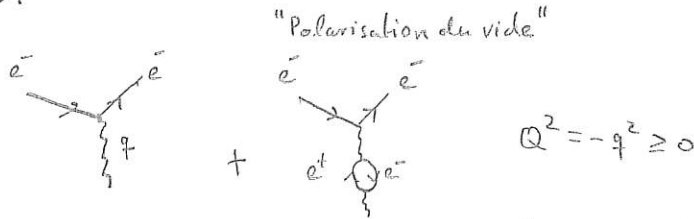


Liberté asymptotique

Corrections radiatives \rightarrow Divergences UV \rightarrow Renormalisation \rightarrow Constante de couplage effective : $\alpha \rightarrow \alpha(Q^2)$

a) QED:



cut-off pour regulariser la divergence

$$\alpha = \alpha_0 \left(1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + \text{finite} \right)$$

\hookrightarrow dépend du schéma de renormalisation

$$\frac{d\alpha}{d \ln Q^2} = \beta(\alpha) = \alpha^2 \frac{1}{3\pi} = \alpha^2 \frac{1}{3\pi} + O(\alpha^3)$$

$$; \alpha_0 = \alpha + O(\alpha^2)$$

Différence \Leftrightarrow annuler la divergence UV

Solution:

$$\frac{d\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{3\pi} d \ln Q^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{\alpha} \Big|_{\alpha(\mu^2)}^{\alpha(Q^2)} = \frac{1}{3\pi} \ln Q^2 \Big|_{\ln \mu^2}^{\ln Q^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\alpha(\mu^2)} - \frac{1}{\alpha(Q^2)} = \frac{1}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$$

i ne dépend plus de Λ ; $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

Constante de coupl. effective

lorsque $Q^2 \uparrow \quad \alpha(Q^2) \uparrow$

Discussion:

- QED: limite de Thomson : $\alpha(m_e^2) = \frac{1}{137,035999} =: \alpha$ (Input)

- $\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} = 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \dots$

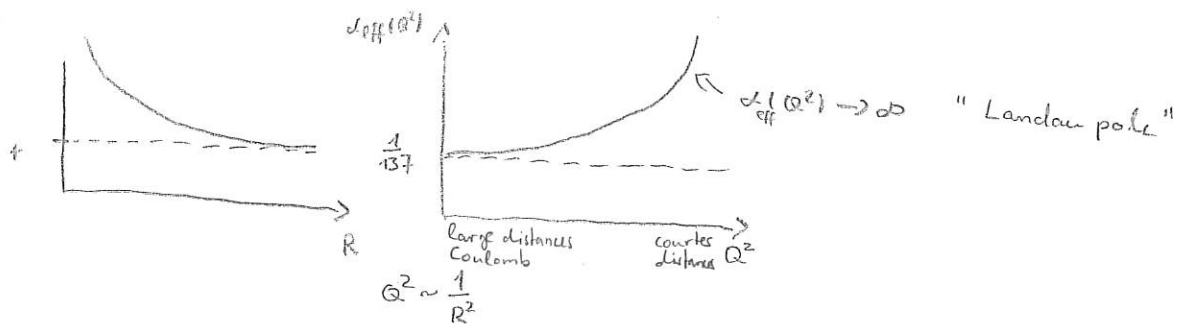
Resommation (Dyson) : = + + + ...

- Dans la boucle : e^+e^- mais aussi $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$; $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, ...

\hookrightarrow contributions non-part. $u\bar{u} \Leftrightarrow \bar{u}u$

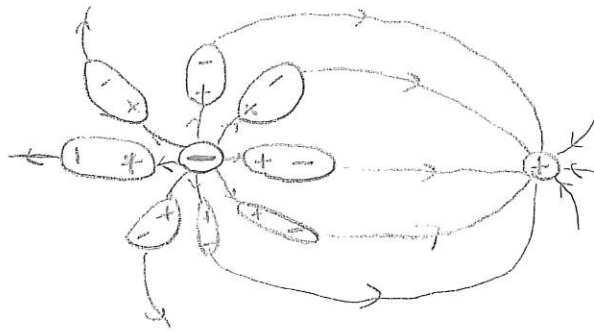
$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \sum_f e_f^2 \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

\uparrow
 $\text{Im } \Pi_{\mu\nu} \Leftrightarrow \text{state-sh}$
 \uparrow Real Dispersion
 $\frac{1}{\pi} \text{PV}$



Interpretation: Effet d'écran généré par les paires de fermions virtuels

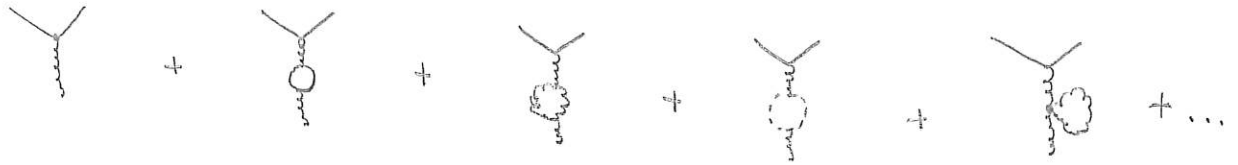
Vide physique = Milieu diélectrique polarisé



Dans la boucle aussi $\mu^+\mu^-$, $\tau^+\tau^-$, $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, ...

$$\Rightarrow \alpha_{\text{eff}}(Q^2) = \frac{\alpha}{1 - \sum_f \frac{R_f^2}{f} \frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{Q^2}{m_f^2}}$$

CD:



$$\alpha_s = \alpha_{s,0} \left(1 + \frac{\alpha_{s,0}}{4\pi} \beta_0 \ln \frac{\Lambda^2}{Q^2} + \text{finite} \right)$$

avec $\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} T_R n_f$; $\beta_0 > 0$ pour $n_f \leq 16$

c.à.d. $\frac{\alpha_s(\mu^2)}{3\pi} \rightarrow -\frac{\alpha_s(\mu^2)}{4\pi} (11 - \frac{2}{3} n_f)$

$$\frac{d\alpha_s}{d \ln Q^2} = -\beta_0 \alpha_s^2 \quad ; \quad \alpha_s := \frac{\alpha_s}{4\pi}$$

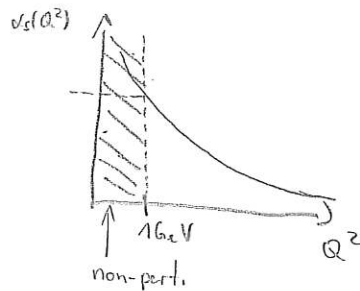
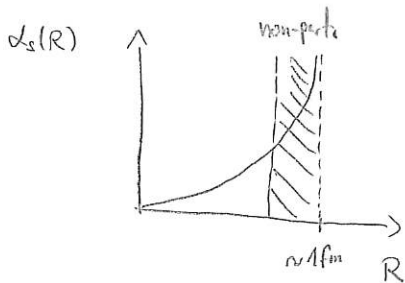
$$\Rightarrow \alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2) \beta_0 \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

$Q^2 \uparrow \alpha_s(Q^2) \downarrow$ (pour $n_f \leq 16$)

Liberté asymptotique

$\alpha_s(Q^2) \rightarrow 0$ pour $Q^2 \rightarrow \infty$

(Gross, Wilczek, Politzer 1973)



Confinement : $\alpha_s \geq 1$ pour $Q^2 \lesssim 16 \text{ GeV}^2 \leftrightarrow R \gtrsim 0,2 \text{ fm}$ (rayon du nucléon)

Interpretation 1

(pas Cf!) $\frac{1}{2}$

$$\rightarrow \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot \frac{4}{3} T_R n_f = \frac{\alpha_s}{3\pi} \frac{1}{2} n_f \quad ; \quad \text{effet d'écran (comme en QED)}$$



$$\rightarrow -\frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{11}{3} C_A$$

: effet d'anti-écran (théorie non-abélienne)

Étalement de la charge par émissions de gluons (virtuels)



Transmutation dimensionnelle

$\alpha_s(\mu^2)$ sans dimension. Mais \exists échelle Λ où $\alpha_s(\mu^2)$ devient large.

~~Une condition comme $\alpha_s(\mu^2) = 1$ ou $\alpha_s(\mu^2) = \infty$ permet remplacer éliminer $\alpha_s(\mu^2)$ en introduisant l'échelle Λ .~~

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} + \beta_0 \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$$

~~Déf. : Λ ; $\frac{1}{\alpha_s(\Lambda^2)} = 0$~~

~~ou : $\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} + \beta_0 \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right)$~~

~~Λ tel que $\frac{1}{\alpha_s(\Lambda^2)} - \beta_0 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} = 0$~~

$\mu = \Lambda$
 \Rightarrow

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}$$

$$\Rightarrow \Lambda_{LO}^2 = Q^2 e^{-\frac{1}{\beta_0 \alpha_s(Q^2)}} = \Lambda_{LO}^2(n_f)$$

$\Lambda \approx 100 \dots 300 \text{ MeV}$, $\Lambda^{-1} \sim 1 \text{ fm}$: radius de confinement

$Q^2 \gg \Lambda^2$: $\alpha_s(Q^2) \ll 1$: calculs perturbatifs, $Q^2 \gtrsim 2 \text{ GeV}^2$, $R \lesssim 0,1 \text{ fm}$

$Q^2 \sim \Lambda^2$: $\alpha_s(Q^2) > 1$: QCD non-perturbatif, Confinement

Seuils (Thresholds)

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad (\text{Leading Order})$$

$$\alpha_s = \frac{d_s}{4\pi}$$

$$\beta_0 = \beta_0^{(n_f)} = \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} \text{Tr } \eta_f$$

$$= 11 - \frac{2}{3} n_f \quad ; \quad n_f = \# \text{ saveurs de quarks dans la boucle}$$

$$= \begin{cases} \frac{23}{3} = 9 & ; n_f = 3 \quad (u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}) \\ \frac{25}{3} & ; n_f = 4 \quad + c\bar{c} \\ \frac{23}{3} & ; \quad 5 \quad + b\bar{b} \\ \frac{21}{3} & ; \quad 6 \quad + t\bar{t} \end{cases}$$

$$n_f = ?$$

Découplage :

Demande $q\bar{q}$ ne contribue pas si $Q^2 \ll m_q^2$

Problème : m_q n'apparaît pas dans β_0

Solution : VFNS (Variable Flavor Number Scheme)

$$S = S^{(3)} \oplus S^{(4)} \oplus S^{(5)} \oplus S^{(6)}$$

\uparrow schéma avec 3 saveurs \uparrow schéma avec 4 saveurs

Patchwork de plusieurs schémas avec $n_f = \text{fixe}$

Transition $S^{(n_f)} \rightarrow S^{(n_f+1)} @ Q^2 \approx m_{q_{n_f+1}}^2$ ici on reintroduit les masses

Matching / Corrections de seuil : Demande que observables sont continues

$$\text{à travers les seuils : } O^{(3)}(m_c^2) \stackrel{!}{=} O^{(4)}(m_c^2)$$

$$O^{(4)}(m_b^2) \stackrel{!}{=} O^{(5)}(m_b^2)$$

Observables : section efficace, Largeurs, ...

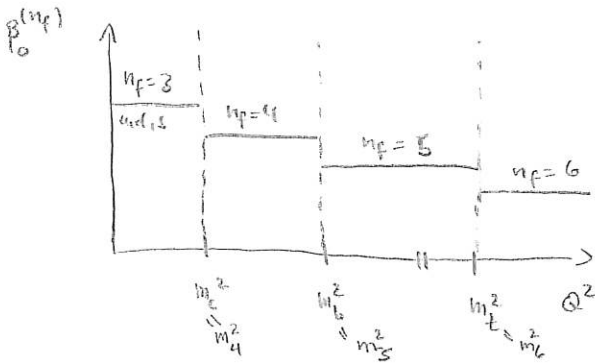
⚠ Les paramètres du Lagrangien (couplage, masses) $\Rightarrow d_s^{(4)}(m_c^2) \neq d_s^{(3)}(m_c^2)$ calculable
ne sont pas des observables !

Ils peuvent bien être discontinus (et ils le sont) aux ordres supérieurs de la série de perturbation

À leading order : $\alpha_s(Q^2)$ continu (mais pas lisse : $\frac{d\alpha_s}{d\ln Q^2} = -\beta_0 \alpha_s^2$)
↑ ↑
discontinu continu

$$\alpha_s^{(3)}(m_c^2) \stackrel{!}{=} \alpha_s^{(4)}(m_c^2)$$

$$\vdots$$



$$m_c \approx 1.5 \text{ GeV} \gg \Lambda \approx 200 \text{ MeV}$$

$$m_b \approx 4.5 \text{ GeV}$$

$$m_t \approx 171 \text{ GeV}$$

compensé par $\Lambda^{(n_f)}$: $\Lambda^{(3)} \rightarrow \Lambda^{(4)} \rightarrow \Lambda^{(5)} \rightarrow \Lambda^{(6)}$

$$\alpha_s^{(n_f)}(m_{n_f+1}^2) \stackrel{!}{=} \alpha_s^{(n_f+1)}(m_{n_f+1}^2)$$

$$\Leftrightarrow \beta_0^{(n_f)} \ln \frac{m_{n_f+1}}{\Lambda^{(n_f)}} = \beta_0^{(n_f+1)} \ln \frac{m_{n_f+1}}{\Lambda^{(n_f+1)}}$$

$$\frac{\beta_0^{(n_f)}}{\beta_0^{(n_f+1)}} = \frac{\beta_0^{(n_f+1)} \frac{2/3}{+ C_F T_R}}{\beta_0^{(n_f+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \Lambda^{(n_f+1)} = m_{n_f+1} \left(\frac{\Lambda^{(n_f)}}{m_{n_f+1}} \right)^{1+\delta}$$

$$= \Lambda^{(n_f)} \left(\frac{\Lambda^{(n_f)}}{m_{n_f+1}} \right)^\delta < \Lambda^{(n_f)}$$

$$= 1 + \delta ; \delta = \frac{C_F T_R}{\beta_0^{(n_f+1)}}$$

Pratiquement : $\alpha_s^{L0}(M_Z^2) \approx 0.130$ ($\alpha_s^{NLO}(M_Z^2) \approx 0.118$)

$$\hookrightarrow \Lambda_{L0}^{(5)} \rightsquigarrow \Lambda_{L0}^{(4)} \rightsquigarrow \Lambda_{L0}^{(3)}$$

$$\Lambda_{L0}^{(3,4,5)} \approx 232, 200, 153 \text{ MeV}$$

Ordres supérieurs

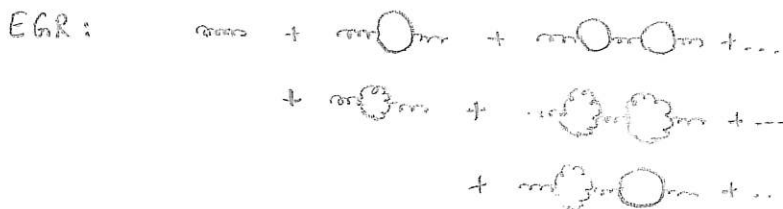
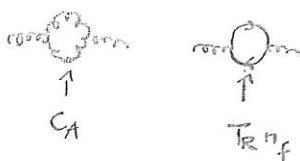
$$\frac{d\alpha_s(Q^2)}{d \ln Q^2} = \beta[\alpha_s(Q^2)]$$

Équation du groupe de renormalisation (EGR)

LO: $\beta = -\beta_0 \alpha_s^2 < 0$

$\beta_0 = \frac{11}{3} C_A - \frac{4}{3} T_R n_f$

↑
leading order;
leading logarithms LL



corrections au prop. des gluons,
pris en compte
en LO par solution
de l'EGR

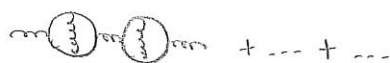
$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \alpha_s(\mu^2) \beta_0 \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

$$= \alpha_s(\mu^2) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-\alpha_s(\mu^2) \beta_0 \ln \frac{Q^2}{\mu^2})^n \right]$$

↑
 $\alpha_s L, L = \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$

NLO (Next-to-leading order)

$\propto \alpha_s^2 L = \alpha_s(\alpha_s L)$ NLL



1	$\alpha_s L$	$(\alpha_s L)^2$...	$(\alpha_s L)^n$	LL
α_s	$\alpha_s(\alpha_s L)$	$\alpha_s(\alpha_s L)^2$...	$\alpha_s(\alpha_s L)^n$	NLL

$$\beta = -\beta_0 \alpha_s^2 - \beta_1 \alpha_s^3$$

avec $\beta_1 = \frac{34}{3} C_A^2 - \frac{20}{3} C_A T_R n_f - 4 C_F T_R n_f \stackrel{SU(3)}{=} 102 - \frac{38}{3} n_f$



Skip

$$\frac{da_s}{d \ln Q^2} = -\beta_0 a_s^2 - \beta_1 a_s^3 = \beta(a_s) \quad ; \text{Separation des variables}$$

Solution:

$$\frac{da_s}{\beta(a_s)} = - \frac{da_s}{\beta_0 a_s^2 (1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} a_s)} = d \ln Q^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2(1+cx)} &= \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{1+cx} \\ &= \frac{(Ax+B)(1+cx) + Cx^2}{x^2(1+cx)} = \frac{Ax + Acx^2 + B + Bcx + Cx^2}{x^2(1+cx)} \\ &= \frac{B + x(A+Bc) + x^2(Ac+C)}{x^2(1+cx)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B=1 ; A=-C, C=a^2$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\beta_0} da_s \left(\frac{1}{a_s^2} - \frac{\beta_1}{\beta_0 a_s} + \underbrace{\left(\frac{\beta_1}{\beta_0} \right)^2 \frac{1}{1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} a_s}}_{=O(a_s^0)} \right) \\ &\quad \rightarrow \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} a_s \right) \\ &\quad \approx \frac{\beta_1^2}{\beta_0^2} a_s \end{aligned}$$

$$\ln(1+\epsilon) \approx \epsilon$$

$$= \frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{a_s} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln a_s \right) = \ln \frac{Q^2}{\mu^2}$$

$$\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{a_s(Q^2)} - \frac{1}{a_s(\mu^2)} \right) + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \left(\ln a_s(Q^2) - \ln a_s(\mu^2) \right) = \ln \frac{Q^2}{\mu^2} = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} - \ln \frac{1}{\mu^2}$$

$$\wedge \text{ tel que } \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{a_s(\mu^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln a_s(\mu^2) = \ln \frac{1}{\mu^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{a_s(Q^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln a_s(Q^2) = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta_0 a_s(Q^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln(\beta_0 a_s(Q^2)) + O(a_s^0) = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta_0 a_s} = \underbrace{\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}_{\text{dominant}} + \underbrace{\frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln \frac{1}{\beta_0 a_s(Q^2)}}_{\text{petite correction}} \quad \rightsquigarrow \text{Iteration: } \frac{1}{\beta_0 a_s} \approx \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}$$

$$\approx \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln \left(\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \alpha_s(Q^2) &= \left[\beta_0 L_\Lambda + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln L_\Lambda \right]^{-1} \\
&= \left[\beta_0 L_\Lambda \left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln L_\Lambda}{L_\Lambda} \right) \right]^{-1} \\
&\approx \frac{1}{\beta_0 L_\Lambda} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln L_\Lambda}{L_\Lambda} \right) \quad ; \quad L_\Lambda \equiv \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}
\end{aligned}$$

pour $Q^2 \gg \Lambda^2$, sinon solution numérique.

$$\beta_0 = \beta_0^{(nf)}, \quad \beta_1 = \beta_1^{(nf)} \quad ; \quad \alpha_s \text{ continu à NLO}$$

$$\Lambda = \Lambda^{(nf)}, \quad \Lambda_{NLO}^{(2,4,5)} \approx 248, 200, 131 \text{ MeV}$$