - K_G \frac{m_1 m_2}{r} + Cte}$$

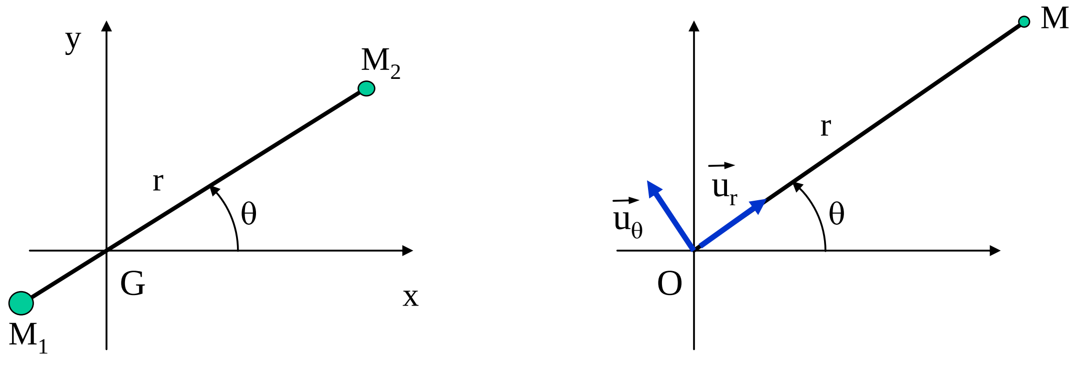
Les forces gravitationnelles étant conservatives, **l'énergie mécanique est constante**.

Avec l'énergie mécanique, nous avons fait le tour des notions aussi bien scalaires que vectorielles qui ont été introduites dans ce cours. La suite se propose de résoudre $\vec{r}(t)$ et donc de pouvoir situer les deux objets en fonction du temps.

Equation des deux corps

Problème physique

Transposition mathématique
Translation, les composantes sont inchangées



$$\frac{d^2 r\overrightarrow{u_r}}{dt^2} = -K_G \frac{m_1 + m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

X. Problème des deux corps: résolution

Pour obtenir les trajectoires et les positions des corps (astres, satellites, charges …), nous avons à résoudre une équation différentielle un peu plus compliquée que d'habitude qui va nécessiter plusieurs changements de variables et introduire la première équation transcendante de l'histoire.

1. Equations de départ

Nous partirons de l'équation obtenue par l'application directe du PFD. Comme toujours, cette équation contient toutes les informations sur l'évolution du système. Dans le repère GXYZ, cette équation s'écrit :

$$\frac{d^2(r\vec{u})}{dt^2} = -K_G(m_1+m_2)\frac{\vec{u}}{r^2} \qquad \text{[ou } \mu\frac{d^2(r\vec{u})}{dt^2} = -\frac{K_G m_1 m_2}{r^2}\vec{u}\text{]}$$

L'application du théorème du moment cinétique a prouvé que le mouvement est plan. Comme $\vec{r}$ intervient, il semble opportun de choisir un système de coordonnées polaires r,θ. Le fait que $\vec{r}$ n'ait pas son origine en G ne change rien au problème car il est parfaitement possible de faire glisser un vecteur : ses composantes ne sont pas modifiées (cf. figures).

Equation différentielle en coordonnées polaires :
le vecteur $\vec{u}$ devient $\overrightarrow{u_r}$ et le vecteur unitaire perpendiculaire dans le sens direct sera noté $\overrightarrow{u_\theta}$.
Pour la vitesse angulaire nous utiliserons :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

L'équation de la dynamique, homogène ici à une accélération, se réécrit donc :

$$\boxed{\frac{d^2(r\overrightarrow{u_r})}{dt^2} = -K_G(m_1+m_2)\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}}$$

Et l'accélération en coordonnées polaires s'écrit (voir le chapitre cinématique) :

$$\frac{d^2(r\overrightarrow{u_r})}{dt^2} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

D'où :

$$\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right)\overrightarrow{u_\theta} = -K_G(m_1+m_2)\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}$$

En identifiant les projections ou, de manière équivalente, en multipliant scalairement par $\overrightarrow{u_r}$ puis $\overrightarrow{u_\theta}$, nous obtenons 2 équations indépendantes:

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = -\frac{K_G(m_1+m_2)}{r^2}\\ &2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt} = 0\end{aligned}}$$

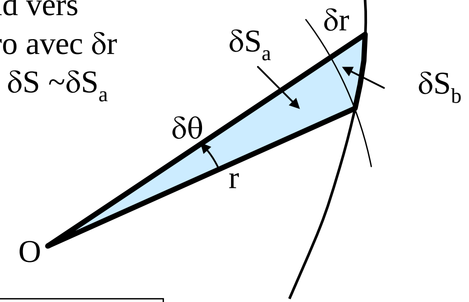
Loi des aires

$\delta S = \delta S_a + \delta S_b$

$\delta S_a = \pi r^2(\delta\theta/2\pi) = ½\ r^2\delta\theta$

$\delta S_b \sim$ triangle $\sim$ ½ $(r\delta\theta).(\delta r)$

$\delta S_b/\delta S_a \sim \delta r/r$
tend vers
zéro avec δr
=> $\delta S \sim \delta S_a$

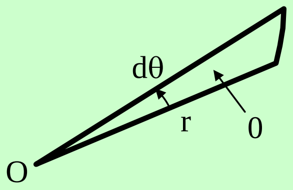


Donc:
$dS = ½\ r^2 d\theta$

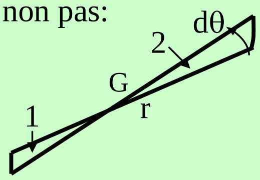
Avec la loi des aires:
$r^2 d\theta/dt = C$

$\boxed{dS=(C/2)dt}$

Attention, ½ $r^2d\theta$, c'est:

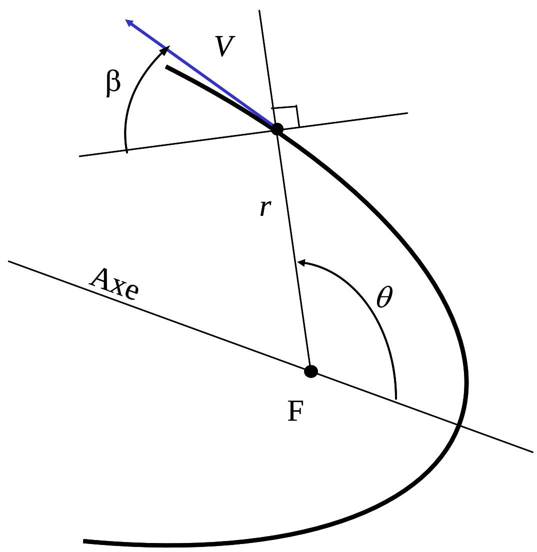


et non pas:



Remarque:
les surfaces 0 et 1+2 sont différentes.
(mais elles sont proportionnelles,
et donc la loi des aires serait aussi
vérifiée pour chacune des surfaces:
0 ou 1+2 ou 1 ou 2)

Différentes expressions de la constante des aires



C (m²/s)
$=$
$r^2\ \omega$
$=$
$r.(rd\theta/dt)$
$=$
$r.V\cos\beta$

La deuxième équation s'écrit plus simplement

$2dr\,\omega + r\,d\omega = 0$ ou

$$2\frac{dr}{r} + \frac{d\omega}{\omega} = 0$$

Qui relie à chaque instant les variations relatives de r et ω : si le rayon croît, la vitesse angulaire décroît deux fois plus vite (en valeur relative). Cette équation s'intègre facilement :

$2\ln(r) + \ln(\omega) = Cte$ ou

$$\boxed{r^2\omega = C}$$

Où C est une constante. Cette relation traduit la loi des aires, déjà rencontrée, (cf. figure).

La vitesse angulaire ω étant liée à r, elle peut être éliminée de la première équation, qui devient :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{K_G(m_1+m_2)}{r^2} = 0$$

Cette équation ne contient que r et sa dérivée seconde, elle doit donc procurer $r(t)$, en y ajoutant deux conditions initiales (ou deux positions, ou d'autres données).

Mais analytiquement, à ce stade, il a été montré qu'il est plus intéressant d'opérer un changement de variable, qui donnera dans un premier temps la trajectoire $r(\theta)$.

2. Trajectoire $r(\theta)$

La transformation préconisée est tout d'abord de poser $r = \frac{1}{u}$ ce qui transforme les dénominateurs (en r) en numérateurs (ne pas confondre u avec un vecteur unitaire !). Le plus délicat est d'éliminer la variable temps dans la dérivée seconde de l'équation ci-dessus.

Calculons tout d'abord la dérivée première $\frac{dr}{dt}$:

$dr = -\frac{1}{u^2}du$ => $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$ où l'on élimine le temps en utilisant la loi des aires :

$r^2\omega = C$ => $d\theta = \frac{C}{r^2}dt = Cu^2dt$ d'où

$dt = \frac{d\theta}{Cu^2}$ et, en remplaçant dt dans la dérivée $\frac{dr}{dt}$:

$$\frac{dr}{dt} = -C\frac{du}{d\theta}$$

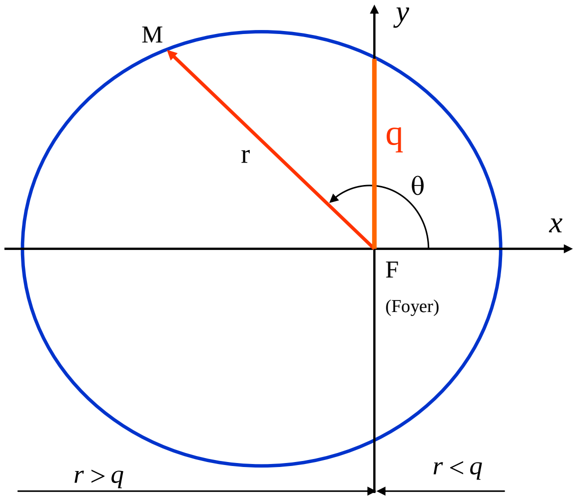
La variable temps a donc bien disparu de la dérivée première, et il ne reste que u et θ.

Voyons la dérivée seconde $\frac{d^2r}{dt^2}$

Même idée, pour éliminer le temps, nous remplaçons dt par $\frac{d\theta}{Cu^2}$

Conique: $r = \dfrac{q}{1+e\cos\theta}$ [ici ellipse (e<1)]

F est identique au point O (cf. 1ère figure du chapitre)



$$q = \frac{C^2}{K_G(m_1 + m_2)}$$

e : voir orbites et conditions initiales

$\theta = \pi/2 \Rightarrow r = q$

1/ Pour le système Terre Soleil,
avec un rapport de masse de 333000,
le Soleil est sensiblement en F
et la terre en M.
2/ Que le soleil ne soit pas
au centre de l'orbite
a beaucoup chagriné nos anciens …

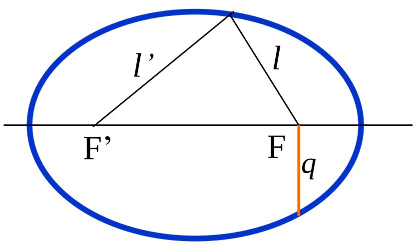
$r = \dfrac{q}{1+e\cos\theta}$ => $r = q - e\,r\cos\theta = q - ex$ => (carré) $y^2 + (1-e^2)x^2 + 2eqx = q^2$ Valable quel que soit e

Propriétés des coniques (cf. math.)

Ellipses (e<1)
(cercle e=0, F et F' confondus)

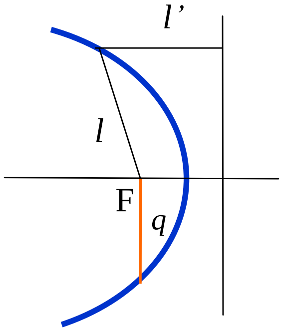
Paraboles (e=1)

Hyperboles (e>1)

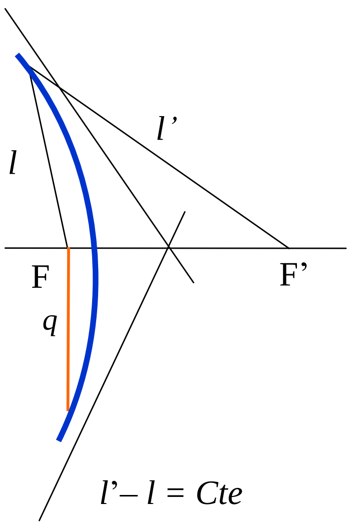


$l' + l$ = Cte

Tracé du jardinier,
longueur cordeau = Cte =2a
cf. plus loin la figure:
Figure complémentaire, tracé du jardinier



$l' = l$



$l' - l = Cte$

Asymptotes pour $\cos\theta = -1/e$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d(\frac{dr}{dt})}{dt}=\frac{d(-C\frac{du}{d\theta})}{dt}=Cu^2\frac{d(-C\frac{du}{d\theta})}{d\theta}=-C^2u^2\frac{d(\frac{du}{d\theta})}{d\theta}=-C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

En reportant dans l'équation différentielle de départ :

$$-C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-C^2u^3+K_G(m_1+m_2)u^2=0$$ qui se résume à :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{K_G(m_1+m_2)}{C^2}$$

Equation tout à fait classique dont la solution est constituée d'une solution particulière de l'équation avec second membre, et de la solution générale de l'équation sans second membre. Pour éviter ces notions de solution particulière et générale que l'on additionne, le mieux est d'écrire l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\left(u-\frac{K_G(m_1+m_2)}{C^2}\right)=0$$

et d'opérer un nouveau changement de variable, simple décalage par rapport au précédent :

$v=u-\dfrac{K_G(m_1+m_2)}{C^2}$ qui ramène l'équation à une forme très simple :

$\dfrac{d^2v}{d\theta^2}+v=0$, dont la solution générale est :

$v=A\cos(\theta+\varphi)$.

Attention, bien remarquer qu'il n'y a pas coefficient devant θ : reporter cette solution dans l'équation différentielle et vérifier qu'elle est bien correcte.

En revenant à la variable u puis r, la trajectoire respecte la relation :

$$r=\frac{1}{\frac{K_G(m_1+m_2)}{C^2}+A\cos(\theta+\varphi)}$$

Un choix convenable de l'origine des angles θ simplifie r sous la forme :

$$r=\frac{1}{\frac{K_G(m_1+m_2)}{C^2}+A\cos\theta}$$

Il est d'usage de poser :

$$\boxed{q=\frac{C^2}{K_G(m_1+m_2)}}$$

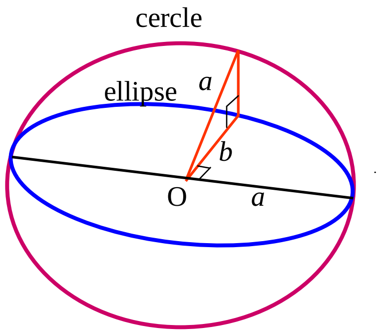
qui est homogène à une longueur. Ce paramètre est le plus souvent noté p dans la littérature, mais dans ce cours, p est réservé à la quantité de mouvement.

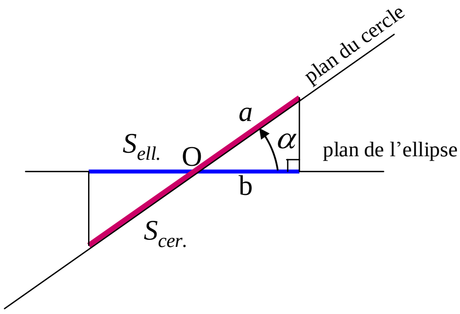
D'où : $r=\dfrac{q}{1+Aq\cos\theta}$ Le paramètre q possède donc une signification géométrique claire, c'est la valeur de r lorsque $\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Un dernier changement de nom de constante, $Aq=e$, donne finalement :

$$\boxed{r=\frac{q}{1+e\cos\theta}}$$

Surface d'une ellipse (projection d'un cercle)
Application: loi des aires





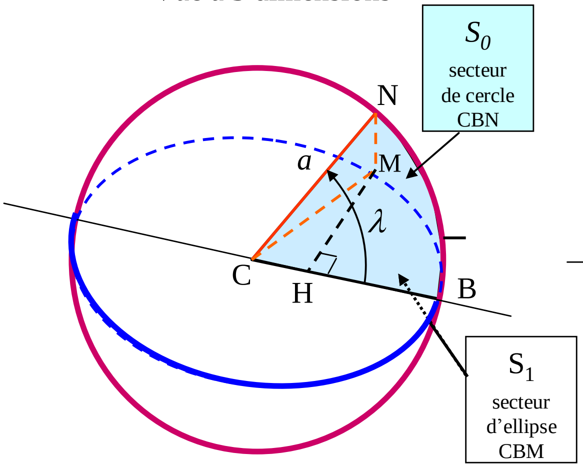
$S_{ellipse} = S_{cercle}.\cos(\alpha) = (\pi a^2).(b/a)$

$S_{ellipse} = \pi a\, b$

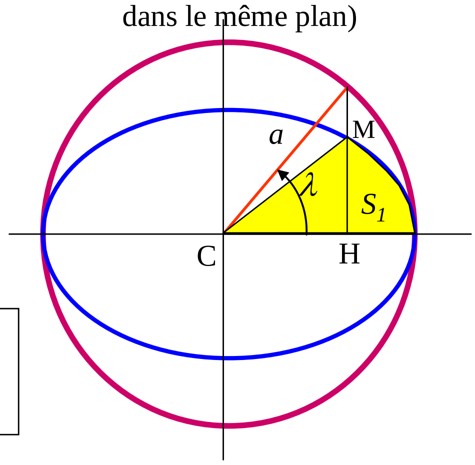
NB: dans la dimension perpendiculaire à la feuille,
la projection ne change pas les longueurs.
Pour mieux comprendre
la projection de la surface,
il est conseillé de découper le cercle
en rectangles élémentaires.

Surface d'un secteur d'ellipse. (cf. Math.)

Vue à 3 dimensions



Équivalent plan pour le calcul
de la surface du secteur d'ellipse
(cercle et ellipse ramenés
dans le même plan)



Cercle: $S_0 = ½\, a^2\, \lambda$

($\lambda = 2\pi \Rightarrow S_c = \pi\, a^2$)

Ellipse: $S_1 = S_0.(b/a) = ½\, ab\, \lambda$

$S_1 = ½\, a\, b\, \lambda$

($\lambda = 2\pi \Rightarrow S_1 = \pi\, a\, b$)

Attention,
λ est l'angle **du secteur de cercle**,
et non pas celui du secteur d'ellipse

Il devient donc très facile de tracer la trajectoire du point M, c'est une conique et e s'appelle l'excentricité (cf. figures Conique et Propriétés des coniques) :

$e = 0$: cercle ($r = q$)
$0 < e < 1$: ellipse (le dénominateur ne peut jamais s'annuler, et r est donc borné)
$e = 1$: parabole (r devient infini pour $\theta=\pi$)
$e > 1$: hyperbole (r devient infini pour $\cos\theta=-1/e$))

L'excentricité e est toujours prise positive. Une valeur négative équivaudrait à un changement d'origine de π pour θ. NB : l'origine O s'appellera désormais F (comme Foyer) Nous établirons plus loin le lien entre θ et le temps.

3. Mouvement circulaire

Le rayon r que nous dénommerons r_0 est donc constant, indépendant de θ.

D'après $r = q/(1+e\cos\theta)$, ceci implique $e = 0$, et aussi de manière évidente:

$r_0 = q$

La vitesse angulaire ω est reliée au rayon r_0 par la loi des aires :

$r_0^2\omega = C$ donc ω **est constant**

D'autre part (cf. définition de q) :

$q = \dfrac{C^2}{K_G(m_1+m_2)}$ d'où, en éliminant C ($= r_0^2\omega$) :

$\omega^2 r_0^3 = K_G(m_1+m_2)$	Mouvement circulaire : relation obligatoire entre $r_0 (= q)$ et ω

ou, pour faire intervenir la vitesse orthoradiale (ici tangentielle) $V_0 = r_0\omega$:

$r_0 V_0^2 = K_G(m_1+m_2)$

Remarque, cette relation est semblable à celle que l'on peut obtenir, très facilement, pour un mouvement gravitationnel **circulaire**, lorsque $m_1 >> m_2$ (centre de masse confondu avec m_1) :

$-K_G m_1 m_2 \dfrac{\overrightarrow{u_r}}{r_0^2} = -m_2\omega^2 r_0 \overrightarrow{u_r}$ (c'est $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$) d'où il découle :

$\omega^2 r_0^3 = K_G m_1$ qui est exactement la relation établie ci-dessus si $m_1 >> m_2$.

4. Ellipse

L'ellipse ($0 < e < 1$) est le cas pratique le plus fréquent en astronomie (planètes …) et pour nos satellites artificiels. Elle est impossible si les forces sont répulsives, avec des charges électriques par exemple : remplacer $-K_G m_1 m_2$ par $+K_q q_1 q_2$ pour comprendre. Le cas de la parabole ($e = 1$) est particulier et n'existe guère qu'en mathématiques. Les hyperboles se retrouvent souvent en physique des particules chargées, là où les énergies cinétiques sont très importantes comparées aux variations d'énergies potentielles.

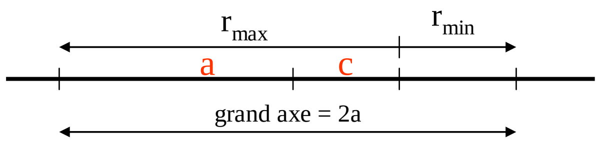
4 .1 Relations entre les paramètres géométriques de l'ellipse

Le vecteur $\vec{r}$ décrit donc une ellipse. Avec la convention prise pour θ, *r* est minimum lorsque $\theta = 0$, et maximum pour $\theta = \pi$. L'origine du repère est à un foyer de l'ellipse, de demi-grand axe a et demi-petit axe b. Le foyer est situé à une distance *c* du centre de l'ellipse.

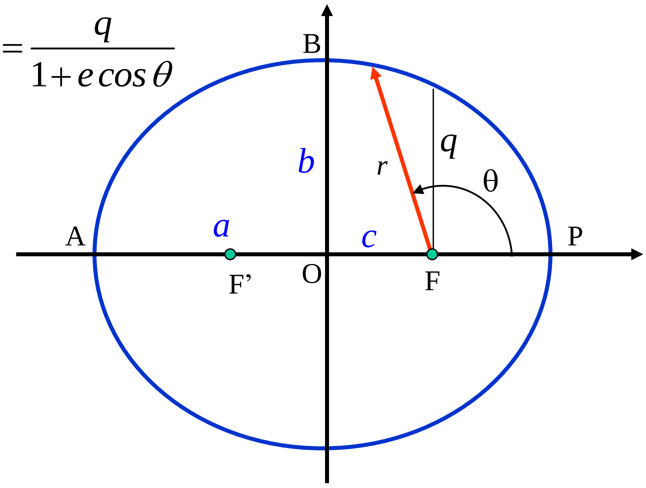
Eléments de l'ellipse

$r_{min} = a - c$, $r_{max} = a + c$ $\Rightarrow$ $a = (r_{max} + r_{min})/2$, $c = (r_{max} - r_{min})/2$

$r_{min} . r_{max} = a^2 - c^2$



$$r = \frac{q}{1 + e\cos\theta}$$



$r_{min} = q / (1+e)$
$r_{max} = q / (1-e)$
$r_{max} + r_{min} = 2a$
$\Rightarrow a = q / (1-e^2)$

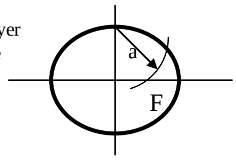
$c + r_{min} = a$
$c = a - q/(1+e)$
$c = a - a\,(1-e)$
$\Rightarrow c = a.\,e$

Au point B:
$r = q / (1+e.\cos\theta)$
$r + e\,r\cos\theta = q$
$r - e\,c = q$
$r - e^2 a = a\,(1-e^2)$
$\boldsymbol{r = a}$ (*)
Triangle OFB:
$a^2 = b^2 + c^2$
$\Rightarrow b = a.(1-e^2)^{½}$

$b^2 = r_{min} . r_{max}$

(*): FB=a est évident en partant de la propriété de l'ellipse:
somme des distances aux foyers =Cte=2a
(voir plus loin le tracé du jardinier)

Remarque:
détermination du foyer
connaissant l'ellipse



Troisième loi de Kepler

$$\Omega = \frac{C}{ab}$$

$$q = b^2/a$$

$$q = \frac{C^2}{K_G(m_1 + m_2)}$$

$$\Omega^2 a^3 = K_G(m_1 + m_2) \quad \text{ou} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{K_G(m_1 + m_2)}$$

Pour le minimum, on parle de périastre (ou périgée pour un mouvement autour de la terre, ou périhélie autour du soleil) et pour le maximum d'apoastre (ou apogée ou aphélie).
Etablissons quelques relations utiles entre les paramètres géométriques de l'ellipse.
A partir de $r = q/(1+e\cos\theta)$, et de considérations élémentaires (cf. figure), nous avons :

$$\begin{array}{l} r_{\min} = q/(1+e) \\ r_{\max} = q/(1-e) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} q = 2\dfrac{r_{\max}.r_{\min}}{r_{\max}+r_{\min}} \\ e = \dfrac{r_{\max}-r_{\min}}{r_{\max}+r_{\min}} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a = r_{\min}+c \\ a = r_{\max}-c \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{r_{\max}+r_{\min}}{2} \\ c = \dfrac{r_{\max}-r_{\min}}{2} \end{cases}$$

Ensuite avec : $r_{\min}+r_{\max} = 2a$, et les valeurs de $r_{\max}$ et $r_{\min}$ en fonction de q et e

$$\boxed{a = \frac{q}{1-e^2}}$$

Le paramètre c, distance d'un foyer au centre de l'ellipse s'exprime en fonction de e et a par :
$c = a - r_{\min} = a - q/(1+e) = a - a(1-e^2)/(1+e) = a - a(1-e)$ d'où :

$$\boxed{c = e.a}$$

Le demi-petit axe b (cf. figure éléments de l'ellipse) vérifie :
$a^2 = b^2 + c^2$ et, en remplaçant c :

$\boxed{b = a\sqrt{1-e^2}}$ ce qui implique : $\boxed{q = b^2/a}$ et aussi : $b = \sqrt{r_{\max}.r_{\min}}$

Ainsi a est la moyenne arithmétique de $r_{\min}$ et $r_{\max}$, et b représente leur moyenne géométrique.

4 .2 Loi des aires et paramètres de l'ellipse

La loi des aires a été établie (cf. figure loi des aires) :
$dS = (C/2)dt$ qui avec une origine convenable ($S = 0$ pour $t = 0$) conduit à :
$S(t) = (C/2)\,t$
Calculons la période correspondante T. Durant ce temps T, la surface balayée est la surface totale de l'ellipse, qui est égale à πab (cf. figure Surface d'une ellipse) donc:
$\pi ab = \dfrac{C}{2}T$. La pulsation Ω $(= 2\pi/T)$ correspondante vérifie :

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{C}{ab}}$$

NB : La loi des aires pour l'ellipse est quelquefois utilisée sous la forme : $S(t) = \pi ab\dfrac{t}{T}$

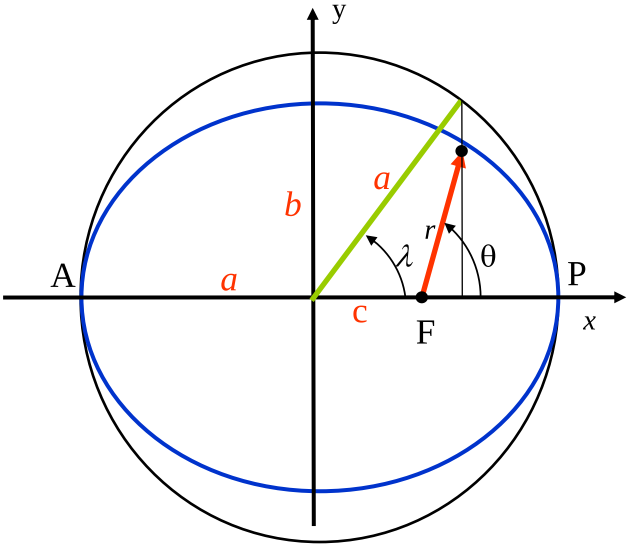
4 .3 Lois de Kepler (ellipse)

(A l'origine, les lois de Kepler faisaient référence au système solaire).
En revenant à l'expression de Ω, puis en utilisant $q = b^2/a$:

$$\Omega^2 = \frac{C^2}{a^2b^2} = \frac{K_G(m_1+m_2)q}{a^2b^2} = \frac{K_G(m_1+m_2)}{a^3} \qquad \Rightarrow$$

Changement de variable θ, λ

θ : anomalie vraie λ : anomalie excentrique



$r\cos\theta = a\cos\lambda - c$ cf. figure ci-contre

$r\sin\theta = y = b\sin\lambda$ une ellipse est la projection d'un cercle

D'où en utilisant $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$:

$r = a(1 - e\cos\lambda)$

Et, en reportant r dans les 2 équations de départ:

$\cos\theta = (\cos\lambda - e) / (1 - e\cos\lambda)$ (1) (*)

[=> $\cos\lambda = (\cos\theta + e) / (1 + e\cos\theta)$] (*)

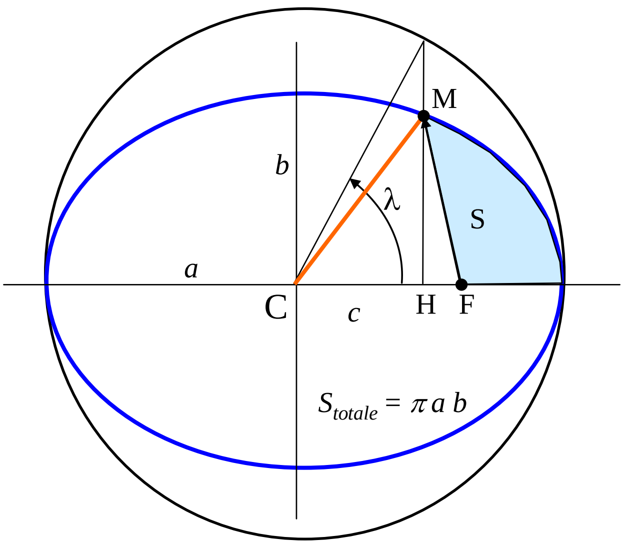
$\sin\theta = (1 - e^2)^{½}\sin\lambda / (1 - e\cos\lambda)$

$\mathrm{tg}(\theta/2) = [(1 + e)/(1 - e)]^{½}\,\mathrm{tg}(\lambda/2)$

Relation la plus intéressante pour les calculs
qui se démontre à partir de (1) en utilisant les arcs moitié.
(Cf. Compléments sur le site physique.belledonne)

(*) On notera le curieux passage λ <-> θ, en changeant e en $-e$.
Comme changer e en $-e$ revient à permuter les foyers,
les anomalies s'échangent entre elles en permutant les foyers!

Anomalie excentrique λ *(t)*



Période T

$\Omega = 2\pi/T$

Loi des aires:

$S = \pi\, a\, b\, (t/T)$

Géométrie:

S = secteur ellipse – triangle (CMF)

secteur ellipse = ½ $a\, b\, \lambda$

triangle CMF = ½ base.hauteur = ½ $c\, y$ = ½ $c\, b \sin\lambda$

S = ½ $a\, b\, \lambda$ – ½ $c\, b \sin\lambda$ = ½ $a\, b\, \lambda$ – ½ $a\, e\, b \sin\lambda$

Conclusion:

$\pi\, a\, b\, (t/T)$ = ½ $a\, b\, \lambda$ – ½ $e\, a\, b \sin\lambda$

$$\boxed{\Omega t = \lambda - e\sin\lambda}$$

λ donné => t (facile)

t donné => équation transcendante
=> itérations

$$\Omega^2 a^3 = K_G(m_1+m_2) \qquad\qquad T^2/a^3 = 4\pi^2/[K_G(m_1+m_2)]$$

- **Les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des demi-grands axes des ellipses parcourues. C'est la troisième loi de Kepler.**
- **La deuxième loi est constituée par la loi des aires.**
- **La première stipule que l'orbite est une ellipse,** dont un des foyers est centré sur le soleil, car le centre de masse soleil-planète est pratiquement confondu avec le centre du soleil.

Rappel : la loi des aires (dS=(C/2)dt) est toujours valable (ellipse, parabole, hyperbole), mais la période n'a pas de sens pour la parabole et l'hyperbole.

4 .4 Equation horaire $\theta(t)$

Plusieurs approches sont possibles. Nous donnerons ici une démonstration "géométrique". Nous nous limiterons au cas de l'ellipse, plus facile à appréhender.
NB : il n'est pas nécessaire de connaître $\theta(t)$ pour comprendre les paragraphes 5, 6 et 7.

Le calcul classique relie θ, appelé anomalie vraie, à l'angle λ, mesuré à partir du centre de l'ellipse, appelé anomalie excentrique (!) et d'exprimer λ en fonction du temps.
Ces 2 angles sont reliés par les relations suivantes, relations démontrées sur la figure **Changement de variable θ , λ .**

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\cos\lambda - e}{1 - e\cos\lambda}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\sin\theta = \sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin\lambda}{1-e\cos\lambda}} \quad \text{ou} \quad \boxed{tg\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\frac{\lambda}{2}}$$

La surface d'un secteur d'ellipse est linéaire avec λ (cf. fig. **Surface d'un secteur d'ellipse**), et la soustraction de la surface d'un triangle pour exprimer l'aire balayée (cf. **fig.** $\lambda(t)$) conduit finalement à la relation :

$$\lambda - e\sin\lambda = 2\pi\frac{t}{T} \qquad \text{soit :}$$

$$\boxed{\lambda - e\sin\lambda = \Omega t}$$

Cette équation est très célèbre. Si λ est fixé, le temps se calcule facilement, mais si c'est le temps qui est fixé, comme c'est souvent le cas, alors le calcul analytique direct est impossible car on ne peut pas écrire $\lambda = f(t)$: l'équation est dite transcendante. Elle peut être résolue par des itérations successives, qui convergent très rapidement si e est faible, ou d'autres méthodes.

Pour résumer, la connaissance de $r(t)$ et $\theta(t)$ demande les opérations suivantes :

$$\boxed{t \to \lambda \to \theta \to r}$$

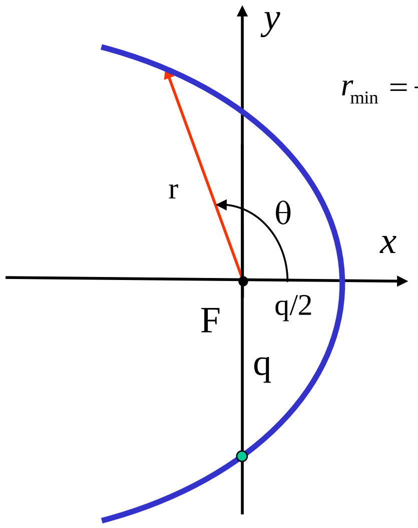
Pour une simulation, il peut être plus commode de réaliser :
$\lambda \to t$ et $\lambda \to \theta \to r$
Ne pas oublier que nous avons déterminé les caractéristiques du vecteur $\vec{r}$ et que les positions de M_1 et M_2 s'obtiennent à partir des relations établies au début du chapitre "Problème des deux corps".

Relations entre les paramètres géométriques de l'ellipse

	a	b	c	q	e	$r_{\min}$	$r_{\max}$
a,b,c	$a^2=b^2+c^2$			b^2/a	c/a	$a-c$	$a+c$
q,e	$\frac{q}{1-e^2}$	$\frac{q}{\sqrt{1-e^2}}$	$\frac{eq}{1-e^2}$			$\frac{q}{1+e}$	$\frac{q}{1-e}$
$r_{\min},r_{\max}$	$\frac{r_{\max}+r_{\min}}{2}$	$\sqrt{r_{\max}\,r_{\min}}$	$\frac{r_{\max}-r_{\min}}{2}$	$2\frac{r_{\max}\,r_{\min}}{r_{\max}+r_{\min}}$	$\frac{r_{\max}-r_{\min}}{r_{\max}+r_{\min}}$		
a,e		$a\sqrt{1-e^2}$	$e.a$	$a(1-e^2)$		$a(1-e)$	$a(1+e)$

Parabole et hyperbole

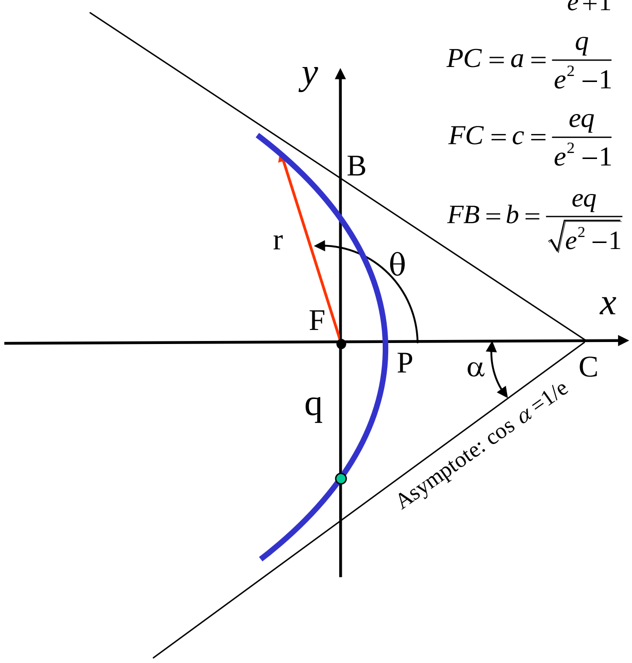
Parabole : $e = 1$



$$r_{\min}=\frac{q}{2}$$

$$r=\frac{q}{1+\cos\theta} \qquad y^2+2qx=q^2$$

Hyperbole : $e > 1$



$$FP=r_{\min}=\frac{q}{e+1}$$

$$PC=a=\frac{q}{e^2-1}$$

$$FC=c=\frac{eq}{e^2-1}$$

$$FB=b=\frac{eq}{\sqrt{e^2-1}}$$

$$r=\frac{q}{1+e\cos\theta} \qquad y^2-(e^2-1)x^2+2eqx=q^2$$

5. Energies

Toute cette étude a été conduite sur la seule base du principe fondamental de la dynamique, avec l'utilisation du théorème du moment cinétique pour prouver que le mouvement est plan.
Il est évident que les considérations d'énergie peuvent apportent une contribution intéressante, sachant qu'il n'y a pas de frottement et donc que l'énergie mécanique se conserve.

Les énergies cinétiques et potentielles avaient été calculées égales à (cf. problème des 2 corps):

$E_c = \frac{1}{2}\mu(\frac{d\vec{r}}{dt})^2 = \frac{1}{2}\mu V^2$ (avec $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$) $E_p = -K_G \frac{m_1 m_2}{r} + Cte$

Et l'énergie mécanique s'exprime par : $E_M = E_C + E_P$

A partir de $E_M = Cte'$, il est possible de retrouver une des 2 équations différentielles utilisées.
En effet, la vitesse s'écrit :

$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u_r} + \frac{rd\theta}{dt}\vec{u_\theta}$ (hyper classique … voir cinématique)

et donc, avec $\omega = d\theta/dt$, sachant que $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ sont orthogonaux :

$$(\frac{d\vec{r}}{dt})^2 = (\frac{dr}{dt})^2 + (r\omega)^2$$

En utilisant la loi des aires $r^2\omega = C$ pour éliminer ω dans $(r\omega)^2$, seule la variable r intervient dans l'expression de E_M, qui finalement se ramène à la relation :

$$\frac{1}{2}\left[(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{C^2}{r^2}\right] - \frac{K_G(m_1+m_2)}{r} = Cte'$$

dont la dérivée par rapport au temps redonne l'équation en r utilisée pour la résolution :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{C^2}{r^3} + \frac{K_G(m_1+m_2)}{r^2} = 0$$

(Si vous éprouvez un problème, remplacez dr/dt par $V_{r,}$ et différentiez)
Nous discuterons plus loin du type d'orbite suivant les énergies mises en jeu.

6. Orbites et conditions initiales

Nous avons déjà vu que l'orbite est dans le plan défini par $\vec{r}_0$ *et* $\vec{V}_0$

6 .1 Paramètres de la conique

Les grandeurs connues au départ (voir figure) sont:

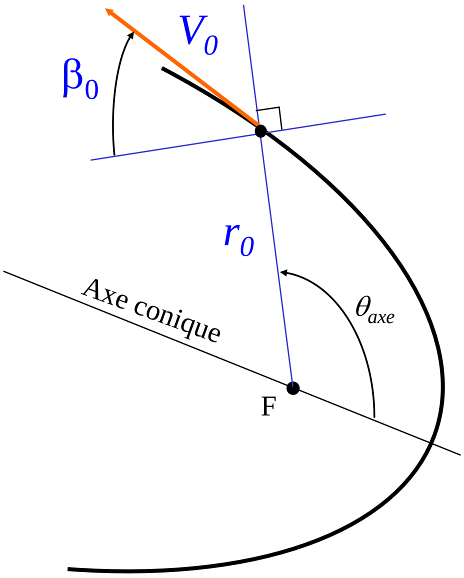
r_0

V_0

β_0

La connaissance de la trajectoire nécessite celle des paramètres de la conique, dont θ_{axe} (voir figure) fait partie car a priori l'axe de la conique n'est pas connu.

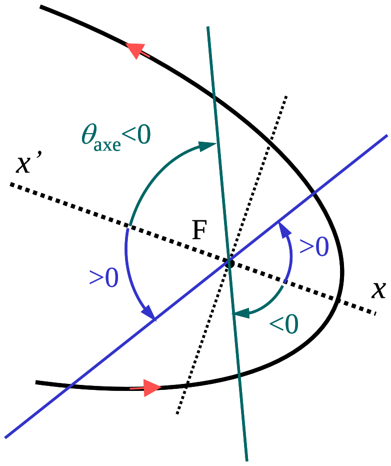
Conditions initiales



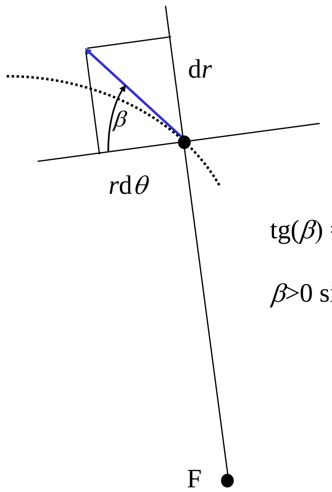
$C = r_0 V_0 \cos\beta_0$

Convention pour θ_{axe}

(défini par sa tangente, cf. texte)



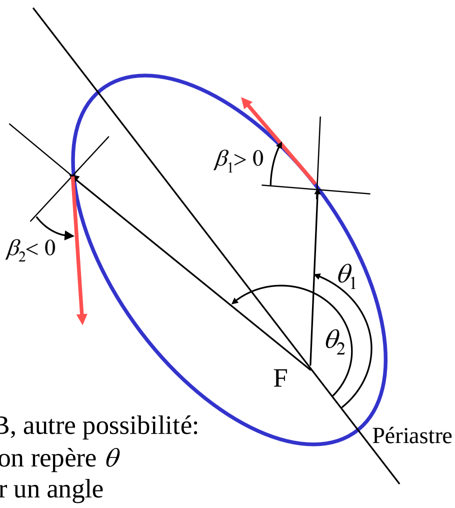
β et les coordonnées polaires



tg(β) = dr/rdθ

β>0 si dr>0

β et θ



NB, autre possibilité:
si on repère θ
par un angle
compris entre $-\pi$ et π,
β et θ
sont alors du même signe

Il faut donc déterminer:
q
e
θ_{axe}
Définissons tout d'abord la grandeur sans dimension :

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2}\frac{r_0 V_0^{\ 2}}{K_G(m_1+m_2)}}$$

indépendante de β_0, qui facilitera grandement l'écriture des expressions.
Elle représente, en r_0, la valeur absolue du rapport de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\mu V_0^2$ à l'énergie potentielle $-K_G m_1 m_2 / r_0$, supposée nulle à l'infini (ce qui implique, ici, une constante nulle). Cette grandeur prendra toute sa signification plus loin (cf. vitesses de libération).

D'après la définition de q $[q = C^2 / K_G(m_1+m_2)]$, et compte tenu de la constante des aires $C = r_0 V_0 \cos\beta_0$ (cf. constante des aires, en début de chapitre), q est donné par :

$$\boxed{q = \frac{[r_0 V_0 \cos\beta_0]^2}{K_G(m_1+m_2)} \qquad (0) \qquad\qquad q = (2\eta\cos^2\beta_0)\, r_0}$$

Il reste donc deux inconnues : e et θ_{axe}

Calcul préliminaire sur les coniques :

$r = \dfrac{q}{1+e\cos\theta}$ Equation polaire des coniques, θ=0 au périastre (r minimum)

L'angle β est déterminé en coordonnées polaires par (cf. figure) :

$\tan\beta = \dfrac{dr}{r\, d\theta}$ soit, en différentiant $\ln(r(\theta))$ par exemple :

$\tan\beta = \dfrac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$ ou encore $\tan\beta = \dfrac{r}{q} e\sin\theta$

β est donc du signe de sinus θ

- $\beta > 0$ pour θ variant de 0 à π (exemple, sur une ellipse, r varie de $r_{\min}$ à $r_{\max}$, $dr > 0$)
- $\beta < 0$ pour θ variant de π à 2π (sur une ellipse, r varie de $r_{\max}$ à $r_{\min}$, $dr < 0$)
- $\beta = 0$ au périastre et à l'apoastre

C'est évident sur une figure, mais écrivons le :

Si $\beta > 0$, on s'éloigne du périastre
Si $\beta < 0$, on se rapproche du périastre

Revenons aux deux inconnue, e et θ_{axe} : il faut 2 équations. Ce sont:

$\tan\beta_0 = \dfrac{r_0}{q} e\sin\theta_{axe}$: établi dans le calcul préliminaire => $e\sin\theta_{axe} = \dfrac{q}{r_0}\tan\beta_0$ (1)

$r_0 = \dfrac{q}{1+e\cos\theta_{axe}}$: équation des coniques => $e\cos\theta_{axe} = \dfrac{q}{r_0} - 1$ (2)

$$\eta = \frac{1}{2}\frac{r_0 V_0^{\,2}}{K_G(m_1+m_2)}$$

$$q = \frac{[r_0 V_0 \cos\beta_0]^2}{K_G(m_1+m_2)} \qquad q = (2\eta\cos^2\beta_0)\, r_0$$

$$\tan\theta_{axe} = \frac{\sin\beta_0\cos\beta_0}{\cos^2\beta_0 - \dfrac{K_G(m_1+m_2)}{r_0 V_0^2}} \qquad \tan\theta_{axe} = \frac{\sin\beta_0\cos\beta_0}{\cos^2\beta_0 - \dfrac{1}{2\eta}}$$

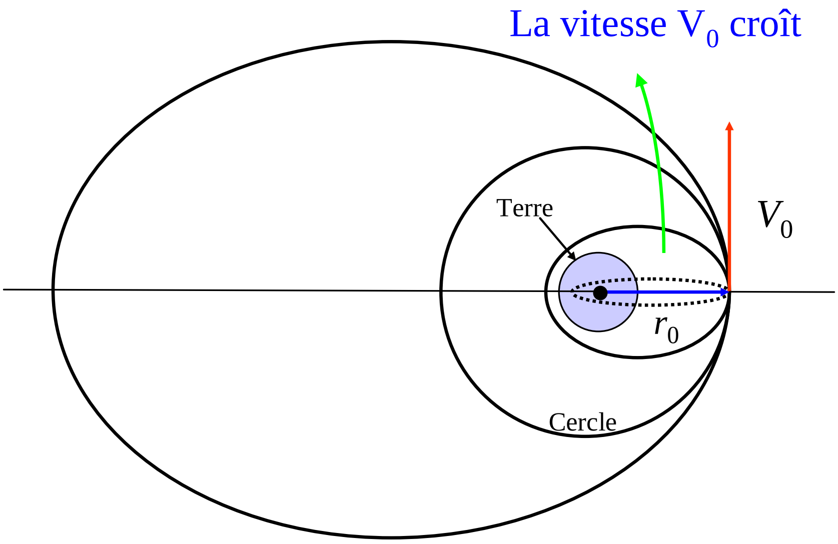
$$e^2 = 1 + \frac{r_0 V_0^2}{K_G(m_1+m_2)}\left[\frac{r_0 V_0^2}{K_G(m_1+m_2)} - 2\right]\cos^2\beta_0 \qquad e^2 = 1 + 4\eta(\eta-1)\cos^2\beta_0$$

Lancement d'un satellite

$\vec{V_0}$ perpendiculaire à $\vec{r_0}$ (β_0=0)

(effet de la vitesse de lancement)

Lorsque $\vec{V_0}$ est perpendiculaire à $\vec{r_0}$, le satellite est nécessairement au périgée ou à l'apogée.



Le grand axe de l'ellipse est toujours parallèle au rayon $\vec{r_0}$

Si la vitesse est trop faible, le satellite heurte la terre!

Quand la vitesse augmente, la terre occupe:
le foyer "gauche" (η<1/2)
puis le foyer "droit" (η>1/2)
de l'ellipse
(foyers confondus pour le cas particulier du cercle, η=1/2)

Le satellite repasse toujours au point de lancement avec la même $\overrightarrow{\text{vitesse}}$

Pour de grandes vitesses
½ parabole (cas particulier η=1)
ou ½ hyperbole (η>1),
Image: l'ellipse "s'ouvre" à l'infini
(à gauche bien sûr)

La résolution est simple en utilisant (1) et (2) :

$$\boxed{\tan\theta_{axe} = \frac{\tan\beta_0}{1-\frac{r_0}{q}}} \qquad (3)$$

θ_{axe} est défini par sa tangente, donc : $-\frac{\pi}{2} < \theta_{axe} < \frac{\pi}{2}$

Cet angle est donc connu, à π près : ceci n'a évidemment aucune importance pour une direction (cf. fig. Convention …). L'équation (1), permet alors de calculer l'excentricité :

$$\boxed{e = \frac{\frac{q}{r_0}-1}{\cos\theta_{axe}}} \qquad (4)$$

Si e<0, cela veut dire que l'angle θ_{axe} a été calculé par rapport à Fx' (cf. fig. Convention …). Le cosinus est en fait négatif. Conclusion : on prend la valeur absolue et on continue…

NB: Cas particulier $\beta_0 = 0$. **Ceci ne peut se produire qu'au périastre ou à l'apoastre.** Si $r_0 < q$, nous sommes au périastre, et à l'apoastre si $r_0 > q$. Si $r_0 = q$ l'orbite est un cercle.

Le problème est donc résolu. Si l'on veut relier directement les paramètres θ_{axe} et e aux grandeurs physiques, il faut expliciter q (cf. eq. (0)). La transformation est immédiate pour θ_{axe}, qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\boxed{\tan\theta_{axe} = \frac{\sin\beta_0\cos\beta_0}{\cos^2\beta_0 - \frac{1}{2\eta}} \quad \left(= \frac{\sin 2\beta_0}{\cos 2\beta_0 + 1 - \frac{1}{\eta}}\right)} \qquad \tan\theta_{axe} = \frac{\sin\beta_0\cos\beta_0}{\cos^2\beta_0 - \frac{K_G(m_1+m_2)}{r_0 V_0^2}}$$

Pour e, une possibilité est de calculer e^2 en élevant (1) et (2) au carré

$$\boxed{e^2 = 1 + 4\eta(\eta-1)\cos^2\beta_0} \qquad e^2 = 1 + \cos^2\beta_0 \frac{r_0V_0^2}{K_G(m_1+m_2)}\left[\frac{r_0V_0^2}{K_G(m_1+m_2)} - 2\right]$$

6.2 Orbite elliptique

$e < 1$

D'après l'expression de e^2, ceci implique $\eta < 1$:

$r_0V_0^2 < 2K_G(m_1+m_2)$	$\eta < 1$	Ellipse

Remarque importante, **cette condition ne dépend ni de β_0, ni du signe de $\vec{V_0}$: elle est donc indépendante de la direction et du sens de la vitesse $\vec{V_0}$.**

Les paramètres géométriques sont donnés après quelques petits calculs par:

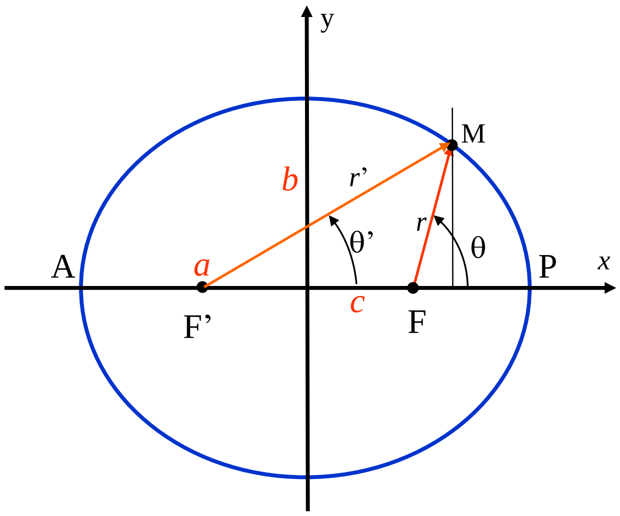
$$a = \frac{q}{1-e^2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{r_0}{2(1-\eta)} \quad \left(= \frac{r_0}{2 - \frac{r_0V_0^2}{K_G(m_1+m_2)}}\right)$$

a ne dépend pas de β_0!

$$b = a\sqrt{1-e^2} \qquad b = r_0\cos\beta_0\sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}} \qquad \frac{b}{a} = 2\cos\beta_0\sqrt{\eta(1-\eta)}$$

Figure complémentaire: le tracé du jardinier.

$MF + MF' = 2a$



Démonstration:

$r = q/(1 + e\cos\theta)$
et, en prenant pour foyer F'
$r' = q/(1 + e\cos(\pi-\theta')) = q/(1 - e\cos\theta')$
(Conclusion: changer de foyer revient à changer le signe de *e*, … ou bien à prendre l'ellipse par l'autre bout)

$r + e\, r\cos\theta = q$
$r' - e\, r'\cos\theta' = q$

Or:
$r\cos\theta = x - c$
$r'\cos\theta' = x + c$

Donc:
$r = q + e\,(c - x)$
$r' = q + e\,(c + x)$

Remarque: r et r' sont fonction linéaires de x

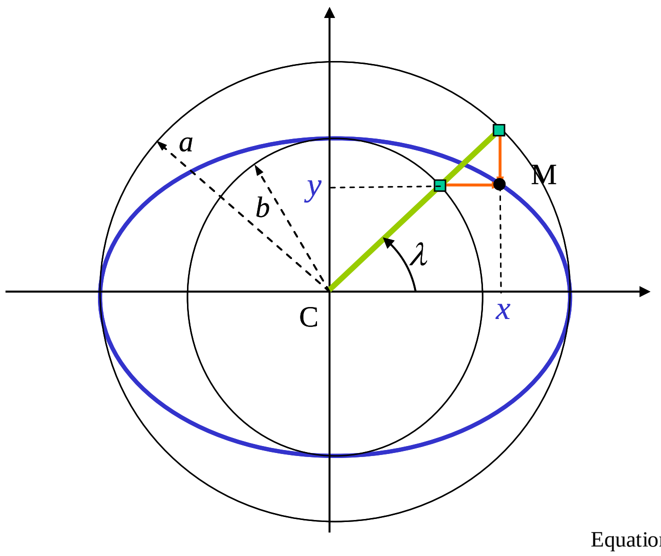
$r + r' = 2\,(q + e\,c)$
la somme des distances est donc bien constante

$r + r' = 2\,[a\,(1-e^2) + e.(e\,a)]$

$r + r' = 2\,a$

Figure complémentaire: équation paramétrique de l'ellipse

Construction à l'aide de 2 cercles de rayon *a* et *b*



Équation paramétrique
$x = a\cos\lambda$
$y = b\sin\lambda$

Équation cartésienne

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Equation paramétrique: démonstration.
Rappelons nous que l'ellipse est la projection d'un cercle

Cercle:	Ellipse:
$X = a\cos\lambda$	$x = X$, inchangé
$Y = a\sin\lambda$	$y = (b/a)\,a\sin\lambda = b\sin\lambda$

La pulsation et la période seront calculées par :

$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{K_G(m_1+m_2)}{a^3}}}$ ($3^{ème}$ Loi de Kepler) et $\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega}}$

Important : **a étant indépendant de β_0, il en est de même pour la période T.**

6.3 Orbite parabolique ou hyperbolique

$e \geq 1$

Si la vitesse de départ est très élevée, q peut être très grand devant r_0. L'excentricité e peut être ≥ 1, et l'orbite devient alors parabolique si $e = 1$, ou hyperbolique si $e > 1$.

D'après l'expression de e^2, ceci implique :

$r_0 V_0^2 \geq 2K_G(m_1+m_2)$	$\eta \geq 1$	Parabole $\eta = 1$, hyperbole $\eta > 1$

Remarque importante, cette condition ne dépend pas de la direction de la vitesse $\overrightarrow{V_0}$.

6.4 Energies, vitesse de libération (vitesse parabolique) et type d'orbite

La conservation $E_M = E_c + E_p = Cte$ s'écrit en nommant V la vitesse (cf. chapitre précédent) :

$\frac{1}{2}\mu V^2 - \frac{K_G m_1 m_2}{r} + Cte = \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{K_G m_1 m_2}{r_0} + Cte$ expression où la constante disparaît :

$$\frac{1}{2}\mu V^2 - \frac{K_G m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2}\mu V_0^2 - \frac{K_G m_1 m_2}{r_0}$$

La vitesse de libération V_L, est la vitesse initiale V_0 qui permet d'envoyer un objet m_2 (c'est réciproque pour m_1) à l'infini $(r \approx \infty)$ où, après avoir été constamment ralenti par l'attraction de m_1, il arrive avec une vitesse nulle $(V = 0)$. Le premier terme est donc nul, et par conséquent :

$0 = \frac{1}{2}\mu V_L^2 - \frac{K_G m_1 m_2}{r_0}$ soit $\boxed{r_0 V_L^2 = 2K_G(m_1+m_2) \qquad \eta = 1}$

Nous retrouvons la condition qui sépare les orbites elliptiques, des orbites paraboliques et hyperboliques. Pour cette raison, cette vitesse est aussi appelée vitesse parabolique.

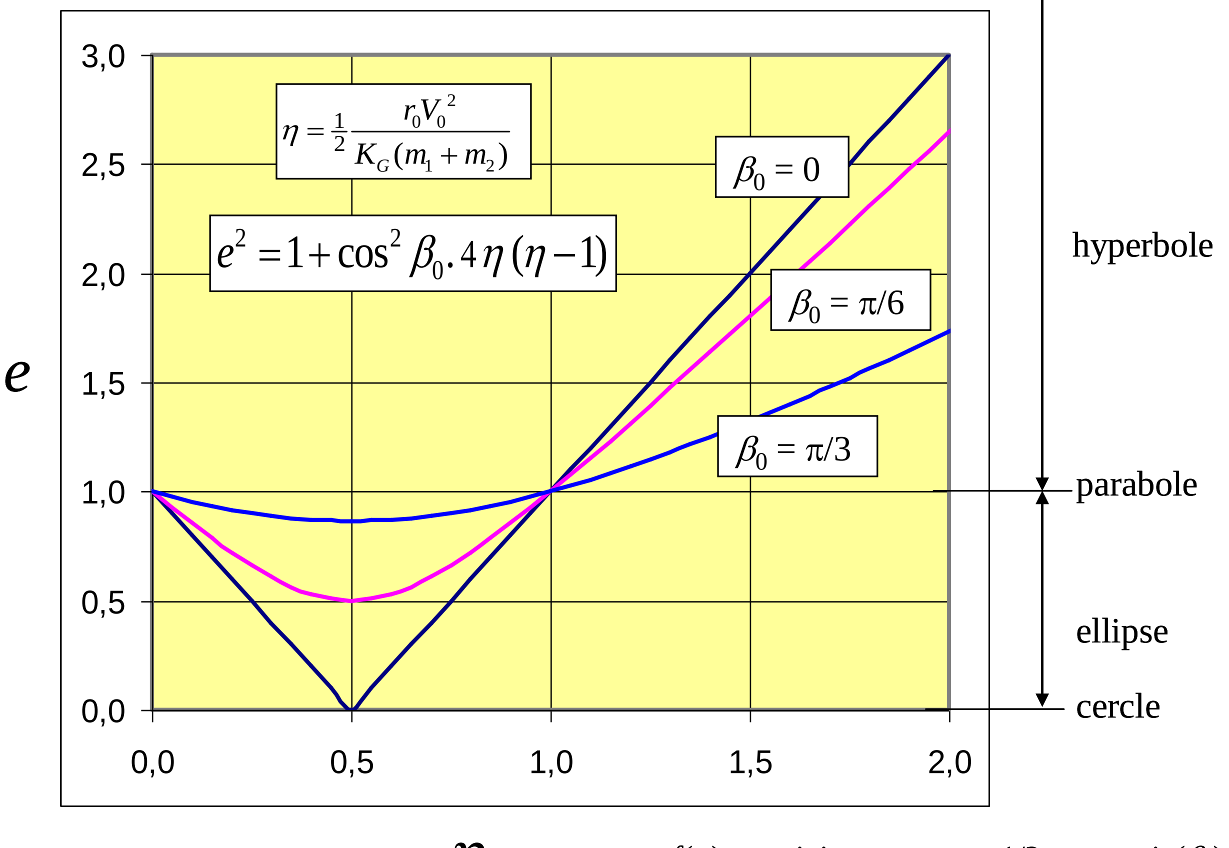
Toute vitesse supérieure libère m_2 de l'attraction de m_1 (et réciproquement). La vitesse de libération prend tout son sens lorsque r_0 est le rayon de l'astre de départ (lancer d'un satellite par exemple). Pour la terre avec un rayon de 40000km/2π, $V_L = 11,2 km/s$.

A l'inverse, si un objet est à l'infini, sans vitesse notable, il arrivera à une distance r_0 avec cette vitesse V_L, et ceci quelle que soit la trajectoire suivie.

Vous établirez sans peine que $\boxed{\eta = (\frac{V_0}{V_L})^2}$ ou encore : $\eta = \frac{\frac{1}{2}\mu V_0^2}{\frac{1}{2}\mu V_L^2}$,

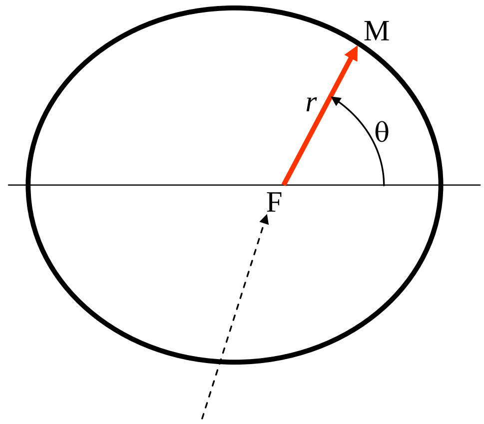
rapport de l'énergie cinétique initiale à l'énergie cinétique nécessaire à la libération.

$$e = \mathrm{f}\,(\eta, \beta_0)$$

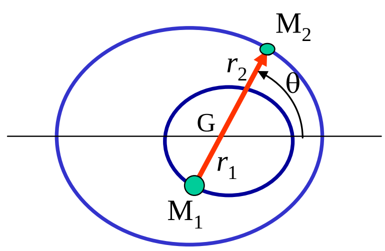


e = f(η) est minimum pour η=1/2 et vaut sin(β_0)

Retour sur les orbites réelles



F est aussi le point O de la première figure du chapitre



$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$$

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

Si $m_1 >> m_2$
$r_1 \sim 0$
$r_2 \sim$ r

Remarque: utilisation du théorème de l'énergie cinétique.
Sans utiliser le théorème de l'énergie mécanique, une autre manière d'établir cette vitesse V_L est de dire que la vitesse de libération est telle que l'énergie cinétique est juste suffisante pour vaincre le travail des forces de pesanteur. Ceci nous fera une petite révision du théorème de l'énergie cinétique, et des propriétés des vecteurs unitaires.

$$0-\frac{1}{2}\mu V_L^2=\int_{r_0}^{\infty}(-\frac{K_G m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}).d\vec{r}=\int_{r_0}^{\infty}(-\frac{K_G m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}).(\overrightarrow{u_r}dr+rd\overrightarrow{u_r})=\int_{r_0}^{\infty}-\frac{K_G m_1 m_2}{r^2}dr=\frac{-K_G m_1 m_2}{r_0}$$

qui redonne finalement bien, en explicitant μ :

$$r_0 V_L^2=2K_G(m_1+m_2) \qquad (\eta=1)$$

Energie mécanique avec énergie potentielle nulle à l'infini, et type d'orbite.
En prenant *par convention une énergie potentielle nulle à l'infini* (ici une constante nulle), E_M s'écrit :

$$E_M=\frac{1}{2}\mu V_0^2-\frac{K_G m_1.m_2}{r_0}=\frac{1}{2}\mu[V_0^2-\frac{2K_G(m_1+m_2)}{r_0}] \qquad E_M=\frac{1}{2}\mu V_0^2[1-\frac{1}{\eta}]$$

Il est alors facile de vérifier que l'orbite est :

elliptique si $E_M<0$ $(\eta<1)$
parabolique si $E_M=0$ $(\eta=1)$
hyperbolique si $E_M>0$ $(\eta>1)$

7. Synthèse

Nous utilisons le rapport sans dimension $\eta=\frac{1}{2}\frac{r_0 V_0^2}{K_G(m_1+m_2)}=(\frac{V_0}{V_L})^2$

Quel que soit l'angle de lancer β_0 :

$0<\eta<1$	$[0<r_0V_0^2<2K_G(m_1+m_2)]$	=> ellipse $0<e<1$
$\eta=1$	$[r_0V_0^2=2K_G(m_1+m_2)]$	=> parabole $e=1$
$\eta>1$	$[r_0V_0^2>2K_G(m_1+m_2)]$	=> hyperbole $e>1$

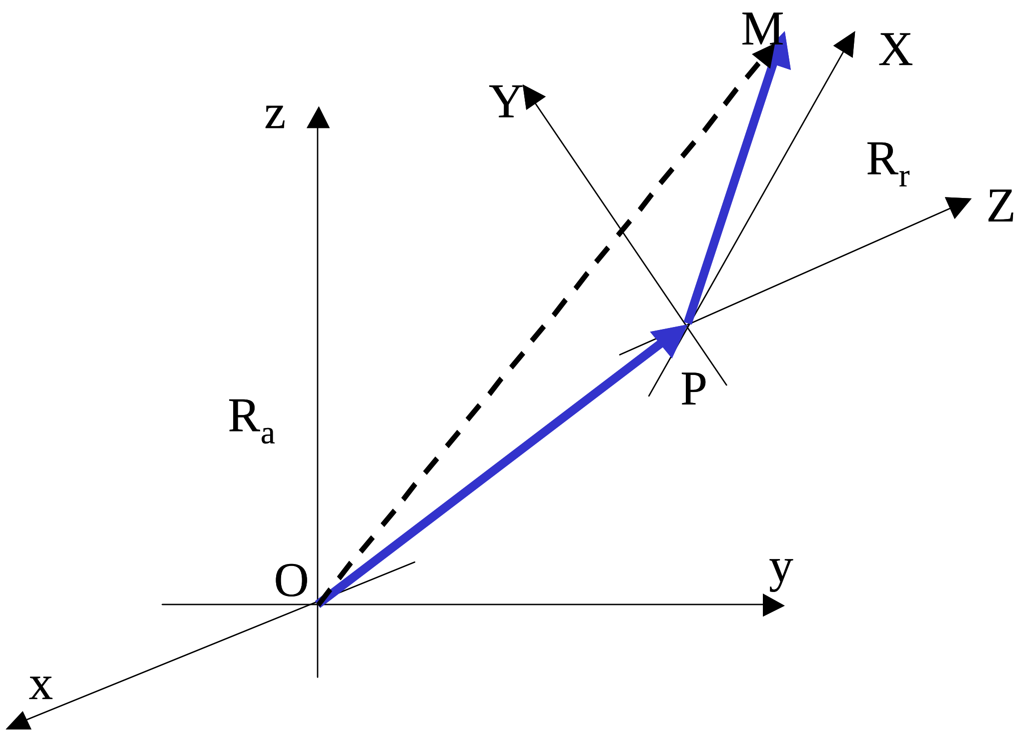
Si $\eta\geq 1$, soit $r_0V_0^2\geq 2K_G(m_1+m_2)$, au final, m_1 et m_2 s'éloigneront indéfiniment. Attention, les deux masses se déplacent, cf. figure Retour sur les orbites réelles.

Pour des vitesses telles que $r_0V_0^2<2K_G(m_1+m_2)$, les masses m_1 et m_2 restent localisées sur une ellipse telle que :

$$\boxed{a=\frac{r_0}{2(1-\eta)} \qquad \Omega^2 a^3=K_G(m_1+m_2) \qquad (\Omega=\frac{2\pi}{T}) \qquad \text{Ellipse, } \eta<1}$$

Ce qu'il faut bien comprendre, pour un satellite par exemple, c'est que, quelle que soit la manière dont il est lancé, après un temps *T*, il repassera au même point, avec la même vitesse: même module, même direction … et même sens cela va de soi!

Repère absolu R_a (Oxyz) et repère relatif R_r (PXYZ)



XI. Changement de référentiel (repère)

L'étude des changements de repères est justifiée par au moins deux points:

1/ Un mouvement peut s'avérer très simple dans un repère, lui-même animé d'un mouvement par rapport au repère ou se trouve l'observateur. Le problème est alors scindé en deux parties, ce qui rend son analyse plus simple.
2/ La relation fondamentale de la dynamique n'est vérifiée que dans une classe de référentiels, les référentiels inertiels, appelés aussi Galiléens. Il faut donc de toute manière s'y raccrocher.

Pour les démonstrations de changement de repère, il est généralement fait le choix d'un repère cartésien ce qui se justifie par sa commodité : ceci ne restreint en rien la généralité de la démonstration.

Nous verrons successivement quelques définitions puis les compositions des positions, vitesses et accélérations. Ce chapitre est uniquement mathématique.

NB : Un repère étant attaché à un référentiel, nous emploierons ici indifféremment référentiel et repère.

1. Définitions

1.1 Repère absolu

Soit un point matériel M observé par rapport à un repère Oxyz.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \textbf{(1)}$$

On dira que ce premier repère R_a (Oxyz) permet d'observer le mouvement absolu du mobile M. Le seul privilège de ce repère est d'avoir été choisi comme référence et a priori, il ne présente pas de propriété particulière; nous ne l'en appellerons pas moins repère absolu. Ses vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ seront considérés comme constants
Attention, ce repère absolu n'est pas forcément un repère inertiel (Galiléen) : comme annoncé, ce chapitre est purement mathématique.

1.2 Repère relatif

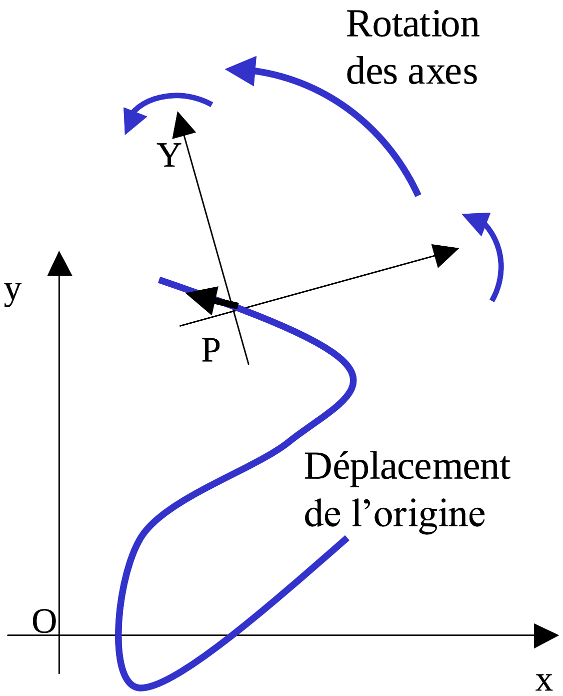
Soit un second repère PXYZ, appelé repère relatif, en mouvement quelconque par rapport au repère absolu.
Le point M sera repéré dans ce repère relatif par:

$$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K} \qquad \textbf{(2)}$$

Attention donc: les vecteurs $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ ne sont pas fixes dans le repère absolu R_a

Mouvement de R_a par rapport à R_r

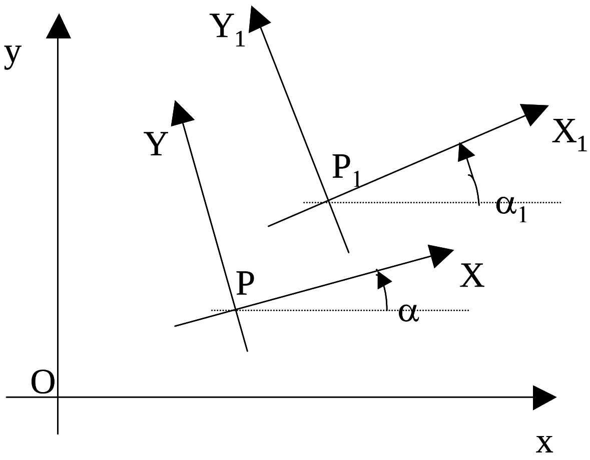
Représenté ici à 2 dimensions



$$\vec{V_P} = \frac{\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP}}{\Delta t}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\Delta t}\vec{k}$$

$$\Delta t \to 0$$



Le mouvement de M observé dans ce deuxième repère R_r est dit mouvement relatif.

A un instant t donné, ce mouvement de R_r par rapport à R_a se caractérise par deux grandeurs:
- la position du point P, origine du repère PXYZ :

$$\overrightarrow{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k} \qquad \textbf{(3)}$$

- et une rotation de R_r que nous définirons par un vecteur rotation $\vec{\Omega}$
(voir figure pour une rotation autour de l'axe z, et animation en amphi)
Attention, $\vec{\Omega}$ est rarement constant !

1.3 Mouvement d'entraînement

Un point fixe dans le repère <u>relatif</u> (X, Y, et Z constants) est un point mobile dans le repère <u>absolu</u>. Le mouvement d'un tel point dans le repère absolu est dit <u>mouvement d'entraînement</u>.

1.4 But du jeu

Ce que nous allons chercher, c'est à exprimer la position, la vitesse et l'accélération DANS LE REPERE R_a (Oxyz), en fonction :
- de leurs homologues dans le repère relatif R_r
- et des caractéristiques du mouvement du repère R_r par rapport au repère absolu R_a.

2. Composition des positions, vitesses, accélérations

2.1 Position

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \qquad \text{soit encore}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = (x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}) + (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K})} \qquad \textbf{(4)}$$

C'est terminé! Facile…

2.2 Vitesse

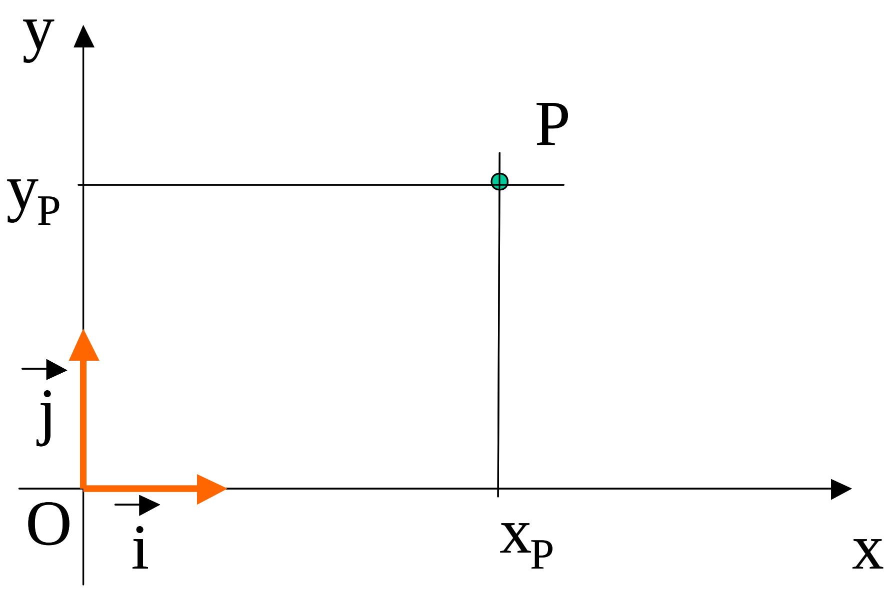
On cherche

$$\vec{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$ Pour faire intervenir le repère relatif, on utilise la relation (4)

$$d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OP} + d\overrightarrow{PM}$$ et donc

$$\vec{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{PM}}{dt} \qquad \textbf{(4bis)}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \overrightarrow{V_P}$$



$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \overrightarrow{V_P} = \frac{dx_P}{dt}\vec{i} + \frac{dy_P}{dt}\vec{j} \quad \left(+ \frac{dz_P}{dt}\vec{k} \right)$$

$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$:

$d\overrightarrow{OP} = dx_P.\vec{i} + dy_P.\vec{j} + dz_P.\vec{k}$ cf. (3) $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{dx_P}{dt}\vec{i} + \frac{dy_P}{dt}\vec{j} + \frac{dz_P}{dt}\vec{k}$

$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$ est donc simplement (ce qui était évident, mais là, on assure avec les composantes ...) la vitesse du point P dans le repère absolu d'origine O.
Elle sera notée $\overrightarrow{V_P}$:

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \overrightarrow{V_P} = \frac{dx_P}{dt}\vec{i} + \frac{dy_P}{dt}\vec{j} + \frac{dz_P}{dt}\vec{k}}$$ (vitesse du point P dans R_a) **(5)**

$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$:

Les composantes de $\overrightarrow{PM}$ sont données par (2) :
$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$ (attention, rappel, $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ ne sont pas fixes)

$$d\overrightarrow{PM} = dX.\vec{I} + dY.\vec{J} + dZ.\vec{K} + X.d\vec{I} + Y.d\vec{J} + Z.d\vec{K}$$

en divisant $d\overrightarrow{PM}$ par dt et en utilisant $\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{I}$, $\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{J}$, $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{K}$

$$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt} = \left[\frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}\right] + \vec{\Omega} \wedge (X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K})$$

La première parenthèse [ ] n'est autre que la vitesse du point M dans le repère R_r, appelée vitesse relative $\overrightarrow{V_r}$:

$$\boxed{\overrightarrow{V_r} = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}}$$ (vitesse du point M dans R_r) **(6)**

Et la seconde ( ) n'est autre que le vecteur $\overrightarrow{PM}$, cf. (2). Donc :

$$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt} = \overrightarrow{V_r} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$ **(6bis)**

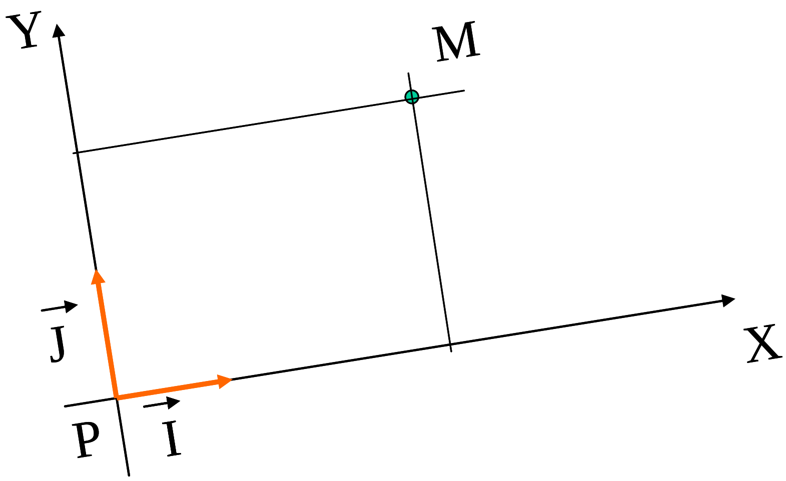
D'où finalement, en repartant de (4bis) avec (5) et (6bis)

$$\boxed{\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_P} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{V_r}}$$ Vitesse du point M dans le repère absolu **(7)**

Dans cette relation, la 2ème composante n'était pas forcément intuitive!
Remarque: s'il n'y a pas de rotation ($\vec{\Omega} = \vec{0}$) nous retrouvons la loi simple d'addition des vitesses $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_P} + \overrightarrow{V_r}$. Cette relation a été utilisée dans le chapitre lois de Newton, pour définir une famille de référentiels Galiléens R', connaissant un premier référentiel Galiléen R.

Un point fixe dans le repère relatif ($\overrightarrow{V_r} = \vec{0}$) aurait une vitesse dite d'entraînement
$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_P} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}$ d'où, pour un point quelconque:
$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$ formule commode … mais attention à la définition de $\overrightarrow{V_e}$!

$$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt} = \overrightarrow{V_r}$$



$$\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt} = \overrightarrow{V_r} = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} \quad \left(+ \frac{dZ}{dt}\vec{K} \right)$$

2.3 Accélération

Reprenons chacun des trois termes de $\overrightarrow{V_a}$ (eq. **(7)**) et calculons la dérivée par rapport au temps. Comme nous sommes maintenant parfaitement à l'aise avec les différentielles …!? nous passons immédiatement à la dérivée.

Dérivons donc successivement chacun des 3 termes de $\overrightarrow{V_a}(=\overrightarrow{V_P}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{V_r})$ par rapport au temps.

1/ $\dfrac{d\overrightarrow{V_P}}{dt}$: il suffit de dériver la relation **(5*)*** par rapport au temps :

$$\boxed{\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2}=\overrightarrow{\Gamma_P}=\frac{d^2x_P}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y_P}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z_P}{dt^2}\vec{k}}$$ (accélération du point P dans R_a) **(8)**

Le résultat est logique : puisque $\overrightarrow{V_P}$ est la vitesse du point P dans le repère absolu R_a (cf **(5)**) , $\dfrac{d\overrightarrow{V_P}}{dt}$ est simplement son accélération dans R_a, que nous avons notée $\overrightarrow{\Gamma_P}$.

2/ $\dfrac{d(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM})}{dt}$:

la dérivation d'un produit vectoriel se déroule comme celle d'un produit scalaire ordinaire :

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{PM}+\vec{\Omega}\wedge\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$$

En reprenant $\dfrac{d\overrightarrow{PM}}{dt}$ plus haut dans le paragraphe vitesse **(6 bis)**, nous arrivons à :

$$\frac{d(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM})}{dt}=\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{PM}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{V_r}+\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM})$$

PS : attention à ne pas supprimer ou translater les parenthèses : par exemple $(\vec{\Omega}\wedge\vec{\Omega})\wedge\overrightarrow{PM}=\vec{0}$

3/ $\dfrac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}$:

il faut repartir de la définition **(6)** de $\overrightarrow{V_r}=\dfrac{dX}{dt}\vec{I}+\dfrac{dY}{dt}\vec{J}+\dfrac{dZ}{dt}\vec{K}$

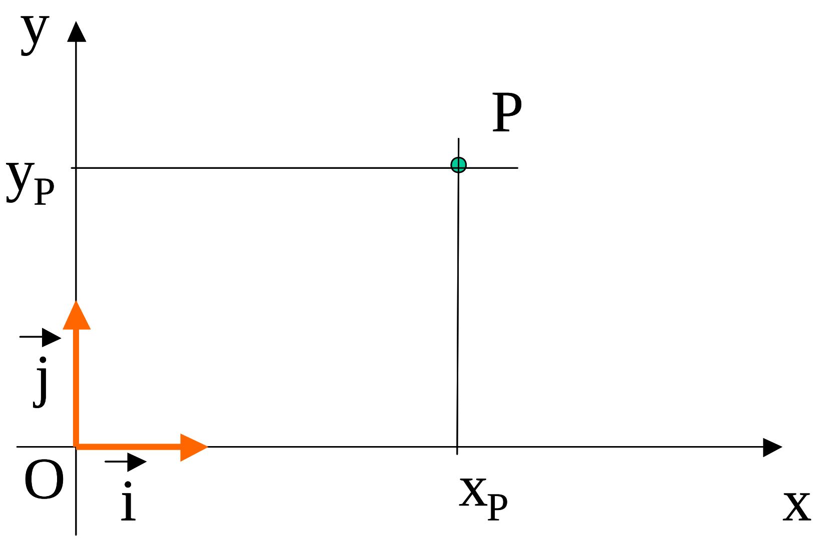
En posant :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_r}=\frac{d^2X}{dt^2}\vec{I}+\frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J}+\frac{d^2Z}{dt^2}\vec{K}}$$ (accélération du point M dans le repère R_r) **(9)**

vous montrerez facilement en procédant exactement comme pour les vitesses que :

$$\frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}=\overrightarrow{\Gamma_r}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{V_r}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = \overrightarrow{\Gamma_P}$$



$$\frac{d^2\overrightarrow{OP}}{dt^2} = \overrightarrow{\Gamma_P} = \frac{d^2x_P}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y_P}{dt^2}\vec{j} \quad \left(+ \frac{d^2z_P}{dt^2}\vec{k} \right)$$

d'où l'accélération finale, en additionnant chacune des dérivées:

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_a} = \overrightarrow{\Gamma_P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PM} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{\Gamma_r} \qquad \textbf{(10)}}$$

On souffle! Tiens, vous pouvez vérifier l'homogénéité de la formule, ça décontracte.
A user avec modération. Il est rare d'avoir à l'employer dans toute sa généralité. En particulier, si le vecteur rotation est constant (direction, sens et module) le terme $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PM}$ disparaît.

Attention, attention, $\overrightarrow{V_r}$ et $\overrightarrow{\Gamma_r}$ sont la vitesse et l'accélération du point M, repérés dans R_r. Pour leur calcul $\vec{I}$, $\vec{J}$ et $\vec{K}$ sont considérés comme fixes, et seuls X, Y et Z sont variables. Il n'y a d'ailleurs aucune ambiguïté : il suffit de bien se référer à leur définition **(6) et (9)**.

L'ordre dans lequel les termes de $\vec{\Gamma}$ sont écrits n'est pas quelconque. Il est de coutume de regrouper les trois premiers sous la dénomination accélération d'entraînement $\overrightarrow{\Gamma_e}$ (voir la définition du mouvement d'entraînement au début). En effet, si le point M est immobile dans le repère R_r alors $\overrightarrow{\Gamma_r} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{V_r} = \vec{0}$. Donc en définissant:

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_e} = \overrightarrow{\Gamma_P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PM}} \qquad \text{(accélération dite d'entraînement)} \qquad \textbf{(11)}$$

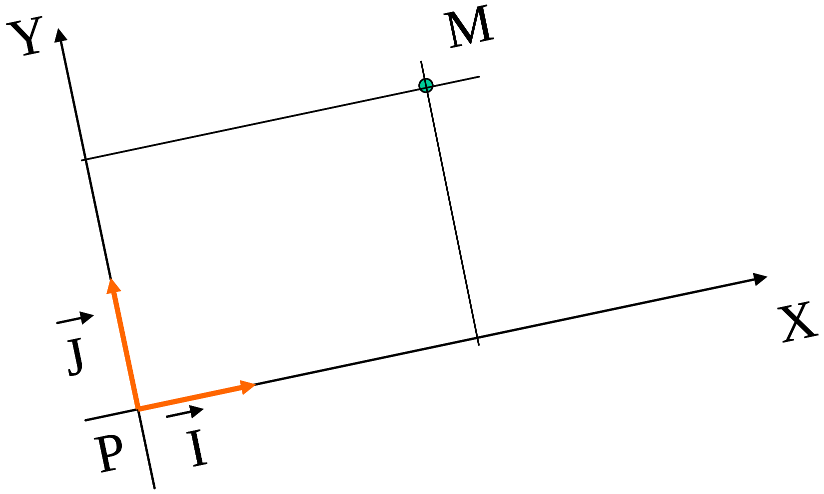
L'accélération absolue s'écrit finalement :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_a} = \overrightarrow{\Gamma_e} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{\Gamma_r}} \qquad \textbf{(12)}$$

où $2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}$, couplage de la rotation de R_r par rapport à R_a et de la vitesse dans R_r, est l'accélération de Coriolis, déjà rencontrée dans les repères cylindriques et sphériques. Elle intervient par exemple dans le mouvement des nuages autour des dépressions.
Comparez l'expression de $\overrightarrow{\Gamma_a}$ avec celle de la vitesse $\overrightarrow{V_a}$.

La roue de vélo constituera un bon support pour commence à utiliser ces relations. Notre bonne vieille terre, fournira ensuite quelques bons exemples pour illustrer $\overrightarrow{V_a}$ et $\overrightarrow{\Gamma_a}$, en étudiant par exemple la bille qui tombe à l'équateur.

$$\frac{d^2\overrightarrow{PM}}{dt^2} = \overrightarrow{\Gamma_r}$$



$$\overrightarrow{\Gamma_r} = \frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J} \quad \left(+ \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{K} \right)$$

3. Changement de repère : conclusion et résumé

La connaissance des changements de repère n'est pas strictement indispensable. Il est évidemment parfaitement possible de calculer directement une accélération sans utiliser les relations établies ici. Mais, en décomposant correctement le problème, ces relations permettent souvent d'exprimer plus rapidement les grandeurs vectorielles nécessaires.

Rappelons que les démonstrations ont été conduites en coordonnées cartésiennes pour des raisons de commodité. Il est évident que, dans le résumé qui suit, les composantes cartésiennes des vecteurs $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{V_P}$, $\overrightarrow{V_r}$, $\overrightarrow{\Gamma_P}$ et $\overrightarrow{\Gamma_r}$ peuvent être remplacées par leurs homologues en coordonnées cylindriques ou sphériques.

<u>Position</u>

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}}$$

$$\overrightarrow{OP} = x_P\vec{i} + y_P\vec{j} + z_P\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

<u>Vitesse</u>

$$\boxed{\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_P} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{V_r}}$$

$$\overrightarrow{V_P} = \frac{dx_P}{dt}\vec{i} + \frac{dy_P}{dt}\vec{j} + \frac{dz_P}{dt}\vec{k}$$

$\vec{\Omega}$ = vecteur rotation de R_r par rapport à R_a

$$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

$$\overrightarrow{V_r} = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}$$

<u>Accélération</u>

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_a} = \overrightarrow{\Gamma_P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{PM} + 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r} + \overrightarrow{\Gamma_r}}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_P} = \frac{d^2x_P}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y_P}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z_P}{dt^2}\vec{k}$$

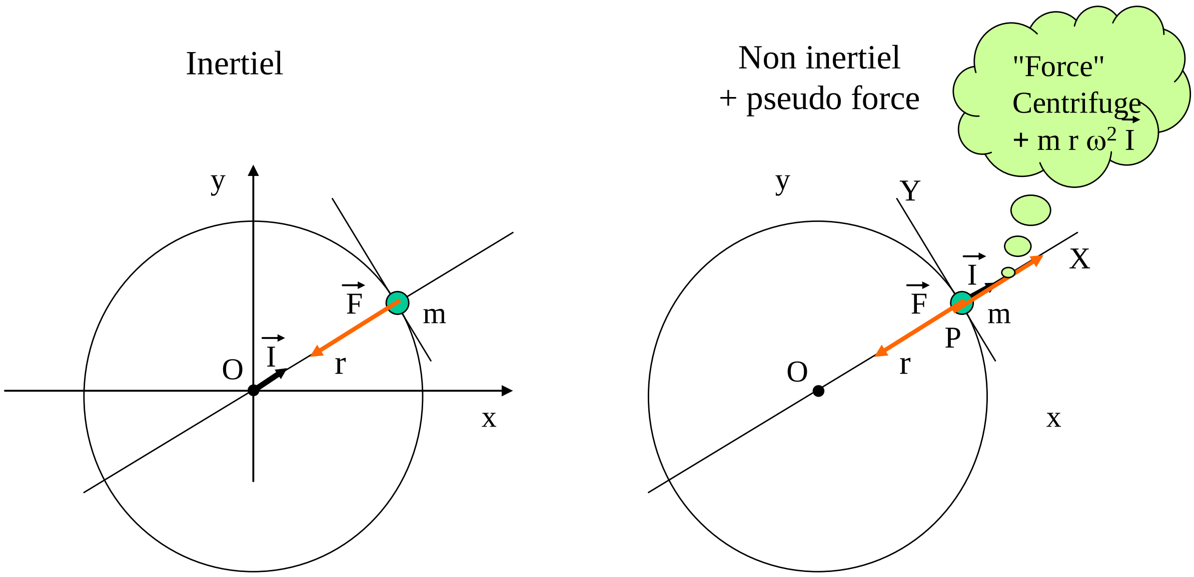
$\vec{\Omega}$ = vecteur rotation de R_r par rapport à R_a

$$\overrightarrow{PM} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$$

$$\overrightarrow{V_r} = \frac{dX}{dt}\vec{I} + \frac{dY}{dt}\vec{J} + \frac{dZ}{dt}\vec{K}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_r} = \frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J} + \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{K}$$

Mouvement circulaire uniforme: "force" centrifuge



Oxy Galiléen
$\vec{\Gamma} = - r\,\omega^2 \vec{I}$
$\vec{F} = - F \vec{I}$
$m\vec{\Gamma} = \vec{F}$
$mr\omega^2 = F$

Masse immobile dans PXY
Accélération nulle
Donc $\Sigma\ \overrightarrow{\text{Forces}} = \vec{0}$
$m\,r\,\omega^2 \vec{I} - F\vec{I} = 0$
$mr\omega^2 = F$

XII. Référentiels non inertiels (non Galiléens)

1. Introduction

L'utilisation d'un référentiel, donc d'un repère non galiléen pour résoudre un problème de dynamique est simplement une autre présentation des relations de la dynamique que nous avons établies. Elle va nous amener à définir des pseudo-forces pour remplacer certains termes d'accélération.

2. Exemple : mouvement circulaire uniforme

Prenons le mouvement circulaire uniforme assuré par une force $\vec{F} = -F\vec{I}$ dirigée vers le centre.
Dans un repère inertiel, l'application du PFD en utilisant les coordonnées polaires conduit au résultat :
$-F\vec{I} = -m\omega^2 r\vec{I}$
qui nous donne la relation classique entre la force, la masse, la vitesse angulaire et le rayon :
$F = m\omega^2 r$

Plaçons nous dans un repère PXY tournant avec le mobile.
Il faut savoir qu'une force ne dépend pas du repère considéré (nous devons cependant préciser que ce ne serait pas vrai en mécanique relativiste). Le bilan des forces est le même que précédemment, seule la force $\vec{F}$ existe, et son expression est inchangée.

On devrait donc pouvoir écrire :
$$-F\vec{I} = m(\frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J})$$
Cette équation implique que la force est nulle puisque X et Y sont constants !
Ou est l'erreur ?
L'erreur est que le PFD ne peut être appliqué que dans un repère inertiel, et le repère tournant n'en est pas un : par conséquent la dernière équation est fausse.

3. "Force" centrifuge

Dans le mouvement circulaire uniforme que nous venons d'analyser, il est possible d'appliquer le PFD dans le repère mobile PXYZ en introduisant une "force" supplémentaire, la (trop) fameuse "force" centrifuge, égale à
$+m\omega^2 r\vec{I}$

Du référentiel inertiel [a]
au référentiel quelconque [r] + pseudo forces

$$\vec{F} = m\,\vec{\Gamma}_a$$

Accélération dans un repère inertiel [a]

$$\vec{F} = m[\vec{\Gamma}_P + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{PM} + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_r + \vec{\Gamma}_r]$$

4 pseudo-forces

Accélération dans un référentiel quelconque [r]

$$\vec{F} - m\,\vec{\Gamma}_P - m\,\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM}) - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{PM} - m\,2\vec{\Omega}\wedge\vec{V}_r = m\,\vec{\Gamma}_r$$

Elle est dont égale et OPPOSEE au produit de la masse par l'accélération du point mobile P, dirigée vers l'extérieur du cercle.
L'écriture du PFD devient alors :

$$-F\vec{I} + m\omega^2 r\vec{I} = -m(\frac{d^2X}{dt^2}\vec{I} + \frac{d^2Y}{dt^2}\vec{J})$$

Comme X et Y sont constants (et même nuls), les accélérations associées sont nulles et donc : $-F\vec{I} + m\omega^2 r\vec{I} = \vec{0}$ et par conséquent : $F = m\omega^2 r$ qui est la relation cherchée.

Pour résumer ce cas particulier, au lieu d'écrire $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ dans un repère Galiléen soit:

$$-F\vec{I} = -m\omega^2 r\vec{I}$$

l'introduction de la force centrifuge nous conduit dans le repère tournant à écrire:

$$-F\vec{I} + m\omega^2 r\vec{I} = \vec{0}$$

c'est à dire à affirmer que la somme des forces est égale à zéro.
Mathématiquement, nous avons fait passer un terme de l'autre côté du signe égal et nous avons alors naturellement changé son signe. Cette notion est dangereuse si on ne maîtrise pas parfaitement les notions de mécanique, car elle peut conduire à des contradictions de type : si la somme des forces est nulle, alors le mouvement doit être rectiligne uniforme ($1^{ère}$ loi de Newton), or il est circulaire … !

4. Pseudo forces

La "force" centrifuge que nous venons d'introduire est une pseudo-force, certains emploient le terme de "force d'origine cinématique", elle est seulement l'équivalent d'une force, elle ne fait absolument pas partie des forces que nous avons identifiées en début de cours.
Il est donc possible, en introduisant des pseudo-forces d'écrire le PFD dans un repère non Galiléen. Il y a ainsi des pseudo-forces centrifuges, de Coriolis …

Reprenons l'expression (compliquée) de la composition des accélérations (cf. chapitre changement de repère) :

$$\vec{\Gamma_a} = \vec{\Gamma_P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{PM} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V_r} + \vec{\Gamma_r}$$

Supposons que le repère R_a soit inertiel. Dans le cas général, le repère R_r ne l'est pas car il n'est pas simplement en translation uniforme par rapport à R_a. Prenons une masse m soumise à une force $\vec{F}$. L'application du PFD dans le repère Galiléen R_a s'écrit :

$\vec{F} = m\vec{\Gamma_a}$ soit, pour faire intervenir le référentiel non Galiléen R_r :

$$\vec{F} = m\left(\vec{\Gamma_P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{PM} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V_r} + \vec{\Gamma_r}\right)$$

Pour se ramener dans le repère R_r, il faut arriver à une expression qui se présente sous la forme :

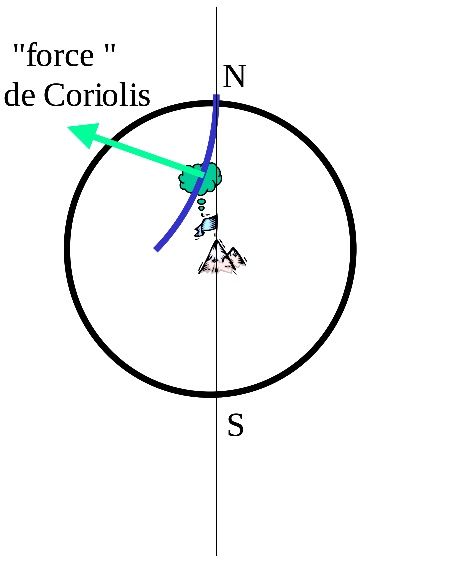
$\Sigma\vec{F} = m\vec{\Gamma_r}$ donc :

$$\vec{F} - m\left(\vec{\Gamma_P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{PM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{PM} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V_r}\right) = m\vec{\Gamma_r}$$

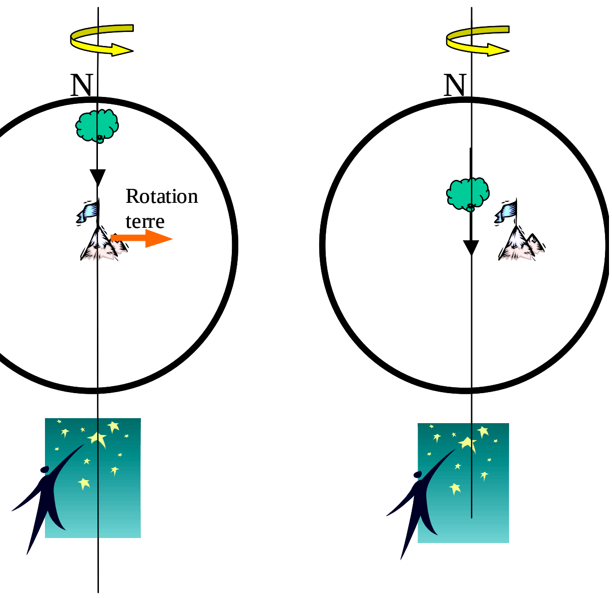
En conséquence de quoi, nous aurons l'expression correcte de l'accélération dans R_r à condition de rajouter à la (vraie) force $\vec{F}$ un ensemble de 4 pseudo–forces :

Penser autrement. Penser Galilée
Exemple: déviation vers l'Ouest

Terre = référentiel non Galiléen
=> terre immobile + pseudo force



Référentiel Galiléen :
centre de la terre et axes liés aux étoiles
=> terre en rotation



$$-m\overrightarrow{\Gamma_P} - m\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{PM}) - m\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{PM} - m\,2\vec{\Omega}\wedge\vec{V_r}$$

En conclusion, à notre niveau, il faut connaître l'existence de cette notion de pseudo forces, mais il n'est pas nécessaire de les utiliser. Le travail mathématique est de toute manière strictement identique. Attention en tous cas au changement de signe !

5. Penser autrement, penser Galilée

Le recours à ces pseudo forces est en général bien ancré, et notamment la force centrifuge est très souvent mise à contribution. C'est vrai qu'elle permet une "explication" à partir de sensations : nous ressentons une force, alors que nous imaginons ou calculons une accélération.
Mais pour vraiment comprendre la mécanique, il faut absolument essayer de se placer dans un repère Galiléen et imaginer l'action des vraies forces. Trois exemples :

5.1 Véhicule qui amorce un virage.

En tant que passagers, nous ressentons une force qui a tendance à nous éjecter de la trajectoire, c'est la force centrifuge, le véhicule nous retient : l'"explication" est donnée.
Pensons Galilée : nous pouvons dire que nous suivions avant le virage une trajectoire rectiligne. En l'absence de force cette trajectoire rectiligne se prolongerait (1$^{\text{ère}}$ loi de Newton). C'est le véhicule, par l'intermédiaire du siège (et donc de frottements statiques), qui nous applique une force, pour nous communiquer une accélération vers le centre de la trajectoire et nous dévier de notre confortable ligne droite.

5.2 Sens d'enroulement des nuages autour des dépressions.

Le calcul s'effectue souvent dans un repère lié à la terre ; pour ce genre de phénomène, la terre n'est pas un repère Galiléen et il faut donc faire intervenir des pseudo-forces, de Coriolis en particulier (attention aux signes). Encore une fois le résultat est qu'une "force" nous "explique" le sens d'enroulement.
Changeons de repère, prenons du recul par rapport à nos habitudes, et plaçons nous dans un repère inertiel : origine au centre de la terre et axes liés aux étoiles. Supposons une surpression aux pôles et une dépression sur les Belledonne : l'air et les nuages vont se diriger du pôle vers les Belledonne avec en ligne de mire une étoile, fixe, comme le ferait un satellite lancé au pôle. L'air avance, mais pendant ce temps la terre tourne, l'Europe se déplace vers l'Est, et donc les nuages vont passer à l'Ouest. L'essentiel est dit (il y a cependant d'autres composantes), sans intervention de pseudo force. Par continuité, nous pouvons imaginer l'enroulement, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Essayez dans l'hémisphère Sud pour comparer : le sens d'enroulement s'inverse.
Pour une masse d'air qui partirait de l'équateur vers le Nord, le raisonnement est un peu plus subtil du fait de la vitesse initiale vers l'Est : mais le résultat est identique bien sûr.

5.3 Marées

Pourquoi y-a-t-il 2 marées par jour? Essayez de justifier en premier lieu le fait q'il y ait une élévation du niveau de l'océan au pied de la lune et aux antipodes. Une piste : la terre et la lune tournent autour de leur centre de masse … mais attention … l'histoire a un rebondissement … à suivre dans *physique.belledonne* *et* *http://dlst.ujf-grenoble.fr/cours/PHY121_GV/*

Sommaire des compléments sur : http://perso.wanadoo.fr/physique.belledonne

Coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{V} et \ \overrightarrow{\Gamma}$ complexes

Cycliste (voiture) dans un rond point

Equation du cycliste (et de la voiture)

Equation différentielles linéaire, coefficients constants : solution exponentielle et sinus

Chaînette : Equation de la courbe et qq. propriétés

Plus court chemin : plan incliné et durée du trajet

Maître nageur et temps minimum de sauvetage

Ellipse : relation entre les anomalies θ et λ

Le virage en deux roues : comportement anti intuitif

Scénario catastrophe : chute de deux masses l'une vers l'autre

Le principe de moindre action

Bibliographie

Ouvrages de 1er cycle

- **Cours de physique – Mécanique du point,** Alain Gibaud, Michel Henry, Dunod.
- **Mécanique I,** M.Bertin, JP Faroux, J. Renaud, Dunod (ancienne édition)

ou **Mécanique I,** JP Faroux, J. Renaud, collection *J'intègre,* Dunod.

- **Mécanique I et II,** JM Brébec, collection *H Prépa*, Hachette Supérieur.
- **Mécanique I,** H. Gié, JP Sarmant, Tec et Doc.
- **Mécanique,** P. Brasselet, PUF.
- **Physique générale. Tome 1 Mécanique. Alonso et Finn** Edition du renouveau Pédagogique

Ouvrages de 1er cycle et plus

- **Mécanique,** JP Perez, Masson.
- **Cours de physique de Berkeley, 1. Mécanique,** C. Kittel, WD Knight, en français chez Dunod.
- **Physique générale, 1. Mécanique,** Alonso-Finn, Edition du renouveau pédagogique.

Ouvrages évolués avec approches originales.

- **Le cours de physique de Feynman, Mécanique I**, R. Feynman, en français chez Dunod.
- **L'univers Mécanique,** L. Valentin, Hermann.

Ouvrages spécialisés en astronomie

- **Astronomie Fondamentale Elémentaire** , V. Kourganoff, Masson.
- **Astronomie générale,** A. Danjon, Blanchard.

Sites internet

1)
http://www.ujf-grenoble.fr/UEL/physique/meca/index.htm
observer → des vidéos relatives à la mécanique du point.

2)
http://coursenligne.ujf-grenoble.fr/WeBLE

3) http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/cortial/bibliohtml/biblgene.html)

4)
http://library.thinkquest.org/10796/credit.htm

5)
http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Index_Meca.html
Plein plein plein d'animations.

6)
http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/menumeca.html
(trouvé sur http://perso.wanadoo.fr/acsa/liens1.htm)

7)
Plein de liens de physique à explorer
http://www.sb-roscoff.fr/Maree/maree.html :
http://perso.wanadoo.fr/olivier.granier/meca/accueil.htm.

8)
A tester : http://www.prepas.org/pagesperso/.

9)
http://www.mathcurve.com
Absolument extraordinaire pour la cinématique, avec en plus la physique et l'histoire associée aux équations célèbres.

10)
http://lpsc.in2p3.fr/atlas_new/teachingitem.htm
Eléments du cours de mécanique et introduction à la relativité. Par Johann Collot, Professeur UJF

11) http://pcsi-unautreregard.over-blog.com/0-categorie-10588232.html
Beaucoup de physique et des illustrations

12)
http://perso.wanadoo.fr/physique.belledonne
Contient ce polycopié et différentes extensions, par Gilbert Vincent, Professeur UJF

12bis)
http://dlst.ujf-grenoble.fr/cours/PHY121_GV/
Ce cours sous forme de diapositives commentées, avec beaucoup de compléments (dont les marées) par Gilbert Vincent, Professeur UJF