

Examen d'Introduction à la Chromodynamique Quantique

Documents du cours autorisés

Exercice 1 : Calcul de $P_{qg}(x)$

Calculez la fonction de branchement $P_{qg}(x)$ en utilisant le processus $\gamma^*(q) + g(k) \rightarrow \bar{q}(p) + q(p')$.
On pose :

$$s = (q + k)^2, \quad t = (q - p)^2, \quad u = (q - p')^2.$$

- Donnez les diagrammes de Feynman associés à ce processus en indiquant les impulsions, couleurs et indices de Lorentz.
- Donnez les amplitudes de Feynman associées à chaque diagramme.
- Discutez le facteur de couleur qui intervient dans le carré de l'amplitude (après moyennage/somme sur les couleurs).
- Déterminez l'expression

$$\overline{|M_{fi}|^2}_{\epsilon_\mu \epsilon_\nu^* = -g_{\mu\nu}}.$$

en appliquant la symétrie de croisement au résultat connu pour le processus $\gamma^* + q \rightarrow g + q$ discuté en cours.

- Calculez la fonction de structure $F_2(x)/x$ dans l'approximation des logarithmes dominants (leading-log approximation) et déterminez ainsi la fonction de branchement $P_{qg}(x)$.

Exercice 2 : Asymptotic momentum fractions

Les fonctions de branchement ont une décomposition générale

$$P_{q_i q_j} = P_{\bar{q}_i \bar{q}_j} = \delta_{ij} P_{qq}^V + P_{qq}^S, \quad P_{q_i \bar{q}_j} = P_{\bar{q}_i q_j} = \delta_{ij} P_{q\bar{q}}^V + P_{q\bar{q}}^S.$$

Les équations d'évolution pour le singulet des quarks et le gluon dans l'espace de Mellin sont données par :

$$t \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Sigma(N, t) \\ G(N, t) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \begin{pmatrix} P_{qq}(N) & 2n_f P_{qg}(N) \\ P_{gq}(N) & P_{gg}(N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(N, t) \\ G(N, t) \end{pmatrix}$$

- Exprimez P_{qg} en termes de P_{qq}^V , $P_{q\bar{q}}^V$, P_{qq}^S and $P_{q\bar{q}}^S$.
- Montrez que les équations d'évolution à leading order et pour le moment $N = 2$ sont données par :

$$t \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Sigma(2, t) \\ G(2, t) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(t)}{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}C_F & \frac{1}{3}n_f \\ \frac{4}{3}C_F & -\frac{1}{3}n_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(2, t) \\ G(2, t) \end{pmatrix}$$

Tournez la page s.v.p.

- c) Déterminez les valeurs propres r_{\pm} et les vecteurs propres $O^{\pm}(2, t)$ de ce système. Quelle est l'interprétation de $O^+(2, t)$?
- d) Dans la limite asymptotique $t \rightarrow \infty$, discutez la solution pour $O^-(2, t)$ et le rapport $\frac{\Sigma(2, t)}{G(2, t)}$. Quelles fractions de l'impulsion du proton sont donc portées par les quarks et les gluons dans cette limite ?