# Le Modèle Standard

Procédure générale :

1.) Contenu en $\underbrace{\text{particules}}_{\text{degrés de liberté de la théorie}}$ et symétries

2.) Construction d'un Lagrangien

3.) Observables

- Comment mesurer
- Comment calculer

4.) Falsification : Comparer theory avec données

---

# Particules et Symétries

* Particules = Excitations des champs quantiques

- * Bosons de jauge : spin = 1
- * Matière : spin = 1/2 } initialement sans masse

  ↳ Fermions

- * Boson de Higgs : spin = 0

* Symétrie de jauge :

$$G_{SM} = SU(3)_c \times \underbrace{SU(2)_L \times U(1)_Y}$$

$SU(3)_c$ : Int. forte, QCD

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ : symétrie électrofaible, Modèle Glashow-Salam-Weinberg, QFD

QFD : Quantum Flavor Dynamics

→ Particules dans des ireps de $G_{SM}$

* Renormalisabilité : Dim. des opérateurs $\leq 4$

* Poincaré invariance

↳ $\mathcal{L}$ invariant sous Lorentz transf.

$\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement de $x^\mu$ ← invariance sous translations

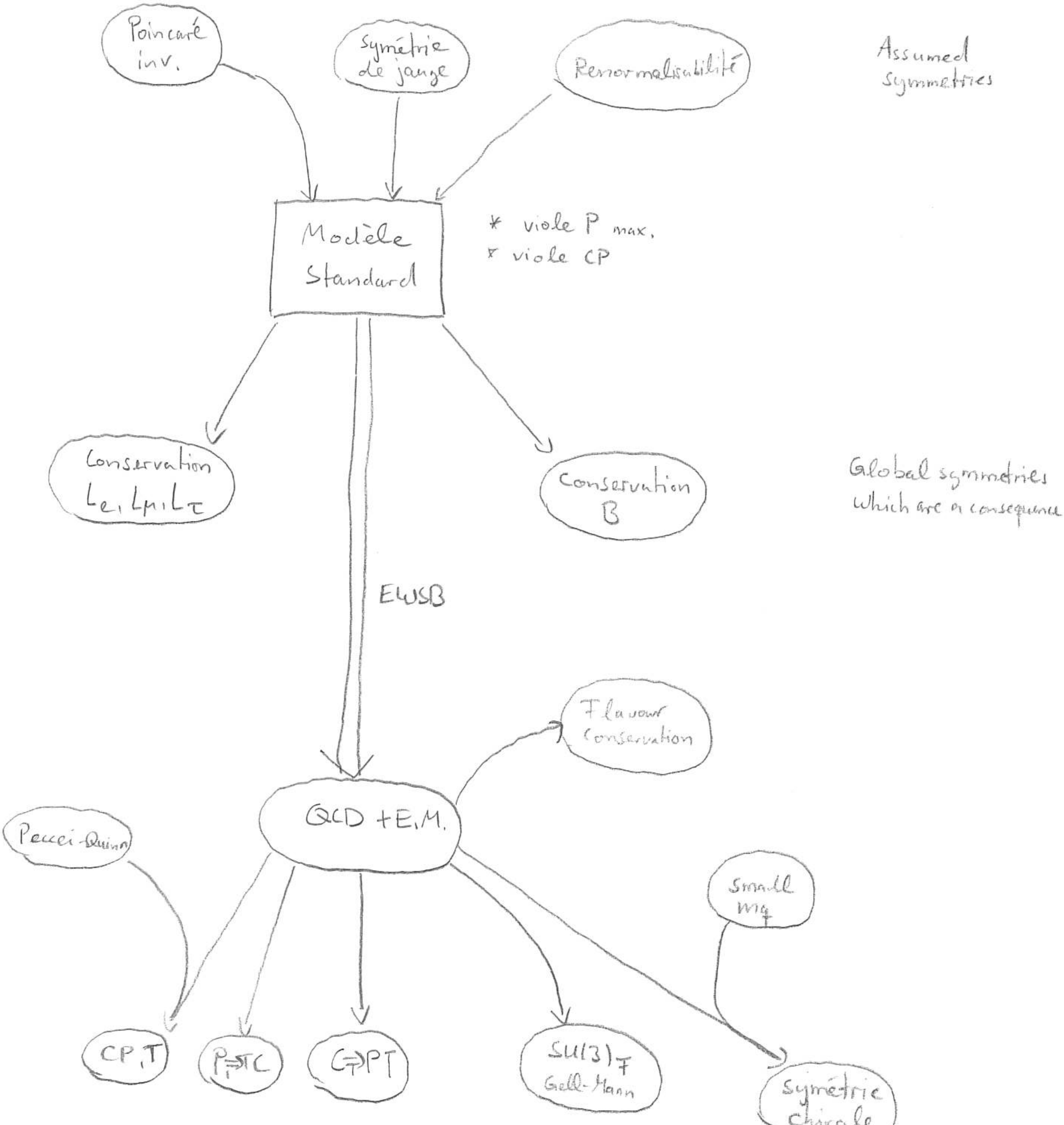
Lagrangien

(1.) $\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{\underline{G}auge} + \mathcal{L}_{\underline{M}atière} + \mathcal{L}_{\underline{H}iggs} + \mathcal{L}_{\underline{Y}ukawa}$

* invariant sous $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$
* bosons de jauge et fermions sans masse

(2.) Brisure de symétrie spontanée (EWSB)

* $G_{SM} \longrightarrow SU(3)_c \times U(1)_{e.m.}$
* $\mathcal{L}_{SM} \longrightarrow \mathcal{L}_{QCD+EM}$ : $m_W \neq 0$
  $m_Z \neq 0$
  $m_{fermions} \neq 0$



Poincaré inv.
Symétrie de jauge
Renormalisabilité
Assumed symmetries
Modèle Standard
* viole P max.
* viole CP
Conservation $L_e, L_\mu, L_\tau$
Conservation B
Global symmetries which are a consequence
EWSB
Flavour Conservation
QCD + E.M.
Peccei-Quinn
Small $m_q$
CP, T
P, T ⇒ C
C ⇒ PT
$SU(3)_F$ Gell-Mann
Symétrie chirale

# Contenu en particules

Poincaré

## Spin-1/2 matière : chiralité gauche

Quarks

$SU(3)_c$ $SU(2)_L$ $U(1)_Y$

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (3,2)_{1/3}$$

$$u_R^c \equiv (u_R)^c \sim (\bar{3},1)_{-4/3}$$
$$= (u^c)_L$$

$$d_R^c \sim (\bar{3},1)_{2/3}$$

Leptons

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \sim (1,2)_{-1}$$

$$e_R^c \sim (1,1)_2$$

$$\nu_R^c \sim (1,1)_0 \quad \text{(Hypothetic)}$$

Notez :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dirac}}}{(u^c)_L} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Weyl}}}{(u_R)^c} = (P_R u)^c \quad \Rightarrow \quad u_R^c \equiv (u_R)^c \text{ a une chiralité } \underline{\text{gauche}}$$

Ex. : Faire le tableau pour les (anti-)particules avec chiralité droite

## Spin-0 :

Higgs

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \sim (1,2)_1$$

$\phi^0_{(x)}, \phi^+_{(x)}$ champs scalaires complexes

## Spin-1 :

Bosons de jauge

$$B \sim (1,1)_0 \quad \leftrightarrow U(1)_Y$$

$$W \sim (1,3)_0 \quad \leftrightarrow SU(2)_L$$

repr. adj.

$$G \sim (8,1)_0 \quad \leftrightarrow SU(3)_c$$

repr. adj. de $SU(3)_c$

$$\boxed{\text{charge e.m. : } Q = T_3 + \frac{Y}{2}}$$

Notez : Doublets $SU(2)_L$ : $Q, L, \Phi$ la charge e.m. augmente de bas en haut

## $\mathcal{L}_{Gauge}$ :

$SU(3)_c$ : 8 gluons $G_\mu^a$ , $a = 1, \dots, 8$

$$\underset{\sim}{G}_\mu := G_\mu^a T^a \quad , \quad T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad \text{(gen. de la repr. fond. 3 de SU(3))}$$

$$\underset{\sim}{G}_\mu \xrightarrow{SU(3)_c} U(x)\, \underset{\sim}{G}_\mu\, U(x)^{-1} + \frac{i}{g_3} (\partial_\mu U(x)) U^+(x)$$

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbb{1} + i g_3 \underset{\sim}{G}_\mu \quad , \quad g_3 \equiv g_s$$

$$\underset{\sim}{G}_{\mu\nu} := G_{\mu\nu}^a T^a = \frac{-i}{g_3} [D_\mu, D_\nu]$$

$$G_{\mu\nu}^a \longrightarrow \left(e^{i \Theta^c(x) F^c}\right)^{ab} G_{\mu\nu}^b$$

, $F^c$ , $c = 1, \dots, 8$ gén. dans la repr. adjointe 8 de $SU(3)_c$

$$(F^c)^{ab} = -i f^{cab}$$

$SU(2)_L$ : 3 bosons $W_\mu^i$ , $i = 1, 2, 3$

$$\underset{\sim}{W}_\mu := W_\mu^i T^i \quad , \quad T^i = \frac{1}{2} \tau^i \quad \text{(repr. fond. 2 de SU(2))}$$

$$D_\mu = \partial_\mu \mathbb{1} + i g_2 \underset{\sim}{W}_\mu \quad , \quad g_2 \equiv g$$

$$\underset{\sim}{W}_{\mu\nu} := W_{\mu\nu}^i T^i$$

$U(1)_Y$ : 1 hypercharge boson $B_\mu$

$$\underset{\sim}{B}_\mu = \frac{Y}{2} B_\mu$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_1 \underset{\sim}{B}_\mu$$

$$g_1 \equiv g_Y \equiv g'$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

$$\underset{\sim}{B}_{\mu\nu} = \frac{Y}{2} B_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{4}\underset{\underset{SU(3)_c}{\uparrow}}{G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}} - \frac{1}{4}\underset{\underset{SU(2)_L}{\uparrow}}{W^i_{\mu\nu}W^{i\mu\nu}} - \frac{1}{4}\underset{\underset{U(1)_Y}{\uparrow}}{B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}}$$

* Termes de masse pour les bosons ne sont pas invariant de jauge

# Spineurs de Dirac et Majorana

Fermions $\leftrightarrow$ Représentations spinorielles de l'espace temps

Groupe de Lorentz $SO(1,3)$ : 6 Générateurs $J_i \ (i=1,2,3)$, $K_i \ (i=1,2,3)$

3 Rotations      3 Boosts

Algèbre $so(1,3)$ :

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k \qquad J_i^{+} = J_i$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} J_k \qquad K_i^{+} = -K_i$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k$$

<u>Déf.</u> :
$$J_i^{\pm} = \frac{1}{2}(J_i \pm i K_i)$$

$$[J_i^+, J_j^+] = i\epsilon_{ijk} J_k^+$$

$$[J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ijk} J_k^-$$

$$[J_i^+, J_j^-] = 0$$

$$\Rightarrow \quad so(1,3) \cong su(2) \times su(2)$$

Irreps : $(j_1, j_2)$ ; $j_1 = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$
$j_2 = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$

Spineurs de Weyl :

$$\chi_\alpha \sim (1/2, 0) \qquad \text{Left-handed} \qquad \alpha = 1,2$$

$$\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \sim (0, 1/2) \qquad \text{Right-handed} \qquad \dot{\alpha} = 1,2$$

Ex. : $\chi_\alpha \sim (1/2, 0) \implies (\epsilon \chi^*)^{\dot\alpha} \sim (0, 1/2)$

$$\epsilon = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} \chi^*_{\dot\beta} = (\chi^c)^{\dot\alpha} \equiv \bar\chi^{\dot\alpha}$$

Spineur de Dirac (4 composantes)

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar\xi^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \sim (1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$$

- ▷ utilise 2 spineurs de Weyl $\chi, \xi$ dans un objet
- ▷ décrit particule $\chi$ et anti-particule $\bar\xi$ en même temps

Spineur de Majorana (4 composantes)

$$\psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar\chi^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

- ▷ utilise 1 spineur de Weyl $\chi$
- ▷ est son propre anti-particule

Les deux spineurs de Weyl dans un spineur de Dirac sont toujours independants :

$$\psi = P_L \psi + P_R \psi \quad \text{avec } P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}, \; P_R = \frac{1+\gamma_5}{2}$$

$$= \psi_L + \psi_R$$

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar\xi \end{pmatrix}$$

Monter et descendre indices:

LH $\quad \chi_\alpha \sim (1/2, 0) \quad , \quad \epsilon^{\alpha\beta} \chi_\beta = \chi^\alpha \sim (\widetilde{1/2, 0})$ dual

RH $\quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \sim (0, 1/2) \quad , \quad \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \sim (0, \widetilde{1/2})$ dual

Metrique
spinor. SU(2)

$$\epsilon^{\alpha\beta} = i\sigma_2$$

$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = i\sigma_2 \quad \text{(mais repr. diff.)}$$

Produit scalaire:

LH $\quad \chi^\alpha \xi_\alpha =: \chi\xi = -\chi_\alpha \xi^\alpha$ Lorentz inv.

RH $\quad \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\xi} = -\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ L.I.

$$\chi^\alpha \xi_\alpha = \chi^\alpha \epsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta$$

$$= \epsilon^{\beta\alpha} \chi_\alpha \xi_\beta = -\chi_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta$$

# Indices :

$$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim \overset{\substack{su(3)_c \ \ su(2)_L}}{(3,2)}_{1/3} \leftarrow u(1)_Y$$

$$\underbrace{Q}_{\substack{f=1,2,3\\ \text{génération}}}\ {}_{f\,i\,\beta\,\alpha}$$

$\alpha = 1,2$ su(2) spinor

f = 1,2,3 génération

$su(3)_c$ : $i = 1,2,3$

$\beta = 1,2$ ($su(2)_L$)

$u_L, d_L$ : Left-handed Weyl spinors

$u_{L\alpha} \sim (1/2, 0)$ de $so(1,3)$

$d_{L\alpha} \sim (1/2, 0)$ de $so(1,3)$

$$u_R \sim (3,1)_{-4/3}$$

$$(u_R)_{fi\dot{\alpha}}$$

$u_{R\dot{\alpha}} \sim (0, 1/2)$ de $so(1,3)$

$$u_R^c \sim (3^*, 1)_{4/3}$$

$$(u_R^c)^{i\alpha} = (\varepsilon u_R^*)^{i\alpha}$$

$(u_R^c)^{\alpha} \sim (\widetilde{1/2}, 0)$

## $\mathcal{L}_{\text{Matter}}$ :

Utilisons spineurs de Weyl en notation avec 4-composantes

$$u = \begin{pmatrix}\chi_\alpha \\ \xi^{\dot\alpha}\end{pmatrix} \qquad u_L = \begin{pmatrix}\chi_\alpha \\ 0\end{pmatrix}, \quad (u^c)_L = \begin{pmatrix}\xi_\alpha \\ 0\end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix}u_L \\ d_L\end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix}\nu_L \\ e_L\end{pmatrix}$$

Dirac

$$u^c = \begin{pmatrix}\xi_\alpha \\ \bar\chi^{\dot\alpha}\end{pmatrix} \qquad \text{Note: } (u_L)^c = \begin{pmatrix}0 \\ \bar\chi^{\dot\alpha}\end{pmatrix} = (u^c)_R \qquad \{ (\psi^c)_L = C\gamma^0 \psi_R^* \}$$

$$\bar Q = [\bar u_L \;\; \bar d_L]$$

generation

$$\mathcal{L}_{Mat} = \bar Q^f i \not{D} Q^f + \bar u_R^f i\not{D} u_R^f + \bar d_R^f i \not{D} d_R^f$$

Prod. tensoriel

$$+ \bar L^f i\not{D} L^f + \bar e_R^f i \not{D} e_R^f \quad (+ \bar\nu_R i\not{D} \nu_R)$$

▷ $\underset{\sim}{D_\mu}^{R_3R_2R_1} = (\underset{\mathbb{1}^{R_3}\otimes\mathbb{1}^{R_2}\otimes\mathbb{1}^{R_1}}{\partial_\mu} + i g_s \underset{\sim}{G}_\mu^{R_3} + i g \underset{\sim}{W}_\mu^{R_2} + i g' \underset{\sim}{B}_\mu^{R_1}) \qquad \left( \underset{\sim}{G}_\mu^R = T_R^a G_\mu^a, \; \underset{\sim}{B}_\mu^R = \frac{Y}{2} B_\mu \right)$

($\mathbb{1}^{R_2}\otimes\mathbb{1}^{R_1}$, $\mathbb{1}^{R_3}\otimes\mathbb{1}^{R_1}$)

▷ Terme de masse ne sont pas inv. de jauge

▷ "LL", "RR", non "LR" : "L" and "R" vivent à côté ! (sans termes de masse)

▷ $$D_\mu Q = \left(\partial_\mu + i g_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a + i g \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + i g' \left(\tfrac{1}{6}\right) B_\mu\right) Q \qquad (Y/2)$$

$$D_\mu u_R = \left(\partial_\mu + i g_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a + 0 + i g' \left(+\tfrac{2}{3}\right) B_\mu\right) u_R$$

$$D_\mu L = \left(\partial_\mu + 0 + i g \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + i g' \left(-\tfrac{1}{2}\right) B_\mu\right) L$$

$$D_\mu e_R = \left(\partial_\mu + 0 + 0 + i g' (-1) B_\mu\right) e_R$$

( $D_\mu d_R$ : Exercice)

$$D_\mu d_R = \left(\partial_\mu + i g_s \frac{\lambda^a}{2} G_\mu^a + 0 + i g' \left(-\tfrac{1}{3}\right) B_\mu\right) d_R$$

Ex.: Write down $D_\mu Q$ with all indices !

$$(D_\mu Q)_{fi\beta\alpha} = \Big( \partial_\mu \delta_{ff'} \delta_{ii'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\alpha\alpha'} + i g_s \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ii'} G_\mu^a \delta_{ff'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\alpha\alpha'} + i g \left(\frac{\tau^i}{2}\right)_{\beta\beta'} W_\mu^i \delta_{ff'} \delta_{ii'} \delta_{\alpha\alpha'}$$
$$+ i g' \frac{1}{6} B_\mu \delta_{ff'} \delta_{ii'} \delta_{\beta\beta'} \delta_{\alpha\alpha'} \Big) Q_{f'i'\beta'\alpha'}$$

## $\mathcal{L}_{Higgs}$ :

$$H = \begin{pmatrix} h^+ \\ h^0 \end{pmatrix} \sim (1,2)_1$$

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu H)^\dagger D^\mu H - V(H)$$

avec $V(H) = \mu^2 H^\dagger H + \lambda (H^\dagger H)^2$

$$D_\mu H = (\partial_\mu + i g \frac{\tau^i}{2} W^i_\mu + i g' \underbrace{\frac{1}{2}}_{Y/2} B_\mu) H$$

## $\mathcal{L}_{Yukawa}$ :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\underbrace{\Gamma_u^{ff'}}_{\text{generations}} \bar{Q}^f \tilde{H} u_R^{f'} - \Gamma_d^{ff'} \bar{Q}^f H d_R^{f'} - \Gamma_e^{ff'} \bar{L}^f H e_R^{f'} + \text{H.c.}$$

$\Gamma_u, \Gamma_d, \Gamma_e \in M_3(\mathbb{C})$ (matrices 3x3 complexes)

$\tilde{H} = \epsilon H^*$

$\underbrace{u_R}_{SU(2)_L \text{ singlet}}$ , $\underbrace{Q_\alpha}_{SU(2)_L}$ , $H_\alpha = \begin{pmatrix} h^+ \\ h^0 \end{pmatrix}$ , $\tilde{H}^{\dot\alpha} = \begin{pmatrix} h^{0*} \\ -h^- \end{pmatrix}$

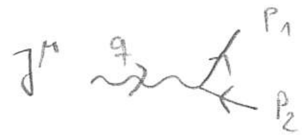
$$\bar{Q}\tilde{H} = (\bar{u}_L h^0 - \bar{d}_L h^-)$$

$$\bar{Q} H = (\bar{u}_L h^+ + \bar{d}_L h^0)$$

# Absence d'anomalies

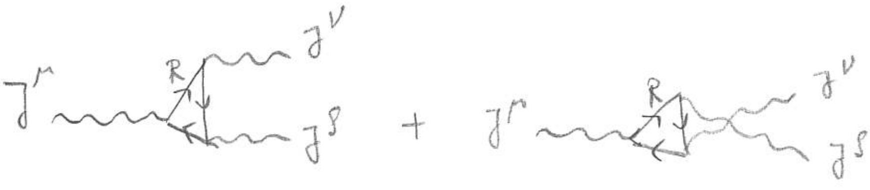
Anomalie = Symétrie classique (symétrie de $\mathcal{L}$) détruite au niveau quantique (boucles)

Rappel : Invariance de jauge $\Rightarrow$ conservation du courant, $\partial_\mu J^\mu = 0$




$$q_\mu J^\mu = \bar{u}(p_1)\, \not{q}\, v(p_2) = \bar{u}(p_1)(\not{p}_1 + \not{p}_2)\, v(p_2) = 0$$

car $\bar{u}(p_1)\not{p}_1 = 0$, $\not{p}_2 v(p_2) = 0$




On a besoin de $\partial_\mu J^\mu = \partial_\nu J^\nu = \partial_\rho J^\rho = 0$

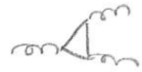
C'est satisfait seulement si :

$$\sum_R \mathrm{Tr}\left[ T_R^A \left\{ T_R^B , T_R^C \right\} \right] = 0$$

où $T_R^A$ est un géné dans la repr. R

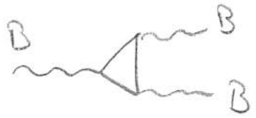
* En général, une théorie chirale ($L \neq R$) a des anomalies de jauge (c.à.d. n'a pas de sense), sauf choix judicieux des repr. des fermions ! (comme c'est le cas dans le SM)

* Une théorie de jauge vector-like n'a pas d'anomalies de jauge

* $SU(3)^3$ :  ✓ QCD vectorlike

* $SU(2)^3$ : 

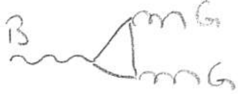

$$\frac{1}{8} \sum_{\text{doublets}} \mathrm{Tr}\left[ G^i \underbrace{\{ G^j , G^k \}}_{2\delta^{jk}} \right] = \sum \frac{1}{4} \delta^{jk} \overbrace{\mathrm{Tr}[G^i]}^{=0} = 0$$

* $U(1)_Y{}^3$ : 

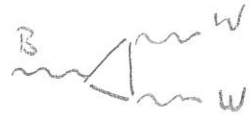

$$\sum_{\text{fermions}} (Y/2)^3 = \underset{Q}{(1/6)^3} \cdot 2 \cdot 3 + \underset{u_R^c}{(-2/3)^3} \cdot 3 + \underset{d_R^c}{(1/3)^3} \cdot 3$$
$$+ \underset{L}{(-1/2)^3} \cdot 2 + \underset{e_R^c}{1^3} = 0$$

15 fermions gauches ; de même pour les fermions droites

▷ Cancellation entre quarks et leptons dans chaque génération

* $SU(3)^2 - U(1)_Y$ : 


$$\propto \sum_{\text{quarks}} Y = 0$$

* $SU(2)^2 - U(1)_Y$ ; 


$$\propto \sum_{\text{Doublets}} Y/2 \, \mathrm{Tr}\{ G^i , G^j \} \propto \sum_{\text{Doublets}} Y/2$$
$$= + (1/6) \cdot 3 + (-1/2) = 0$$

▷ Canc. entre Q et L

La nécessité d'éviter des anomalies explique pourquoi les charges sont quantifiées avec des valeurs spécifiques.