UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
L2 - **PHY242** - Mars 2014
Durée : 1 heure
Documents interdits et calculatrice autorisée

Physique Nucléaire

Les données numériques sont indiquées à la fin du problème.
Le sujet comporte un formulaire en dernière page.

Radioactivité artificielle : Production du $^{30}_{15}\mathrm{P}$

En 1934, Irène Curie et Frédéric Joliot réalisèrent la première réaction nucléaire permettant de produire un noyau radioactif (le $^{30}_{15}\mathrm{P}$). Ils utilisèrent des noyaux d'hélium comme projectiles envoyés sur une cible d'aluminium. La réaction est la suivante :

$$\begin{array}{ccc} ^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} & \longrightarrow & ^{30}_{15}\mathrm{P} + \mathbf{X} \\ (1) + (2) & \longrightarrow & (3) + (4) \end{array} \quad (1)$$

Le noyau de phosphore créé est instable et se désintègre selon :

$$^{30}_{15}\mathrm{P} \longrightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{Si} + e^{+} + \nu \quad (2)$$

Dans la suite on notera avec un indice 1 les quantités relatives au noyau $^{4}_{2}\mathrm{He}$ (2 pour l'$^{27}_{13}\mathrm{Al}$, ...) comme indiqué dans l'équation (1). Les masses atomiques et les périodes sont indiquées dans le tableau 1.

1) Étude de la réaction nucléaire de production

a) Identifier la particule notée **X** dans la réaction (1). On précisera les lois de conservation utilisées.
b) Quelle interaction fondamentale est à l'oeuvre lors de cette réaction nucléaire ?
c) Calculer le bilan d'énergie de masse (Q_1 en MeV) de la réaction de production (1) et commenter le signe de Q_1.
d) Calculer la barrière coulombienne pour cette réaction nucléaire.
e) Quelle énergie cinétique minimale faut-il donner à l'α pour effectivement créer le $^{30}_{15}\mathrm{P}$?

2) Étude de la désintégration β^+

a) Calculer le bilan d'énergie de masse (Q_2 en MeV) de la désintégration β^+ (2).
b) Le $^{30}_{14}\mathrm{Si}$ possède un état excité dont l'énergie d'excitation est 3,5 MeV. Est-il possible de le produire lors de cette désintégration ?
c) Tracer qualitativement l'allure de la distribution en énergie cinétique des positons (e^+).

3) L'expérience des Joliot-Curie

Irène et Frédéric ont utilisé comme cible un petit cylindre d'aluminium (pur en $^{27}_{13}\mathrm{Al}$) de rayon $\mathrm{R} = 1$ cm et de longueur $\mathrm{L} = 20\ \mu\mathrm{m}$. On donne $\rho(\mathrm{Al}) = 2,7\ \mathrm{gcm}^{-3}$.
Calculer le nombre de noyaux de $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ dans la cible (noté N_2).
On admettra dans toute la suite que ce nombre N_2 peut être considéré comme **constant**.

4) Nombre de noyaux de $^{30}\mathrm{P}$, φ constant

On cherche maintenant à calculer l'évolution du nombre de noyaux de $^{30}\mathrm{P}$, noté $\mathrm{N_3(t)}$. On donne la densité de flux de particules incidentes (He) $\varphi = 3 \times 10^7\ \mathrm{cm^{-2}s^{-1}}$ et la section efficace de la réaction (1) à l'énergie considérée $\sigma = 1\ \mathrm{barn}$. On considère pour l'instant que la densité de flux φ est une constante.

a) Donner la variation infinitésimale du nombre de noyaux de $^{30}\mathrm{P}$ ($\mathrm{dN_3}$) pendant un intervalle de temps dt, en fonction de $\lambda_3 = \ln 2/\mathrm{T_3}$ et σ.

b) Résoudre cette équation différentielle et trouver l'expression littérale $\mathrm{N_3(t)}$. En déduire l'activité $\mathrm{a_3(t)}$. On rappelle que $\mathrm{N_3(t=0)=0}$.

c) Montrer que si l'on attend suffisamment longtemps, l'activité peut être considérée comme constante. Calculer la valeur numérique de cette activité (notée $\mathrm{a_3^{sat}}$).

5) Nombre de noyaux de $^{30}\mathrm{P}$, φ non-constant

Supposons qu'Irène Curie ait utilisé le $^{220}_{88}\mathrm{Ra}$ comme source d'α. Il s'agit d'un noyau instable dont la période est $\mathrm{T_0} = 18\ \mathrm{ms}$. Le flux d'$\alpha$ n'est plus constant. Il varie comme :

$$\varphi(\mathrm{t}) = \varphi_0 \mathrm{e}^{-\lambda_0 \mathrm{t}}$$

où $\varphi_0 = 3 \times 10^7\ \mathrm{cm^{-2}s^{-1}}$ et $\lambda_0 = \ln(2)/\mathrm{T_0}$ est la constante radioactive du $^{220}_{88}\mathrm{Ra}$.

a) Réécrire l'équation différentielle régissant l'évolution de $\mathrm{N_3(t)}$.

b) Résoudre cette équation différentielle et trouver l'expression littérale $\mathrm{N_3(t)}$. En déduire l'activité $\mathrm{a_3(t)}$. On rappelle que $\mathrm{N_3(t=0)=0}$.

c) En remarquant que $\mathrm{T_3} \gg \mathrm{T_0}$, donner une expression approchée de $\mathrm{a_3(t)}$ et en déduire la valeur de l'activité $\mathrm{a_3^{\infty}}$ au bout d'un temps suffisamment long.

d) Pensez-vous que Irène Curie a utilisé une source de $^{220}_{88}\mathrm{Ra}$? Justifier.

---

1) Données numériques usuelles :

Masse du proton : $\mathrm{m_p = 1,0072765\ uma}$
Masse du neutron : $\mathrm{m_n = 1,0086649\ uma}$
Masse de l'électron : $\mathrm{m_e = 0,000548\ uma}$
$1\ \mathrm{uma} \times \mathrm{c}^2 = 931,5\ \mathrm{MeV}, \mathrm{N_A} = 6,022 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
$\hbar\mathrm{c} = 197,3\ \mathrm{MeV.fm}, \alpha = \mathrm{e}^2/(4\pi\epsilon_0\hbar\mathrm{c}) = 1/137, 1\ \mathrm{barn} = 10^{-28}\ \mathrm{m}^2$.

2) Données numériques du problème :

	$^{2}_{1}\mathrm{H}$	$^{4}_{2}\mathrm{He}$	$^{30}_{15}\mathrm{P}$	$^{30}_{14}\mathrm{Si}$	$^{27}_{13}\mathrm{Al}$	$^{220}_{88}\mathrm{Ra}$
M (uma)	$2,0141018$	$4,0026032$	$29,9783138$	$29,9737702$	$26,9815384$	$220,0110147$
T (s)	stable	stable	150	stable	stable	18×10^{-3}

Table 1: *Masses atomiques en uma*

Formulaire

- Masse atomique

$$\mathrm{M}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) = \mathrm{m}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}) + \mathrm{Z}\mathrm{m}_{\mathrm{e}}$$

où $\mathrm{M}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})$ est la masse d'un atome et $\mathrm{m}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})$ la masse du noyau correspondant.

- Bilan d'énergie de masse (Q) :

$$\mathrm{Q} = \left[\sum_{\mathrm{i}} \mathrm{m}_{\mathrm{i}} - \sum_{\mathrm{f}} \mathrm{m}_{\mathrm{f}}\right] \times \mathrm{c}^2 \tag{3}$$

où $\sum_i \mathrm{m}_i$ est la somme des masses des noyaux dans l'état initial ($\sum_f \mathrm{m}_f$ dans l'état final).

- Energie de liaison nucléaire :

$$\mathrm{B}\big({}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}_{\mathrm{N}}\big) = \mathrm{Z}\mathrm{m}_{\mathrm{p}}\mathrm{c}^2 + \mathrm{N}\mathrm{m}_{\mathrm{n}}\mathrm{c}^2 - \mathrm{m}\big({}^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Z}}\mathrm{X}_{\mathrm{N}}\big)\mathrm{c}^2 \tag{4}$$

- Rayon du noyau :

$$\mathrm{R}({}^{\mathrm{A}}\mathrm{X}) = \mathrm{R}_0\mathrm{A}^{1/3}, \text{ avec } \mathrm{R}_0 = 1,2\ \mathrm{fm} \tag{5}$$

- Masse de l'état excité ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{\star}$:

$$\mathrm{m}({}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{\star})\mathrm{c}^2 = \mathrm{m}({}^{A}_{Z}\mathrm{X})\mathrm{c}^2 + \mathrm{E}^{\star} \tag{6}$$

- Énergie seuil pour une réaction nucléaire $(1) + (2) \longrightarrow (3) + (4)$:

$$\mathrm{T}_1^{\mathrm{seuil}} = \frac{-\mathrm{Q}(\mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_4)}{\mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_4 - \mathrm{m}_1} \tag{7}$$

- Barrière coulombienne :

$$\mathrm{B}_{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2}{4\pi\epsilon_0(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)} \tag{8}$$

- Franchissement de la barrière coulombienne

$$\mathrm{T}_1 > \frac{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2}{\mathrm{m}_2} \times \mathrm{B}_{\mathrm{c}} \tag{9}$$

avec $\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2$ les masses du projectile et de la cible respectivement.

- Nombre d'interactions pas seconde lors d'une réaction nucléaire:

$$\mathrm{N}_{\mathrm{int}} = \sigma \times \mathrm{N}_{\mathrm{cible}} \times \varphi \tag{10}$$

où $\mathrm{N}_{\mathrm{cible}}$ est le nombre de noyaux dans la cible et φ est la densité de flux (nombre de particules incidentes par unité de surface et par unité de temps).

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
L2 - **PHY242** - Mars 2014
Durée : 1 heure
Documents interdits et calculatrice autorisée

Correction

Physique Nucléaire

Les données numériques sont indiquées à la fin du problème

1) Étude de la réaction nucléaire de production

a) On utilise la conservation du nombre de nucléons total ainsi que celle de la charge électrique. Il s'agit d'un nucléon de charge nulle : un neutron.
b) Il s'agit de l'interaction forte car le nombre de protons et de neutrons se conservent. L'absence de neutrino est également une indication.
c)

$$\mathrm{Q_1} = \big(\mathrm{m(He)} + \mathrm{m(Al)} - \mathrm{m(P)} - \mathrm{m_n}\big) \times \mathrm{c}^2 = \big(\mathrm{M(He)} + \mathrm{M(Al)} - \mathrm{M(P)} - \mathrm{m_n}\big) \times \mathrm{c}^2 = -2,64\ \mathrm{MeV}$$

$\mathrm{Q_1}$ est négatif. La réaction est endoénergétique. Elle n'est possible que si l'énergie de l'helium est suffisante.
d)

$$\mathrm{B_c} = \alpha\hbar\mathrm{c} \times \frac{\mathrm{Z_1Z_2}}{1,2 \times (\mathrm{A_1^{1/3}} + \mathrm{A_2^{1/3}}}) = 6,8\ \mathrm{MeV}$$

NB : avec $R_0 = 1,25$ fm (valeur donnée en cours), on trouve 6,5 MeV.
e) Pour que la réaction nucléaire ait lieu, il faut que l'α ait une énergie cinétique dans le référentiel du laboratoire telle que :

$$\mathrm{T_1} > \frac{-\mathrm{Q}(\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4})}{\mathrm{m_3} + \mathrm{m_4} - \mathrm{m_1}}$$

Soit $\mathrm{T_1} > 3,03\ \mathrm{MeV}$.
Pour mettre les 2 noayux en contact, il faut franchir la barrière coulombienne, soit

$$\mathrm{T_1} > \frac{\mathrm{m_1} + \mathrm{m_2}}{\mathrm{m_2}} \times \mathrm{B_c} = 7,8\ \mathrm{MeV} \quad \text{pour franchir la barrière coulombienne}$$

Il faut donc au minimum $7,8$ MeV.
NB : avec $R_0 = 1,25$ fm (valeur donnée en cours), on trouve 7,5 MeV.

2) Étude de la désintégration β^+

a)

$$\mathrm{Q_2} = \big(\mathrm{M(P)} - \mathrm{M(Si)} - 2\mathrm{m_e}\big) \times \mathrm{c}^2 = 3,2\ \mathrm{MeV}$$

b) Non, car l'énergie libérée est insuffisante. On aurait une valeur de Q négative.
c) La figure 1 présente l'allure de la distribution de la distribution en énergie cinétique des positons (e^+). Il faut noter que la distribution est continue (car il s'agit d'une désintégration à 3 corps) et que le maximum est Q (en fait légèrement moins pour assurer la conservation de la quantité de mouvement).

3) L'expérience des Jolliot-Curie

$$\mathrm{N_2} = \mathrm{n} \times \mathrm{N_A} = \frac{\rho\mathrm{VN_A}}{\mathrm{M_{mol}}} = \frac{\rho\pi\mathrm{R^2LN_A}}{\mathrm{M_{mol}}} = 3,8 \times 10^{20} \text{ noyaux}$$

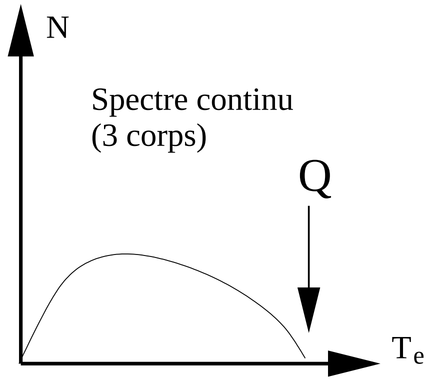

Figure 1: *Allure de la distribution de la distribution en énergie cinétique des positons (e^+).*

4) Nombre de noyaux de $^{30}\mathrm{P}$, φ constant

a)La variation du nombre de noyaux de $^{30}_{15}\mathrm{P}$ est donnée par

$$\mathrm{dN_3} = \sigma\varphi \mathrm{N_2 dt} - \lambda_3 \mathrm{N_3 dt}$$

On en déduit l'équation différentielle à résoudre :

$$\frac{\mathrm{dN_3}}{\mathrm{dt}} + \lambda_3 \mathrm{N_3} = \sigma\varphi \mathrm{N_2} \tag{11}$$

b) On résout (11), en notant que $\sigma\varphi \mathrm{N_2}$ est une constante. On trouve :

$$\mathrm{N_3(t)} = \frac{\sigma\varphi \mathrm{N_2}}{\lambda_3}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}})$$

Soit pour l'activité :

$$\mathrm{a_3(t)} = \lambda_3 \mathrm{N_3(t)} = \sigma\varphi \mathrm{N_2}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}})$$

c) Pour t grand, on a : $\mathrm{a_3(t)} = \mathrm{a_3^{sat}} = \sigma\varphi \mathrm{N_2} = 11340\ \mathrm{Bq}$.

5) Nombre de noyaux de $^{30}\mathrm{P}$, φ non-constant

a) Il s'agit de la même équation différentielle, sauf que φ est une fonction de t donnée dans lénoncé.

$$\frac{\mathrm{dN_3}}{\mathrm{dt}} + \lambda_3 \mathrm{N_3} = \sigma \mathrm{N_2} \varphi_0 \mathrm{e}^{-\lambda_0 \mathrm{t}} \tag{12}$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre avec second membre non-constant. La solution est : $\mathrm{N_3(t)} = \mathrm{A(t)} + \mathrm{B(t)}$, où $\mathrm{A(t)}$ est la solution générale de l'équation **sans** second membre et $\mathrm{B(t)}$ est une solution particulière de l'équation **avec** second membre.
On cherche d'abord la solution générale de l'équation **sans** second membre :

$$\mathrm{A(t)} = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}}$$

On utilise la *méthode de la variation de la constante*, en posant que la solution particulière de (12) est : $\mathrm{B(t)} = \mathrm{k(t)A(t)}$. On a donc la solution générale de (12) :

$$\mathrm{N_3(t)} = \mathrm{A(t)} + \mathrm{B(t)} = \mathrm{C}\Big(1 + \mathrm{k(t)}\Big)\mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}} = \mathrm{g(t)}\mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}}$$

Il reste donc à trouver $\mathrm{g(t)}$, sachant que $\mathrm{N_3(t)}$ est solution de (12).
On calcule :
$$\frac{\mathrm{dN_3}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}} \mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}} - \lambda_3 \mathrm{g(t)} \mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}}$$
On a donc :
$$\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{dt}} = \sigma \mathrm{N_2} \varphi_0 \mathrm{e}^{(\lambda_3 - \lambda_0)\mathrm{t}}$$
On intègre :
$$\mathrm{g(t)} = \frac{\sigma \mathrm{N_2} \varphi_0}{(\lambda_3 - \lambda_0)} \mathrm{e}^{(\lambda_3 - \lambda_0)\mathrm{t}} + \mathrm{K}$$
On en déduit la fonction $\mathrm{N_3(t)}$:
$$\mathrm{N_3(t)} = \frac{\sigma \mathrm{N_2} \varphi_0}{(\lambda_3 - \lambda_0)} \mathrm{e}^{-\lambda_0 \mathrm{t}} + \mathrm{K} \mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}}$$
À $t = 0$, on a $\mathrm{N_3(0)} = 0$, il vient donc : $\mathrm{K} = -\frac{\sigma \mathrm{N_2} \varphi_0}{(\lambda_3 - \lambda_0)}$.
On conclut :
$$\mathrm{N_3(t)} = \frac{\sigma \mathrm{N_2} \varphi_0}{(\lambda_3 - \lambda_0)} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_0 \mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}} \right)$$
L'activité est donnée par $\mathrm{a_3(t)} = \lambda_3 \mathrm{N_3(t)}$.

c) Comme $\lambda_0 \gg \lambda_3$, l'expression de l'activité se simplifie en
$$\mathrm{a_3(t)} = \lambda_3 \mathrm{N_3(t)} = \frac{\lambda_3 \sigma \mathrm{N_2} \varphi_0}{\lambda_0} \mathrm{e}^{-\lambda_3 \mathrm{t}}$$
Quand $\mathrm{t} \longrightarrow \infty$, on trouve : $\mathrm{a_3^{sat}} = 0$!!
d) Non. La période est beaucoup trop courte. Cela implique que le taux de production de $^{30}_{15}\mathrm{P}$ est très rapidement nul. Le noyau utilisé est plutôt un isotope du Radium à vie longue, par exemple $\mathrm{T(^{226}_{88}Ra) = 1600\ ans}$.