Etude des distributions de partons : Transformations de Mellin et prolongement analytique

Rapport de stage Master 1

Benjamin Dechenaux
M1 Physique - Magistère 2ème année
Université Joseph Fourier
Année 2008-2009

Stage effectué d'avril à juin 2009 au sein du groupe Théorie du Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie de Grenoble, sous la direction de Ingo Schienbein.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mon maître de stage, Ingo Schienbein, qui, malgrès un emploi du temps très sérré, à su nous guider et conseiller, Fréderic et moi, durant ce stage.

Je remercie aussi le groupe Théorie au sein duquel j'ai effectué mon stage, messieurs Benoît Clément, Julien Labbé, Michael Klasen, Fréderic Mayet et Juan Macias Pérez pour m'avoir aidé pour mon stage ou mon orientation future.

Je remercie, pour leur compagnie, mes camarades, Daniel, Fréderic, Clément, Guilhem et Mariya, en stage au LPSC. Enfin, je pense devoir de gros remerciements à Tomas, pour sa gentillesse et pour avoir toujours trouvé le temps pour m'aider.

1 Laboratoire d'accueil

J'ai effectué mon stage au sein du Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie (LPSC) de Grenoble. Ce laboratoire est affilié à l'Institut National de Physique Nucléaire et de Physique des Particules (IN2P3) du CNRS. Ses thématiques de recherche principales se concentrent sur la cosmologie observationnelle, la physique des particules (expérimentale et théorique) et la physique nucléaire.

J'ai été acceuillis, pour mon stage, au sein du groupe Théorie, dont les trois grands axes principaux d'étude sont : la chromodynamique quantique (QCD), la supersymétrie et la physique hadronique.

Mon stage se situe dans le domaine de la QCD, avec pour but la réalisation d'un programme sous Mathematica capable de calculer analytiquement des transformées de Mellin puis de prolonger analytiquement les résultats obtenus sur le plan complexe en vue d'une tranformée inverse. Il s'inscrit dans un cadre plus large car il constitue la continuation du stage de M1 de Florian Linder et est effectué en collaboration avec mon camarade de promotion, Frederic Bauer.

2 Le modèle des partons

Le modèle des partons intervient dans l'étude des collisions impliquant des hadrons qui sont des objets dominés par l'interaction forte. Cette interaction possède la particularité d'avoir une constante de couplage décroissante avec l'échelle d'énergie. On peut ainsi distinguer deux régimes :

- *Un régime non-perturbatif* : pour de faibles énergies[1], les quarks sont *confinés* à l'interieur des hadrons.
- *Un régime perturbatif* : aux grandes énergies, les quarks et gluons apparaissent libres à l'interieur du hadron. C'est la *liberté asymptotique*.

L'existance de **théorèmes de factorisation** permet de séparer les processus à longues et courtes distances, donnant un pouvoir prédictif dans les collisions avec des hadrons dans l'état initial.

La section efficace d'un processus dur [2] $\sigma(q_i q_j \rightarrow X)$ (contracté dans la suite en $\sigma_{q_i q_j}$) impliquant deux "partons" (quarks ou gluons du hadron dans l'état initial), peut se calculer de manière perturbative. Les théorèmes de factorisation permettent alors de passer de cette section efficace à celle de hadrons en interaction par l'introduction de *Fonctions de Distributions de Partons* (PDF), $f_i(x, \mu_F)$, qui expriment la probabilité de trouver dans le hadron un parton i possédant la fraction d'impulsion x de ce dernier, tout cela au prix de l'introduction d'une échelle d'énergie, μ_F, qui "sépare" les deux régimes.

Finalement, les théorèmes de factorisation donnent, pour la section efficace de deux hadrons en interaction $\sigma(h_i h_j \rightarrow X)$:

$$\sigma(h_i h_j \rightarrow X) = \sum_{i,j} \int_0^1 \int_0^1 f_i(x_i, \mu_F) f_j(x_j, \mu_F) \sigma_{q_i q_j}(x_i, x_j, \mu_F)\, dx_i dx_j \tag{1}$$

Les PDFs, dépendantes de l'échelle d'énergie μ_F, peuvent être transposées sur une échelle différente en résolvant les équations DGLAP.

[1] Augmenter l'énergie d'un processus revient à considérer des distances relatives plus faibles.

[2] Un processus dur est une collision entre deux partons, avec un échange d'énergie important (Q $\geqslant$ 1 GeV).

3 Transformées de Mellin

3.1 Transformées de Mellin

La transformée de Mellin est une transformation intégrale, au même titre que la transformée de Fourier ou Laplace. Elle se définie par :

$$\widetilde{f}(N) \;=\; M[f(x)](N) \;:=\; \int_0^1 x^{N-1}\, f(x)\, dx \;\; \forall N \in \mathbb{N}\,,\, N > 1 \tag{2}$$

Nous pouvons noter quelques propriétés remarquables de cette transformée :

$$M[\lambda_1\, f(x) \,+\, \lambda_2\, g(x)](N) \;=\; \lambda_1\, M[f(x)](N) \,+\, \lambda_2\, M[g(x)](N)\;,\; \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}\;, \tag{3}$$

$$M[f(x^b)](N) \;=\; \frac{1}{b}\, M[f(x)]\left(\frac{N}{b}\right)\;,\; b > 0\;, \tag{4}$$

$$M[x^\alpha\, f(x)](N) \;=\; M[f(x)](N \,+\, \alpha)\;,\; \alpha \,\in\, \mathbb{C}\;. \tag{5}$$

Mais, la propriété qui nous intéresse ici particulièrement est la **convolution de Mellin**, définie par :

$$(f * g)(x) \;:=\; \int_0^1 f(t)\, g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t}\,. \tag{6}$$

On a alors :

$$M[(f * g)(x)](N) \;=\; M[f(x)](N) \times M[g(x)](N)\;. \tag{7}$$

Cette propriété se trouve être très utiles pour le calcul numérique de distributions de partons puisque les équations DGLAP sont des convolutions de Mellin. Travailler en espace de Mellin permettra alors de simplifier considérablement les calculs et ainsi d'obtenir une **solution analytique** de ces équations.

3.2 Transformée inverse

La transformée de Mellin inverse est effectuée dans le plan complexe, en utilisant le théorème des résidus (preuve dans [3]). Elle est donnée par

$$f(x) \;=\; M^{-1}[\widetilde{f}(N)](x) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{C_N} x^{-N}\, \widetilde{f}(N)\, dx\;, \tag{8}$$

où le contour C_N doit se tenir à droite de toute singularité et s'étendre de $-i\infty$ à $+i\infty$

3.3 Théorème de factorisation en espace de Mellin

Nous devons à présent traiter la traduction du théorème de factorisation en espace de Mellin. En partant de l'équation (1) et en insérant les transformées inverses des PDFs, on obtient :

$$\sigma(h_i h_j \,\rightarrow\, X) \;=\; \sum_{i,j}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{C_N}\int_{C_M} \widetilde{f_i}(N,\mu_F)\widetilde{f_j}(M,\mu_F)\widetilde{\sigma_{q_i q_j}}(N,M,\mu_F) dN dM\;, \tag{9}$$

où l'on a fait apparaître la transformée de Mellin de la section efficace du processus partonique $\widetilde{\sigma_{q_i q_j}}$

4 Travaux effectués

Le but de mon stage est de concevoir un programme capable de calculer *analytiquement* les transformées de ces sections efficaces, puis de prolonger les résultats dans le corps des complexes en vue d'une transformation inverse.

L'intêret sera alors de pouvoir implementer dans le programme PEGASUS (voir rapport de Fréderic Bauer) les résultats obtenus de manière à pouvoir ajuster au mieux les PDFs.

4.1 Calcul analytique des TM sous Mathematica

La première partie de mon stage fut donc dediée à l'élaboration d'un programme capable de calculer analytiquement des transformées de Mellin de sections efficaces. Un tel programme nécessite l'emploi d'un logiciel de calcul formel avec lequel nous pourrons programmer des règles de calcul : Mathematica.

Le calcul de sections efficaces ainsi que des transformées de Mellin est en général assez complexe et fait intervenir des fonctions non-triviales. Mais, les expressions rencontrées dans ce type d'opérations sont quasi-génériques : elles font systématiquement intervenir les mêmes outils et permettent de dégager des résultats semblables.

A titre d'exemple, nous pouvons ici introduire les *sommes harmoniques*, qui apparaissent naturellement dans les calculs de transformées. Elles sont définies par :

$$S_{k_1 \ldots k_m}(N) \;:=\; \sum_{n_1=1}^{N} \frac{sign[k_1]^{n_1}}{n_1^{|k_1|}} \times \sum_{n_2=1}^{n_1} \frac{sign[k_2]^{n_2}}{n_2^{|k_2|}} \times \ldots \times \sum_{n_m=1}^{n_{m-1}} \frac{sign[k_m]^{n_m}}{n_m^{|k_m|}} \,.$$

Et on a, par exemple, l'équivalence directe

$$S_1(N) \;=\; \int_0^1 \frac{x^N - 1}{x-1} dx \;\equiv\; M\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)_+\right](N) \,,$$

où la distribution $(..)_+$ est définie par

$$\int_0^1 g(x)\,(f(x))_+\,dx \;=\; \int_0^1 \{g(x) \;-\; g(1)\}\,f(x)\,dx \,.$$

Pour réaliser notre package, nous nous sommes basé sur la référence [8], qui donne les transformées des principales fonctions rencontrées dans les calculs de sections efficaces.

Au final, le package réalisé est capable de calculer les transformées d'environ 80 classes de fonctions et est munis des propriétées que nous avons données dans la section 3.1.

Mentionnons enfin qu'il a été testé sur le calcul des transformées des coefficients de Wilson en DIS et SIDIS[3], en comparant les expressions données par le programme avec celles trouvées dans la littérature. Nous donnons l'exemple du calcul du coeficient de Wilson (polarisé) SIDIS

[3]DIS : Deep Inelastic Scattering / SIDIS : Semi-Inclusive Deep Inelastic Scattering.

$\Delta C_{qq}^{(1)}$, dont l'expression en espace x,z est donnée par (réf [6]) :

$$\Delta C_{qq}^{(1)} \;=\; C_F \Bigg\{ -8\,\delta(1-x)\delta(1-z) \;+\; \delta(1-x)\left[P_{qq}(z)\,\ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F^2}\right) \;+\; L_1(z) + L_2(z) \;+\; (1-z)\right] \;+\; \delta(1-z)\left[P_{qq}(x)\,\ln\left(\frac{Q^2}{\mu_F'^2}\right) \;+\; L_1(x) \;-\; L_2(x) \;+\; (1-x)\right] \;+\; 2\left(\frac{1}{1-x}\right)_+\left(\frac{1}{1-z}\right)_+ \;-\; \frac{1+z}{(1-x)_+} \;-\; \frac{1+x}{(1-z)_+} \;+\; 2(1+xz) \;-\; 2(1-x)(1-z)\Bigg\},$$

avec :

$$P_{qq}(\xi) \;=\; \frac{1+\xi^2}{(1-\xi)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-\xi), \quad L_1(\xi) \;=\; (1+\xi)^2\left(\frac{\ln(1-\xi)}{1-\xi}\right)_+, \quad L_2(\xi) \;=\; \frac{1+\xi^2}{1-\xi}\ln(\xi),$$

La transformée de Mellin de cette expression, effectuée avec notre programme nous donne

$$\widetilde{\Delta C_{qq}^{(1)}} \;=\; C_F \Bigg\{ -8 \;-\; \frac{1}{M^2} + \frac{2}{(1+M)^2} + \frac{1}{N^2} + \frac{(1+M+N)^2-1}{M(M+1)N(N+1)} + 3S_2(M) - S_2(N) \;+\; [S_1(M) \;+\; S_1(N)]\left[S_1(M) \;+\; S_1(N) \;-\; \frac{1}{M(M+1)} \;-\; \frac{1}{N(N+1)}\right] \;+\; \left[\frac{2}{N(N+1)} \;+\; 3 \;-\; 4S_1(N)\right] ln\left(\frac{Q}{\mu_F}\right) \;+\; \left[\frac{2}{M(M+1)} \;+\; 3 \;-\; 4S_1(M)\right] ln\left(\frac{Q}{\mu_F'}\right)\Bigg\},$$

en correspondance avec les expressions trouvées dans la littérature (voir la référence [7]).

4.2 Prolongement analytique

Nous sommes maintenant capable d'obtenir l'expression de section efficaces en fonctions des variables de l'espace de Mellin. Or, nous souhaitons, au final, un résultat ayant un sens dans l'espace habituel : autrement dit, nous devons être capables d'effectuer la transformée inverse dans le plan complexe.

Le problème qui se pose alors est que certains types de fonctions apparaissant dans la transformée de Mellin n'ont de valeurs que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$: c'est le cas par exemple des sommes harmoniques.

Les mathématiciens se sont cependant déjà penchés sur la question, avec comme résultat la théorie du prolongement analytique, qui stipule que pour une fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$, il existe un prolongement **unique et analytique** de cette fonction sur l'ensemble du corps. La seconde partie de mon stage fut dédiée à compléter le package de transformées de Mellin par l'introduction des transformées prolongées.

Encore une fois, la théorie du prolongement analytique, simple sur le principe, s'avère compliquée à mettre en oeuvre. Je me suis donc largement appuyé sur la littérature. La référence [10] donne les principales méthodes pour calculer les prolongements des fonctions qui nous intérressent.

Exemple de prolongement

Je prendrais l'exemple des fonctions du type f(x)/(1+x), qui apparaissent souvent et font intervenir des transformées ne pouvant être étendue sur le corps des complexes. Il existe une méthode simple pour contourner se problème. En partant de la définition (2), on a :

$$M\left[\frac{f(x)}{1+x}\right](N) \;=\; \int_0^1 x^{N-1}\,\frac{f(x)}{1+x}dx\ .$$

Par intégration par partie, on trouve,

$$\int_0^1 x^{N-1}\,\frac{f(x)}{1+x}dx \;=\; ln[2]f(1) \;-\; \int_0^1 x^{N-2}\,ln(1+x)\Big[(N-1)f(x)+xf^{'}(x)\Big]\,dx\ ,$$

ce qui donne, en développant,

$$M\left[\frac{f(x)}{1+x}\right](N) \;=\; ln[2]f(1) \;-\; (N-1)\,M[ln(1+x)\,f(x)](N-1) \;-\; M[ln(1+x)\,f^{'}(x)](N)\ ,$$

Dans l'intervalle [0,1], en se basant sur l'algorithme de Remez [14], il est possible d'approximer la fonction ln(1+x) par un polynôme :

$$ln(1+x) \;\approx\; \sum_{k=1}^{9} a_k\,x^k\ ,$$

où les coefficients a_k sont déterminés par la méthode d'approximation MiniMax ([15]) de Mathematica, avec une erreur de l'ordre de $3.\,10^{-8}$. Au final, on obtient l'expression,

$$M\left[\frac{f(x)}{1+x}\right](N) \;=\; ln[2]f(1) - \sum_{k=1}^{9}\Big\{(N-1)\,a_k\,M[f(x)](N+k-1) \;-\; a_k\,M[f^{'}(x)](N+k)\Big\}\ .$$

qui reste valide pour N complexe avec des fonctions f(x) "simples".

Conclusion

La description des états liés par interaction forte, en utilisant les principes premiers de la QCD échappe toujours aux théoriciens : la complexité qu'oppose cette théorie est si grande qu'elle exclue pour le moment toutes approches autres que phénoménologiques sur le sujet.

Notons tout de même les progrès effectués dans le domaine de la QCD sur réseau, qui tente de résoudre ces états par la résolution numérique des équations du mouvement. Cette voie étant prometteuse, il faudra cependant attendre de nouveaux progrès en informatique pour pouvoir espérer un quelconque résultat.

En attendant, la transformation de Mellin s'avère être un outil indispensable dans l'approche phénonménologique de ces objets. En fournissant un cadre simple et naturel pour les différentes équations en jeu, elle permet de simplifier considérablement les calculs numériques.

D'un point de vue personnel, j'ai beaucoup appris durant ce stage, tant sur le plan physique que mathématique. J'ai eu l'occasion de me familiariser avec beaucoup d'objets et de concepts nouveaux. J'ai de plus put m'initier au programme Mathematica, outil indispensable de la physique théorique actuelle.

Références

[1] Francis Halzen et Alan D. Martin , *Quarks & Leptons - An Introductory Course in Modern Particle Physics*

[2] Michael Klasen, *Mécanique quantique relativiste - Théories de jauge*

[3] R.Courant et D.Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, volume 1

[4] Walter Appel, *Mathématiques pour la Physique et les Physiciens*

[5] Stage de M1 de Florian Linder : *http ://lpsc.in2p3.fr/schien/Rapports/linder.pdf*

[6] D. de Florian, M. Stratmann, W. Vogelsang, Phys. Rev. **D57**(1998)5811

[7] M. Stratmann, W. Vogelsang, Phys. Rev. **D64**(2001)114007

[8] J.Blümlein, S. Kurth, Phys. Rev. **D60**(1999)014018

[9] J. Blümlein, arXiv :0901.3106 (hep-ph)

[10] J.Blümlein, arXiv :0003100 (hep-ph)

[11] S. Albino, arXiv :0902.2148 (hep-ph)

[12] D. de Florian, R. Sassot, M. Stratmann, W. Vogelsang, arXiv :0904.3821 (hep-ph)

[13] J. A. M. Vermaseren, arXiv :9806280 (hep-ph)

[14] Wikipedia *http ://en.wikipedia.org/wiki/Remez_algorithm*

[15] Fonction MiniMax de Mathematica : *http :// reference.wolfram.com/mathematica /FunctionApproximations/tutorial/FunctionApproximations.html*