Université Joseph Fourier Grenoble-I 08 janvier 2010, durée 1h30
UE PHY113a
Feuille manuscrite recto verso et calculatrice autorisés

PROBLEME DE RADIOACTIVITE

Le problème comporte trois parties qui peuvent être traitées de façon indépendante.

Cette copie sera agrafée à la feuille d'examen. Si les cadres ne sont pas assez grands, vous pourrez compléter votre réponse sur la feuille d'examen.

Données:

- Période de l'uranium 238: $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ ans
- Période de l'uranium 235: $T_{1/2} = 0,7 \cdot 10^9$ ans
- Période du thorium: $T_{1/2} = 24,1$ jours
- 1 u.m.a $= 1,66056 \cdot 10^{-27}$ kg $= 931,5$ MeV$/c^2$
- Nombre d'Avogadro: $N_{\mathrm{AV}} = 6,022 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}

Partie I : 13 pts
Partie II : 5 pts
Partie III : 12 pts

Note : Nombre de points $\times \frac{2}{3}$

Première partie: la chaîne de désintégration de l'uranium 238

L'uranium 238 est à la tête d'une chaîne de désintégration qui aboutit au plomb 206 qui est stable:

$$^{238}_{92}U \xrightarrow{\alpha} Th \xrightarrow{\beta^-} Pa \longrightarrow \ldots \longrightarrow {}^{206}_{82}Pb \qquad (1)$$

1) L'uranium 238 se désintègre en thorium par désintégration α. Écrire la réaction de désintégration. On indiquera le numéro atomique (Z) ainsi que le nombre total de protons et de neutrons ($A = Z + N$) du thorium.

$^{238}_{92}U \longrightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}\alpha$ 1 pt

$\left.\begin{array}{l} A = 234 \\ Z = 90 \end{array}\right\}$ pas nécessaire si indiqué dans la réaction

2) Le thorium est aussi instable et se transforme en protactinium (Pa) par désintégration β^-. Écrire la réaction de désintégration. On indiquera le numéro atomique (Z) ainsi que le nombre total de protons et de neutrons ($A = Z + N$) du protactinium.

$^{234}_{90}Th \longrightarrow {}^{234}_{91}Pa + e^- + \bar{\nu}_e$ 1 pt

$\left.\begin{array}{l} A = 234 \\ Z = 91 \end{array}\right\}$ voir 1.)

3) Sachant qu'il y a seulement des désintégrations α et β^- (et γ) dans la chaîne de désintégration de l'uranium 238 [voir équation (1)], quel est le nombre (n_α) de désintégrations α nécessaires pour arriver au plomb 206? Quel est le nombre (n_β) de désintégrations β^-? Cette question est indépendante du reste du problème.

n_α : $n_\alpha \cdot 4 = 238 - 206 \Rightarrow n_\alpha = 8$ 1 pt

n_β : $92 - \underset{\underset{8}{\parallel}}{n_\alpha} \cdot 2 + n_\beta \cdot 1 = 82 \Rightarrow n_\beta = 6$ 1 pt

4) Donner l'expression de la variation du nombre de noyaux de l'uranium 238, dN_1, pendant un temps infinitésimal dt (en fonction de N_1 et la constante de désintégration λ_1).

$dN_1 = -\lambda_1 N_1 \, dt$ 1 pt

5) Donner l'expression de l'évolution du nombre de noyaux de l'uranium 238 en fonction du temps ($N_1(t)$). On suppose qu'à $t = 0$, il y a N_{10} noyaux d'uranium. Quel est le lien entre la periode $T_{1/2}$ et la constante radioactive λ_1?

$N_1(t) = N_{10} \, e^{-\lambda_1 t}$ 1 pt

$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_1}$ 1 pt

6) Donner l'expression de la variation du nombre de noyaux du thorium, dN_2, pendant un temps infinitésimal dt (en fonction de N_1, N_2 et les constantes de désintégration λ_1, λ_2).

$dN_2 = \lambda_1 N_1 \, dt - \lambda_2 N_2 \, dt$ 1 pt

7) Trouver le nombre N_2 du thorium à l'équilibre (c.a.d. lorsque sa population ne change plus) en fonction de N_1, λ_1 et λ_2. Donner une valeur numérique pour le rapport N_2/N_1.

"Équilibre" : $dN_2 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1$ 1 pt

$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{T_{1/2}(Th)}{T_{1/2}(^{238}U)} = \frac{24{,}1 \text{ jours}}{4{,}5 \cdot 10^9 \text{ ans}} = \frac{24{,}1}{4{,}5 \cdot 10^9 \cdot 365} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{-11}$ 1 pt

8) Les abondances naturelles des isotopes de l'uranium sont de 99,28% de ${}^{238}_{92}U$ ($T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ ans) et de 0,72% de ${}^{235}_{92}U$ ($T_{1/2} = 0,7 \cdot 10^9$ ans). L'uranium 235 se trouve à l'origine d'une autre chaîne de désintégration tel que son évolution temporelle est similaire à ce qu'on a trouvé en question 5. On fait l'hypothèse que lors de la production de l'uranium (dans une supernovae donnant naissance à notre système solaire peu après) les abondances des deux isotopes étaient égales: $N_{0,238} = N_{0,235} = N_0$.

a) Écrire, au temps t_s d'aujourd'hui, le nombre de noyaux d'uranium 238, $N_{238}(t_S)$, et d'uranium 235, $N_{235}(t_S)$, en fonction de N_0 et des constantes de désintégration λ_{238} et λ_{235}.
b) Estimer l'âge t_S de notre système solaire (en ans).

a)

$$\left.\begin{aligned} N_{238}(t_s) &= N_0 \, e^{-\lambda_{238} t_s} \\ N_{235}(t_s) &= N_0 \, e^{-\lambda_{235} t_s} \end{aligned}\right\} \quad 1 \text{ pt}$$

b)

$$\frac{N_{238}(t_s)}{N_{235}(t_s)} = \frac{99,28\,\%}{0,72\,\%} \simeq \frac{e^{-\lambda_{238} t_s}}{e^{-\lambda_{235} t_s}} \quad * \qquad 1 \text{ pt}$$

$$\ln\left(\frac{N_{238}(t_s)}{N_{235}(t_s)}\right) = \ln\left(\frac{99,28}{0,72}\right) = (-\lambda_{238} + \lambda_{235})\, t_s$$

$$\lambda_{235} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}({}^{235}U)} = \frac{\ln 2}{0,7 \cdot 10^9 \text{ ans}} = 0,99 \cdot \frac{10^{-9}}{\text{ans}}$$

$$\Rightarrow t_s = \frac{4,926}{0,836} \cdot 10^9 \text{ ans}$$

$$\lambda_{238} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}({}^{238}U)} = \frac{\ln 2}{4,5 \cdot 10^9 \text{ ans}} = 0,154 \cdot \frac{10^{-9}}{\text{ans}}$$

$$\simeq 5,9 \cdot 10^9 \text{ ans}$$

1 pt

Deuxième partie: l'activité de radium 226

Le radium 226 ($T_{1/2} \simeq 1600$ ans) est aussi membre de la chaîne de désintégration de l'uranium 238. On suppose que l'on a un échantillon d'une masse de 1g.

9) Calculer le nombre de noyaux dans cet échantillon.

$$m_{noyau} \simeq A \text{ u.m.a} = 226 \text{ u.m.a} = 226 \cdot 1{,}66056 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$$

$$N \cdot m_{noyau} = 1g \Rightarrow N = \frac{1g}{226 \cdot 1{,}66056 \cdot g} 10^{24} = 2{,}665 \cdot 10^{21}$$

1 pt

10) Quel est l'unité S.I. de l'activité?

1 Bq

1 pt

11) Determiner l'activité de notre échantillon de 1g de radium 226 en Curie (Ci). (Rappel: 1 Ci $= 3,7 \cdot 10^{10}$ S.I.)

$$a = \lambda \cdot N \quad , \quad \lambda = \frac{\ln 2}{1600 \text{ ans}} \simeq \frac{\ln 2}{1600 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \frac{1}{s} = 1{,}374 \cdot 10^{-11} \frac{1}{s}$$

$$N = 2{,}665 \cdot 10^{21} \quad (\text{voir } 9.))$$

$$\Rightarrow a = 3{,}66 \cdot 10^{10} \text{ Bq} \simeq 0{,}99 \text{ Ci}$$

1 pt

[1 pt aussi pour la reponse : $a = 1$ Ci par définition sans calculer]

12) Montrer que la variation temporelle de la masse de radium peut être écrite dans la forme

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} .$$

$$m(t) = m_0 \; e^{-\lambda t} = m_0 \; e^{-\ln(2) \times \frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$= m_0 \; e^{+\ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{t}{T_{1/2}}}$$

$$= m_0 \; e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}}$$

$$= m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

1 pt

13) Quelle sera la masse de notre échantillon après $t = 3200$ ans?

$t = 2\,T_{1/2} \implies m(t) = \frac{1}{4}\, m_0 = \frac{1}{4}\, g$ 1 pt

Troisième partie: atténuation des photons par la matière

Pour étudier la loi d'absorption d'un faisceau de photons par du laiton un étudiant étudie le taux de comptage de photons N avec un compteur Geiger-Müller en fonction de l'épaisseur x d'un écran de laiton interposé entre la source et le compteur. Pour réduire l'incertitude il choisit un temps $\Delta t = 2$ minutes pour mesurer le nombre de coups. Le bruit de fond (Bf) pendant Δt est de 40 ± 8 coups. [Pour améliorer la précision l'étudiant avait mesuré un bruit de fond de 100 coups pendant 5 minutes.]

Les mesures sont relevées dans le tableau suivant:

x [mm]	N [coups/2 min.]	$\bar{N} = N - Bf$	$\Delta\bar{N}$ [coups/2 min.]
3	1652	1612	89
9	1276	1236	79
18	837	797	66
30	480	440	52

(voir question 16b))

Théoriquement, le nombre de photons après avoir traverseé une matière d'épaisseur x est

$$N(x) = N_0 \, e^{-\mu x} \,, \tag{2}$$

où μ est le coefficient d'atténuation linéïque et N_0 est le nombre initial de photons.

14) Donner la définition de la longueur de demi-atténuation $x_{1/2}$. Montrer que l'on a $x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$.

$N(x_{1/2}) = \frac{1}{2} N_0$ (ou $N(x + x_{1/2}) = \frac{1}{2} N(x)$) 1 pt

$N(x_{1/2}) = N_0 \, e^{-\mu x_{1/2}} = \frac{1}{2} N_0$

$\Rightarrow \ln 2 = \mu \cdot x_{1/2} \Rightarrow x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$ 1 pt

15) Comment doit-on choisir l'incertitude ΔN en fonction de l'écart type σ pour que l'intervalle $N \pm \Delta N$ contienne 95,4% des mesures? Donner l'expression pour ΔN à 95,4% de degré de confiance dans le cas de désintégrations radioactives et où on ne dispose que d'une seule mesure.

$\Delta N = 2\sigma$ 1 pt

$\sigma \simeq \sqrt{N} \Rightarrow \Delta N = 2\sqrt{N}$ 1 pt

16) Donner l'expression de l'incertitude $\Delta\bar{N}$ pour $\bar{N} = N - Bf$ en termes des incertitudes ΔN et $\Delta Bf = 8$ coups. Compléter le tableau (colonne 4).

$$\Delta\bar{N} = \Delta N + \Delta Bf$$
$$= 2\sqrt{N} + 8$$

1 pt

Pour le tableau: 1pt

17) Représenter les points $(x, \bar{N}(x))$ du tableau sur un papier millimétré semi-logarithmique. Graduer et étiqueter les axes. Représenter les incertitudes $\Delta\bar{N}$.

Axes : 1 pt
Points : 1 pt
Incertitudes: 1 pt

18) Comment peut-on determiner le coefficient μ? Donner les valeurs des coefficients μ_{min} et μ_{max}. En déduire la valeur moyenne de μ et son incertitude $\Delta\mu$.

$$\bar{N}(x_2) = \bar{N}(x_1)\, e^{-\mu(x_2 - x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad \ln \bar{N}(x_2) = \ln \bar{N}(x_1) - \mu(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad \mu = -\frac{\ln \bar{N}(x_2) - \ln \bar{N}(x_1)}{x_2 - x_1}$$

1 pt

$$\mu_{min} = -\frac{\ln(490) - \ln(1550)}{30 - 3}\ mm^{-1} \simeq 0{,}043\ \frac{1}{mm} = 0{,}43\ \frac{1}{cm}$$

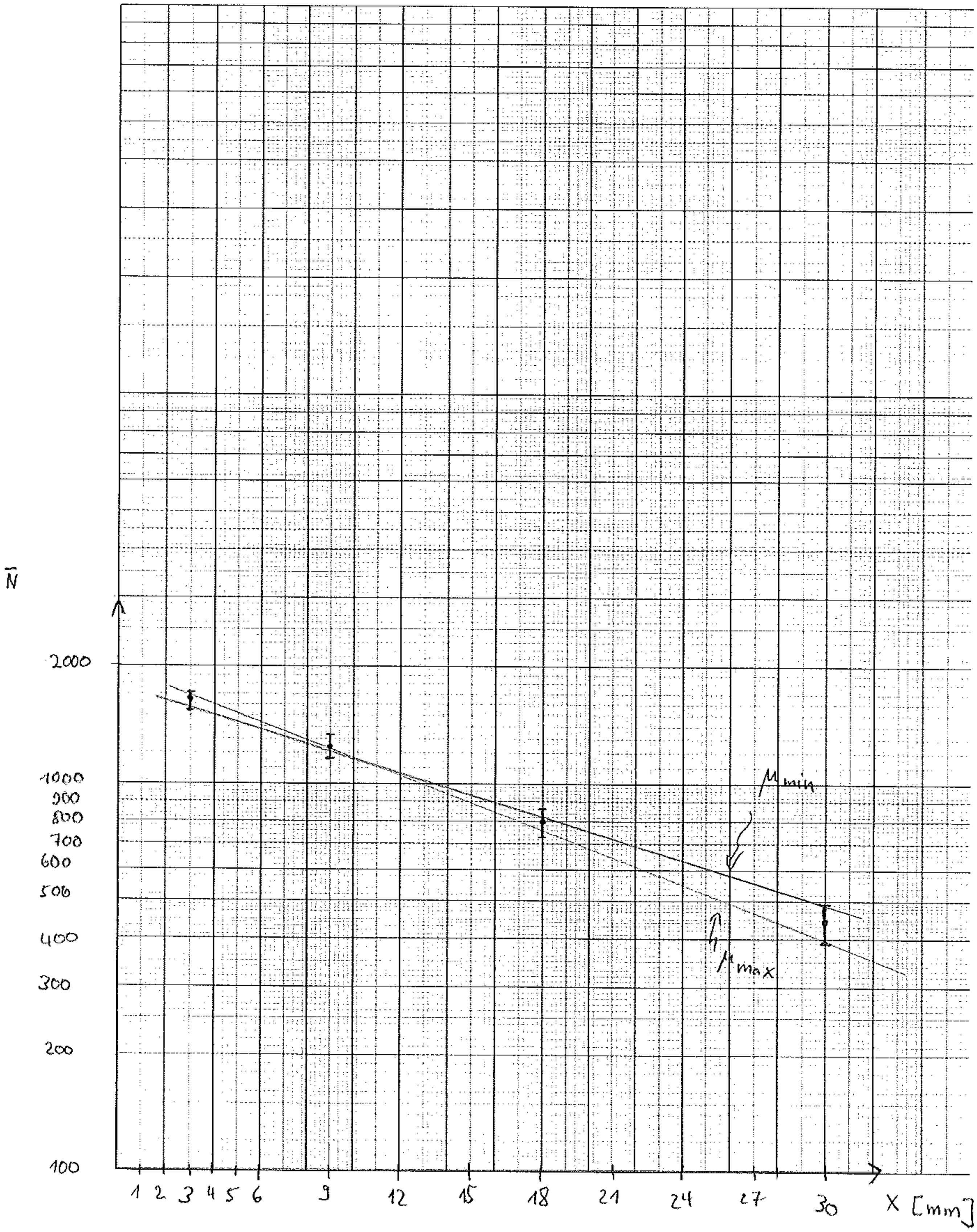
$$\mu_{max} = -\frac{\ln(400) - \ln(1700)}{30 - 3}\ mm^{-1} \simeq 0{,}053\ \frac{1}{mm} = 0{,}53\ \frac{1}{cm}$$

1 pt

$$\mu = \frac{\mu_{max} + \mu_{min}}{2} = 0{,}48\ \frac{1}{cm}, \quad \Delta\mu = \frac{\mu_{max} - \mu_{min}}{2} = 0{,}05\ \frac{1}{cm}$$

$$\mu = (0{,}48 \pm 0{,}05)\ \frac{1}{cm}$$

1 pt



N̄
2000
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
1 2 3 4 5 6 9 12 15 18 21 24 27 30
X [mm]
μmin
μmax