

ETUDE DES DISTRIBUTIONS DE PARTONS :  
AJUSTEMENTS EN ESPACE DE MELLIN

---

Rapport de stage Master 1

**Frédéric Bauer**  
M1 Physique  
Université Joseph Fourier  
Année 2008-2009

---

Stage effectué d'avril à juin 2009 au sein du groupe Théorie  
du Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie  
de Grenoble, sous la direction de Ingo Schienbein.

# 1 A propos de ce stage

## Laboratoire d'accueil

Le stage a été effectué sous la direction d'Ingo Schienbein, au sein du groupe Théorie du LPSC, durant la période du mois d'avril au mois de juin.

Le Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, qui emploie près de 200 personnes, joue un rôle fondamental dans la recherche fondamentale française et est en lien direct avec les laboratoires européens (comme le CERN) et le reste du tissu grenoblois.

La physique hadronique, la QCD perturbative ou encore la QCD sur réseau constituent les principaux champs de recherche du groupe théorie.

## Objet du stage

Nous avons eu pour objectif l'étude des fonctions de distributions partoniques (PDFs).

Les PDFs étant des objets non perturbatifs, la théorie se limitera à nous donner des fonctions compatibles avec la physique et nous chercherons à affiner ces fonctions en les confrontant aux données expérimentales, via les équations d'évolution DGLAP. Comme nous le verrons plus loin, le traitement de ces équations est grandement facilité si l'on se place dans l'espace de Mellin, c'est pourquoi on utilise le package FORTRAN Pegasus qui travaille dans cet espace.

Bien entendu, nous nous sommes d'abord attachés à bien comprendre les concepts que nous avons eu à utiliser au cours de ce stage (diagramme de Feynman, transformée de Mellin) avant de les appliquer à l'étude des PDFs.

Le rapport qui va suivre se veut être fidèle à la démarche que nous avons suivie et comporte donc une partie d'introduction des notions, avant de passer à l'utilisation des transformées de Mellin et une dernière partie exposant mon travail sous Pegasus.

# 2 Etude préparatoire

## 2.1 Processus Drell-Yan

Ce stage s'inscrit dans le cadre physique de la QCD perturbative. L'étude de ce processus simple et très courant qui nous a occupé durant le début de ce stage a été l'occasion de nous familiariser avec les concepts utiles à son bon déroulement.

Le processus Drell Yan est la production de deux leptons  $\ell^+$ ,  $\ell^-$  suite à la collision de deux hadrons incidents A,B. Ce processus est lié directement aux expériences menées dans les collisionneurs (p-p) ce qui lui donne tout l'intérêt que nous lui portons ici.

Le but de cette partie est de déterminer la section efficace totale du processus.

## Un problème de QCD

Les hadrons intervenant dans ce processus seront décrits par le modèle des partons, il s'agit donc d'étudier les interactions entre les partons qui composent les hadrons.

Les partons sont sujets (bien plus qu'à l'interaction électromagnétique) à l'interaction forte par le biais de leur charge de couleur. Si l'interaction électromagnétique, caractérisée par une constante de couplage faible et décroissante avec la distance, peut être décrite dans le cadre d'un traitement perturbatif, il n'en est pas de même pour l'interaction forte entre deux partons.

Selon les échelles d'énergies considérées, on rencontre deux comportements:

-Le régime perturbatif caractéristique de l'interaction à courte distance (d'où son nom de liberté asymptotique) ou à haute énergie dans lequel les partons se comportent en particules libres [10].

Ce régime autorise une approche théorique basée sur la théorie des perturbations.

-Le régime non perturbatif - pour de petites échelles d'énergies (ou de grandes distances) - est beaucoup plus difficile à décrire et il n'y a pas encore d'approche théorique satisfaisante.

Le théorème de factorisation [3] très utilisé dans le calcul de section efficace permet de décomposer une section efficace en un produit de convolution:

$$\sigma_{DY} = \sum_{i,j} \int_0^1 \int_0^1 f_{i/H_1}(x_1, \mu_f) f_{j/H_2}(x_2, \mu_f) \hat{\sigma}_{ij \rightarrow \ell^+ \ell^-}(x_1, x_2, \mu_f) dx_1 dx_2 + O\left(\frac{1}{\mu_f^2}\right) \quad (1)$$

La section efficace du processus dur  $\hat{\sigma}_{ij \rightarrow \ell^+ \ell^-}$  comprend uniquement la physique perturbative, cad toutes les interactions décrites par un diagramme de Feynman.

Les fonctions de distribution partoniques (PDFs)  $f_{i/H}$  qui contiennent les interactions non perturbatives et doivent être interprétées comme la probabilité pour un parton dans H de saveur i d'avoir une fraction x de la quantité de mouvement de H.

Par conséquent, c'est là qu'est leur caractère universel, elles ne dépendent que du hadron H considéré et peuvent être utilisées une fois déterminées pour toute réaction impliquant H.

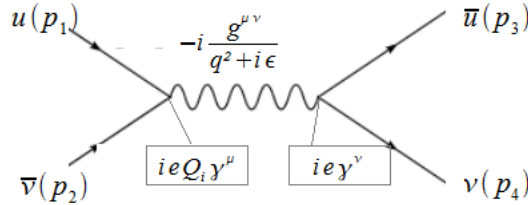
La décomposition permise par le théorème de factorisation impose le choix d'une échelle de factorisation,  $\mu_f^1$ , qui sépare les deux régimes. Au final les PDFs<sup>2</sup> et la section partonique dépendront des interactions qu'elles comprendront et donc de  $\mu_f$ .

### Calcul de la section partonique

L'intérêt de cette formulation est qu'elle relie directement une grandeur observable avec les fonctions de distribution et finalement, sa valeur prédictive ne dépendra que de la justesse des PDFs considérées, à condition, évidemment, de déterminer la section partonique.

C'est ce à quoi nous nous sommes intéressés durant le début de ce stage, via l'utilisation des diagrammes de Feynman et des règles associées.

Ayant avant tout pour but de nous familiariser avec la méthode, nous nous sommes limités au LO (Leading Order) qui se résume par le diagramme suivant:



L'application des règles de Feynman permet d'écrire l'amplitude M du processus comme:

$$-iM = iQ_i \frac{e^2}{q^2} [\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1)] [\bar{u}(p_3) \gamma_\mu v(p_4)]$$

Nous donnant :

$$|M|^2 = Q_i^2 \alpha^2 \frac{32\pi^2}{3} \left( \frac{\hat{t}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) \text{ (avec } \hat{u} = 2p_2 p_3, \hat{t} = 2p_2 p_4 \text{ et } \hat{s} = 2p_1 p_2)$$

En intégrant  $d\hat{\sigma} = \frac{1}{2\hat{s}} |M|^2 d\Gamma$  où  $d\Gamma$  est un élément infinitésimal de l'espace des phases, on obtient finalement (ce qui, si on oublie la couleur, est en accord avec 6.33 de [1]):

$$\hat{\sigma} = \frac{4\pi\alpha^2}{9\hat{s}} Q_i^2 \quad (2)$$

<sup>1</sup>Généralement on choisit une échelle comparable à l'énergie échangée lors du processus

<sup>2</sup>Il est possible de déduire  $f(x, \mu_f)$  à partir de  $f(x, \mu)$  via la résolution d'équations perturbatives dites DGLAP

## 2.2 Introduction des transformées de Mellin

Les transformées de Mellin, outils très utiles pour accélérer la résolution numérique des équations d'évolution, sont surtout utilisées par Pegasus qui travaille en espace de Mellin.

### Définition mathématique

La transformée de Mellin d'une fonction  $f$ ,  $M[f](N)$ , est définie comme:

$$F(N) = M[f](N) = \int_0^1 x^{N-1} f(x) dx$$

où  $N$  est un entier naturel supérieur ou égale à 1.

L'expression ci-haut permet de démontrer facilement les propriétés suivantes:

$$M[\lambda_1 f + \lambda_2 g](N) = \lambda_1 M[f] + \lambda_2 M[g] \text{ (linéarité) ,}$$

$$M[f(ax)](N) = a^{-N} M[f(x)](N) ,$$

$$M[f(x^b)](N) = \frac{1}{b} M[f(x)]\left(\frac{N}{b}\right) ,$$

$$M[x^a f](N) = -N M[f](N) .$$

Tout comme ses homologues de Fourier ou de Laplace, la transformation de Mellin transforme une convolution en simple produit:

$$M[f * g](N) = M[f](N) \cdot M[g](N) .$$

La transformée inverse s'obtient par intégration dans le plan complexe ( $N$  est complexe):

$$f(x) = M^{-1}[F] = \frac{1}{2\pi i} \int_C x^{-N} F(N) dN .$$

Le contour  $C$  est un contour quelconque renfermant la partie gauche du plan complexe (excluant ainsi tout point singulier) et couvrant l'intervalle  $]-i\infty, i\infty[$  [2]

## 3 Travail sur Mathematica

Etant donné que Pegasus, que nous utiliserons, travaille en espace de Mellin et que celles-ci sont souvent ardues à calculer, il est nécessaire d'automatiser le calcul des transformées de Mellin des fonctions qui nous seront utiles dans Pegasus.

Pour ce travail nous avons utilisé Mathematica et écrit un package permettant de calculer des transformées de Mellin d'expressions assez complexes analytiquement.

Nous avons entré le jeu de 77 règles du papier [6] ainsi que les règles algébriques énoncées ci-haut.

### Entrée des règles

Voici un exemple de règle sous Mathematica :

```
f(x_,y_NumberQ) := x^y
```

x représente une expression quelconque, y toute variable ayant la forme d'un réel. Le := est employé pour signifier l'équivalence.

Enfin il est important de noter que x, y n'ont aucun caractère nominatif.

Ainsi si mathematica rencontre l'expression f[z, 2.89], il la remplacera par  $z^{2.89}$ .

A titre d'exemple, la règle A2 du papier [6] a été écrite ainsi:

```
Mf[x_~k_/;NumberQ[k] && k>0, x_][N_] := 1/(N+k)
```

et parmi les règles algébriques package:

```
Mf[f_+g_, x_][N_] := Mf[f, x][N] + Mf[g, x][N].
```

Etant donné que Mathematica emploie la première règle qu'il reconnaît comme similaire à l'expression entrée, il est important de placer les règles algébriques à la fin de package ce que nous n'avons pas fait au début: notre package était alors incapable d'appliquer les règles de calculs.

### Définition des fonctions

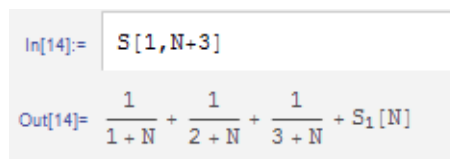
Dès que l'on rentre des règles de transformées plus compliquées, quelques fonctions apparaissent systématiquement et nous avons dû les définir au début du package. Les fonction harmoniques, qui s'écrivent:

$$S_{k_1, \dots, k_m} = \sum_{n_1=1}^N \frac{\text{signe}(k_1)^{n_1}}{n_1^{|k_1|}} \sum_{n_2=1}^{n_1} \frac{\text{signe}(k_2)^{n_2}}{n_2^{|k_2|}} \dots \sum_{n_m=1}^{n_{m-1}} \frac{\text{signe}(k_m)^{n_m}}{n_m^{|k_m|}},$$

ont été dans un premier temps définies de manière symbolique (retranscription des indices). Nous avons cependant par la suite, pour la simplification des résultats jugé utile de rajouté certaines règles élémentaires facilement démontrables. Par exemple:

$$S_1(N+a) = S_1(N) + \sum_{i=N+1}^{N+a} \frac{1}{i}, a \in \mathbb{N} > 0.$$

Ce qui donne:



The screenshot shows a Mathematica input and output. The input is `In[14]:= S[1, N+3]`. The output is `Out[14]= 1/(1+N) + 1/(2+N) + 1/(3+N) + S1[N]`.

Nous avons aussi dû définir quelques mots-clé comme Dirac (le DiracDelta de Mathematica empêchant la reconnaissance d'une règle), Pl pour  $f_+$  afin de pouvoir écrire certaines règles.

### Test du package

Afin de diminuer sensiblement le risque d'erreurs, nous avons développé chacun notre propre package puis effectué la différence des expressions retournées pour chacune des règles. Cette démarche nous a permis de mettre en évidence très rapidement les erreurs que nous avons commises.

Au terme de cette phase de test, nos packages corrigés en conséquence sont en parfait accord.

Actuellement, nos packages sont capables de manipuler des expressions relativement complexes, comme le montre Benjamin dans son rapport.

## 4 Travail sur Pegasus [9]

PEGASUS est un programme codé en FORTRAN77 utilisé pour le calcul numérique des équations d'évolutions DGLAP.

Ses développeurs ont fait le choix de les résoudre dans l'espace de Mellin: celles-ci, qui sont en fait des convolutions dans l'espace des  $x$ , deviennent de simples produits dans l'espace de Mellin ce qui rend les calculs beaucoup plus rapides.

L'inconvénient inhérent à cette démarche est qu'il n'est pas possible de revenir analytiquement dans l'espace de  $x$ , PEGASUS procède à une intégration numérique.

### Fonctions d'entrée

Sous Pegasus, les PDFs sont approchées par la forme suivante:

$$x f_i(x, \mu_0) = n_i p_{i,1} x^{p_{i,2}} (1 - x)^{p_{i,3}} (1 + p_{i,5} x^{p_{i,4}} + p_{i,6} x).$$

Une PDF n'étant alors caractérisée que par la donnée de 7 coefficient ( $n_i, \dots, p_{i,6}$ ). Cette forme n'étant qu'un polynôme de  $x$ , sa transformée est donc très facile à calculer analytiquement, d'où son intérêt pour Pegasus.

### But poursuivi

Le but poursuivi dans cette phase du stage est de confronter et d'affiner une PDF approximée,  $f_i(x, \mu_0)$  comme ci-haut avec les données expérimentales de section efficaces  $\sigma(\mu_1), \sigma(\mu_2), \dots$ . On peut décomposer le problème en plusieurs étapes [8]:

**Etape1:** Passer en espace Mellin  $f_i(x, \mu_0, n_i, p_{i,1} \dots) \rightarrow f_i(N, \mu_0)$  puis résoudre les équations DGLAP pour les différentes échelles  $\mu_k$  ( $\rightarrow f_i(N, \mu_k)$ ).

Note: lors de ce passage,  $f_i$  n'est plus exprimée en fonction des  $p_i$  qui ont été remplacées par leurs valeurs numériques.

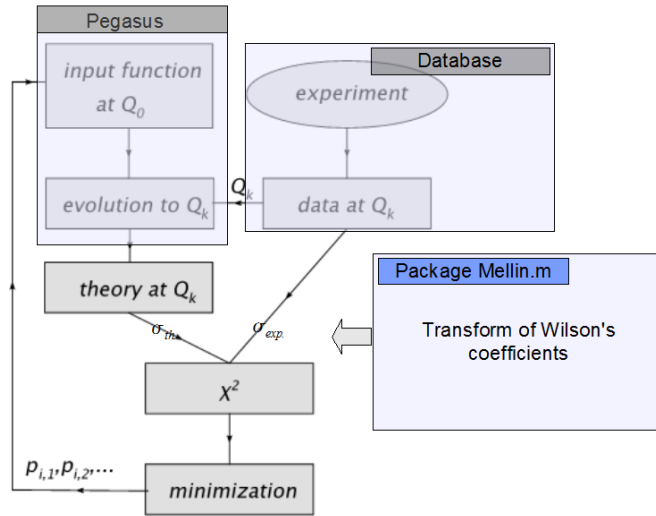
**Etape2:** Utiliser  $f_i(N, \mu_k)$  pour effectuer le calcul de la section efficace théorique en espace de Mellin. Notons que les termes NLO contiennent des coefficients de Wilson qu'il convient donc de connaître en espace  $N$ , c'est là que le package que nous avons écrit sous Mathematica prend tout son intérêt.

**Etape3:** Calculer l'écart quadratique  $\chi_i^2$  entre la section efficace théorique et expérimentale pour chaque échelle  $k$ .

**Etape4:** Modifier le jeu de paramètres afin de diminuer l'erreur totale  $\chi^2 = \sum_i \chi_i^2$

**Etape5:** Utiliser ces paramètres pour la PDF d'entrée  $f_i(x, \mu_0)$  et répéter le processus jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de diminuer l'erreur.

On peut résumer ces étapes par le graphe:



**Travail effectué**

Nous avons déjà, dans la partie précédente calculé les transformées des coefficients de Wilson. Il reste ensuite à développer un programme FORTRAN, utilisant Pegasus, qui les implémente et les utilise afin de calculer des sections efficaces.

Cela n’a pas pu se faire au moment de la rédaction de ce rapport, mais il est prévu de commencer avant la fin du stage.

En revanche, j’ai essayé de gérer l’export de données sous Mathematica afin d’automatiser le tracé des PDFs, en modifiant le code lh01tab.f.

J’ai d’abord associé chaque variable à un tableau ensuite passé en paramètre d’une fonction exportant sous le format mathematica, puis essayé de créer une structure "VARIABLE" qui garde en mémoire toutes ses valeurs précédentes, afin d’obtenir un code plus pratique.

Malheureusement, pour le moment, ce dernier point n’a pas pu être mené à bien, notre compilateur fortran ne gérant pas les structures.

## 5 Conclusion

Le but poursuivi durant ce stage n’est pas anodin: les PDFs étant des objets extrêmement compliqués, les approches théoriques ne permettent pas encore leur détermination (bien que la QCD sur réseau soit prometteuse).

La prise en compte de certaines contraintes physiques permet d’obtenir pour un hadron un jeu de PDFs possibles que l’on confronte ensuite avec les données expérimentales.

La démarche exposée dans la partie 5, permet non seulement de tester des PDFs mais aussi de les affiner tout en bénéficiant de la rapidité des calculs en espace Mellin.

Nous n’avons cependant pas eu le temps de nous y atteler. Nous nous sommes cependant donnés les outils nécessaires à sa poursuite et nous avons une idée précise des démarches à suivre (décrites dans la partie 5). Bien sûr, il nous faudra avant nous familiariser davantage avec Pegasus avant de pouvoir l’utiliser à bien dans le cadre de l’algorithme décrit ci-haut.

Pour ce qui est de mon expérience personnelle, j’avoue n’avoir jamais été aussi désemparé qu’au début de ce stage.

N’ayant jamais suivi de cours de physique des particules, de théorie des groupes, très peu à l’aise avec le calcul tensoriel et ayant un assez bas niveau en anglais, les concepts nécessaires à la réussite de ce stage

m'ont demandé un gros travail de recherche (notamment dans le livre Quarks & Leptons) afin de me familiariser un peu avec le cadre physique et les outils mathématiques.

Ce stage aura aussi été pour moi l'occasion de découvrir, avec intérêt, la puissance de Mathematica et de m'initier à Fortran (langage que j'ai moyennement apprécié).

Finalement, je pense avoir acquis une compréhension globale du sujet, bien que naturellement très partielle sur de nombreux points et j'en suis agréablement surpris.

## References

- [1] "Quarks & Leptons - An Introductory Course in Modern Particle Physics" (Francis Halzen et Alan D. Martin)
- [2] "Mathematics methods of physics" (Courant, Hilbert)
- [3] "Handbook of perturbative QCD" (CTEQ Collaboration)
- [4] Stage de M1 de Florian Linder : <http://lpsc.in2p3.fr/schien/Rapports/linder.pdf>
- [5] D. de Florian, M. Stratmann, W. Vogelsang, arXiv:9711387 (hep-ph)
- [6] J.Blümlein, S. Kurth, Phys. Rev. D, volume 60,014018
- [7] S. Albino, arXiv:0902.2148 (hep-ph)
- [8] D. de Florian, R. Sassot, M. Stratmann, W. Vogelsang, arXiv:0904.3821 (hep-ph)
- [9] A. Vogt arXiv:0408244 (hep-ph)
- [10] <http://www-subatech.in2p3.fr/photons/subatech/physics/collisionneurs/node54.html>  
[/FunctionApproximations/tutorial/FunctionApproximations.html](#)