ENS Lyon - Master de Sciences de la Matière, année M2 — 23 mars 2012, durée 3h

Examen de Introduction à la Chromodynamique Quantique
Documents du cours autorisés

Exercice 1 : Règles de somme

En diffusion profondément inélastique $e+p \to e+X$ (courant électromagnétique) et $\nu_\mu + p \to \mu^- + X$ (courant chargé) on trouve les expressions suivantes pour quelques fonctions de structure à leading order en termes de distributions de partons :

$$\begin{aligned} F_2^{ep} &= x\left[\frac{4}{9}(u+\bar{u}+c+\bar{c})+\frac{1}{9}(d+\bar{d}+s+\bar{s})\right] , \\ F_2^{\nu p} &= 2x\left[d+s+\bar{u}+\bar{c}\right] , \\ F_2^{\bar{\nu} p} &= 2x\left[u+c+\bar{d}+\bar{s}\right] , \\ F_3^{\nu p} &= 2\left[d+s-\bar{u}-\bar{c}\right] , \\ F_3^{\bar{\nu} p} &= 2\left[u+c-\bar{d}-\bar{s}\right] . \end{aligned}$$

Ici, $F_i = F_i(x,Q^2)$, $u = u(x,Q^2), d = d(x,Q^2)$ etc. et V_{CKM} diagonal.

a) Quel processus partoniques contribuent à la diffusion $\nu_\mu + p \to \mu^- + X$ et $\bar{\nu}_\mu + p \to \mu^+ + X$ à leading order ?

b) En utilisant la symétrie d'isospin donnez les expressions pour F_2^{en} et $F_2^{\nu n}$.

c) Vérifiez les règles de somme suivantes :

(i) $I_A = \int_0^1 dx\, \frac{F_2^{\nu n}-F_2^{\nu p}}{2x} = 1$ (Adler 1966)

(ii) $I_B = \int_0^1 dx\, \frac{F_2^{\bar{\nu} p}-F_2^{\nu p}}{2x} = 1$ (Bjorken 1967)

(iii) $I_{GLS} = \int_0^1 dx\, \left(F_3^{\nu p}+F_3^{\bar{\nu} p}\right) = 6$ (Gross–Llewellyn-Smith 1969)

(iv) $I_G = \int_0^1 dx\, \frac{F_2^{ep}-F_2^{en}}{x} = \frac{1}{3}$ si $\bar{u} = \bar{d}$ (Gottfried 1967)

d) Expérimentalement $I_G(Q^2 = 4\ GeV^2) = 0.235 \pm 0.026$ (cf. hep-ph/0311091). Conclusion ?

e) Évaluez $\frac{5}{18}F_2^{\nu N} - F_2^{eN}$ où $F_2^{lN} := (F_2^{lp}+F_2^{ln})/2$ $(l = \nu, e)$.

Exercice 2 : Spin des partons

Calculez les fonctions de structure $F_1^{ep}(x,Q^2)$ et $F_2^{ep}(x,Q^2)$ pour des partons sans masse et avec spin 0. La règle de Feynman pour le vertex photon(μ, $q = p'-p$)-scalaire(p,i)-scalaire(p',j) est donnée par :

$$-iee_q(p'+p)^\mu\delta_{ij}$$

où e_q est la charge fractionelle du parton scalaire.

Tournez la page s.v.p.

Le tenseur hadronique pour l'interaction électro-magnetique est donné par

$$W_{\mu\nu} = -g^{\perp}_{\mu\nu} F_1\left(x, Q^2\right) + p^{\perp}_{\mu} p^{\perp}_{\nu} \frac{1}{p \cdot q} F_2\left(x, Q^2\right)$$

avec

$$g^{\perp}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \qquad p^{\perp}_{\mu} = p_\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q_\mu .$$

Le tenseur partonique a une définition similaire avec $p \to \hat{p} = \xi p$.

a) Determinez les projecteurs sur F_1 et F_2.

b) Montrez que l'espace de phase pour le processus partonique $2 \to 1$ est donné par :

$$dPS = \frac{2\pi}{Q^2}\, x\, \delta(\xi - x)\,,$$

où x est la variable de Bjorken.

c) Calculez le tenseur partonique en utilisant la règle de Feynman en haut :

$$\hat{W}_{\mu\nu} = \frac{1}{e^2} \frac{1}{4\pi} \overline{M_\mu M^{\star}_\nu}\, dPS\,.$$

Présentez le résultat en fonction de ξ, p, q et des couplages.

d) Le lien entre le tenseur hadronique et le tenseur partonique est :

$$W_{\mu\nu} = \int \frac{d\xi}{\xi} (q + \bar{q})(\xi) \hat{W}_{\mu\nu}[\hat{p} = \xi p]\,.$$

Calculez $W_{\mu\nu}$.

e) Calculez les fonctions de structure F_1 et F_2 en utilisant les projecteurs. Comparez avec le cas de partons d'un spin $\frac{1}{2}$.

f) Comment le résultat en b) change-t-il si le parton sortant a une masse m mais le parton entrant a une masse 0 (courant chargé, par exemple $s + W^+ \to c$) ?

Exercice 3 : α_s à NLO

a) Précisez l'équation de groupe de rénormalisation (EGR) pour $a_s(Q^2) := \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi}$ à NLO (en termes de β_0 et β_1).

b) Montrez que la solution de cette EGR est donnée par :

$$\frac{1}{\beta_0}\left(\frac{1}{a_s(Q^2)} - \frac{1}{a_s(Q_0^2)}\right) + \frac{\beta_1}{\beta_0^2}(\ln a_s(Q^2) - \ln a_s(Q_0^2)) = \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}\,.$$

c) On introduit une échelle Λ (transmutation dimensionelle) par

$$\frac{1}{\beta_0}\frac{1}{a_s(Q^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln a_s(Q^2) = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}\,.$$

Que devient la solution in b) ?

d) On cherche maintenant une solution approximative fermée. Pour cela on utilise $\ln a_s(Q^2) \simeq -\ln L_\Lambda$ avec $L_\Lambda := \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$ ce qui est valable pour $Q^2 \gg \Lambda^2$ (c.à.d. $Q^2 \geq 2$ GeV^2). Montrez que

$$a_s(Q^2) \simeq \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda}\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2}\frac{\ln L_\Lambda}{L_\Lambda}\right)\,.$$