Chromodynamique quantique - TD4

Problème 1 : Moments

Calculez les moments de Mellin de toutes les fonctions de branchement (splitting functions) $P_{ij}(x)$ à l'ordre le plus bas :

$$\begin{aligned}
P_{qq}(x) &= \frac{4}{3}\left(\frac{1+x^2}{1-x}\right)_+ \\
P_{qg}(x) &= \frac{1}{2}\left[x^2+(1-x)^2\right] \\
P_{gq}(x) &= \frac{4}{3}\frac{1+(1-x)^2}{x} \\
P_{gg}(x) &= 6\left\{\left(\frac{1}{1-x}\right)_+ + \frac{1-x}{x} - 1 + x(1-x)\right\} + \frac{33-2n_f}{6}\delta(1-x)
\end{aligned}$$

Problème 2 : Inversion de Mellin

La transformée de Mellin d'une fonction $f(x)$ est définie par

$$F(N) = \int_0^1 dx\, x^{N-1} f(x)\,.$$

Montrez que cette transformation peut être invertie de la manière suivante (Inversion de Mellin)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+\infty} dN\, x^{-N} F(N)$$

où σ est à choisir tel que les parties réelles de toutes les singularities de $F(N)$ sont plus petites que σ. Montrez en plus que la transformée de Mellin d'une convolution de deux fonctions f, g

$$(f\otimes g)(x) = \int_x^1 \frac{dz}{z}\, f(z) g\left(\frac{x}{z}\right)$$

est le produit des transformées de ces fonctions :

$$\int_0^1 dx\, x^{N-1}(f\otimes g)(x) = F(N)G(N)\,.$$