Examen de Physique des Particules 1 — Corrigé
Particle Physics Booklet et notes de cours/TD autorisés

Exercice 1 : La largeur du quark top

Nous allons calculer dans la suite la largeur de la désintégration suivante du quark top :

$$t(p) \to b(p_1) + W^+_\mu(p_2)\,,$$

en négligeant la masse du quark b.

Rappel : Le vertex V_{tbW} prend la forme $\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu P_L$ avec $P_L = (1-\gamma_5)/2$.

a) Justifiez pourquoi la largeur totale $\Gamma_{\rm tot} \simeq \Gamma(t \to bW^+)$.

b) Donnez l'élément de matrice M_{fi}.

c) Calculez le carré de l'élément de matrice $\overline{|M_{fi}|^2}$ (en effectuant la somme/moyenne sur les spins et couleurs) en fonction des invariants $p \cdot p_1, p \cdot p_2, p_1 \cdot p_2$.
Rappel : La relation de fermeture pour le boson W est donnée par :

$$\sum_\lambda \varepsilon^\mu(\lambda, p_2) \varepsilon^{\nu *}(\lambda, p_2) = \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p_2^\mu p_2^\nu}{m_W^2} \right)\,.$$

d) Exprimez les invariants $p \cdot p_1, p \cdot p_2, p_1 \cdot p_2$ en fonction de m_t et m_W et trouvez alors le résultat final pour $\overline{|M_{fi}|^2}$.
Si vous n'avez pas trouvé la bonne solution vous pouvez supposer par la suite que $\overline{|M_{fi}|^2}$ est une constante.

e) Précisez la définition de la largeur $\Gamma(t \to bW^+)$.

f) Calculez l'espace de phase $\int dPS_{1\to 2}$ en fonction de m_t et m_W.

g) Montrez ainsi que la largeur peut être mise sous la forme :

$$\Gamma(t \to bW^+) = \frac{G_F}{8\pi\sqrt{2}} m_t^3 |V_{tb}|^2 \left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2}\right)^2 \left(1 + 2\frac{m_W^2}{m_t^2}\right)\,.$$

h) Donnez les valeurs numériques pour la largeur $\Gamma(t \to bW^+)$ en GeV et la durée de vie τ en secondes. Comparez la largeur avec la valeur dans le PDG booklet. Commentez pourquoi le quark top est spécial dans un certain sens.

Exercice 1a)

PDG booklet : $\Gamma_{\text{tot}} \simeq \sum_{q=b,s,d} \Gamma(t \to W^+ q)$ et $\Gamma(t \to W^+ b)/\sum_{q=b,d,s} \Gamma(t \to W^+ q) = 0.0957 \pm 0.034$. Par conséquent, $\Gamma_{\text{tot}} \simeq \Gamma(t \to W^+ b)$ avec un rapport de branchement d'environ $96 \pm 3\%$.

Exercice 1b)

L'élément de matrice (à leading order) s'écrit en utilisant les règles de Feynman

$$-iM_{fi} = \bar{u}(p_1) \left[\frac{ig}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu P_L \right] u(p) \epsilon^*_\mu(p_2) \, .$$

Donc,

$$M_{fi} = -\bar{u}(p_1) \left[\frac{g}{\sqrt{2}} V_{tb} \gamma^\mu P_L \right] u(p) \epsilon^*_\mu(p_2) \, .$$

Exercice 1c)

On trouve :

$$\begin{aligned}
M^*_{fi} &= -\bar{u}(p) \left[\frac{g}{\sqrt{2}} V^*_{tb} P_R \gamma^\nu \right] u(p_1) \epsilon_\nu(p_2) \, , \\
|M|^2 = MM^* &= \frac{g^2}{2} |V_{tb}|^2 \bar{u}(p_1) \left[\gamma^\mu P_L u(p) \bar{u}(p) P_R \gamma^\nu \right] u(p_1) \epsilon^*_\mu(p_2) \epsilon_\nu(p_2) \, , \\
\overline{|M|^2} &= \frac{1}{2} \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{\lambda} |M|^2 \, ,
\end{aligned}$$

ou s_1 est le spin du quark top, s_2 le spin du quark b et λ la polarisation du boson W^+. Notez que nous avons ici supprimé le facteur de couleur qui est égale a 1 :

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \delta_{ji} = 1 \, ,$$

où il faut moyenner sur la couleur du quark top (i) et faire une somme sur la couleur du quark b (j). Le vertex V_{tbW} ne change pas la couleur et est donc proportionnel à δ_{ij} (facteur qui serait à inclure dans M_{fi}).

En utilisant les règles de fermeture pour les quarks et le boson W :

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{2} \frac{g^2}{2} |V_{tb}|^2 \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu P_L (\not{p} + m_t) P_R \gamma^\nu] \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_{2\mu} p_{2\nu}}{m_W^2} \right) \, .$$

En utilisant les propriétés des projecteurs $P_L P_R = 0$, $P_L^2 = P_L, P_R^2 = P_R$ et $P_R \gamma^\nu = \gamma^\nu P_L$ la trace se simplifie :

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu P_L (\not{p} + m_t) P_R \gamma^\nu] &= \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu P_L \not{p} P_R \gamma^\nu] + m_t \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \underbrace{P_L P_R}_{=0} \gamma^\nu] \\
&= \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu P_L] = \frac{1}{2} \text{Tr}[\not{p}_1 \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu (1 + \gamma_5)] \\
&= \frac{1}{2} 4 (p_1^\mu p^\nu + p_1^\nu p^\mu - p_1 \cdot p \, g^{\mu\nu}) + \frac{1}{2} 4 i \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} p_1^\alpha p^\beta \, .
\end{aligned}$$

La partie proportionnelle à $\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}$ ne contribue pas à $\overline{|M|^2}$ car elle est anti-symétrique en $\mu\nu$ et est contractée avec $-g_{\mu\nu} + \frac{p_{2\mu}p_{2\nu}}{m_W^2}$ qui est symétrique en $\mu\nu$.
On trouve alors :

$$\begin{aligned}\overline{|M|^2} &= \frac{g^2}{8}|V_{tb}|^2 4(p_1^\mu p^\nu + p_1^\nu p^\mu - p_1 \cdot p\, g^{\mu\nu}) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_{2\mu}p_{2\nu}}{m_W^2}\right) \\ &= \frac{g^2}{2}|V_{tb}|^2 \left(p_1 \cdot p + 2\frac{p \cdot p_2 p_1 \cdot p_2}{m_W^2}\right) .\end{aligned}$$

Exercice 1d)

En utilisant $p^2 = m_t^2$, $p_1^2 = m_b^2 = 0$, $p_2^2 = m_W^2$ et $p = p_1 + p_2$:

$$\begin{aligned}(p - p_1)^2 &= p_2^2 = m_W^2 = m_t^2 - 2p \cdot p_1 \,, \\ (p - p_2)^2 &= p_1^2 = 0 = m_t^2 + m_W^2 - 2p \cdot p_2 \,, \\ (p_1 + p_2)^2 &= p^2 = m_t^2 = m_W^2 + 2p_1 \cdot p_2 \,,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}p \cdot p_1 &= \frac{1}{2}(m_t^2 - m_W^2) = \frac{m_t^2}{2}\left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2}\right) = \frac{m_t^2}{2}(1 - x) \,, \\ p \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(m_t^2 + m_W^2) = \frac{m_t^2}{2}\left(1 + \frac{m_W^2}{m_t^2}\right) = \frac{m_t^2}{2}(1 + x) \,, \\ p_1 \cdot p_2 &= \frac{1}{2}(m_t^2 - m_W^2) = \frac{m_t^2}{2}\left(1 - \frac{m_W^2}{m_t^2}\right) = \frac{m_t^2}{2}(1 - x) \,,\end{aligned}$$

avec $x := m_W^2/m_t^2$.

Le carré de l'élément de matrice prend donc la forme finale suivante :

$$\begin{aligned}\overline{|M|^2} &= \frac{g^2}{2}|V_{tb}|^2\frac{m_t^2}{2}\left[1 - x + \frac{m_t^2}{m_W^2}(1 + x)(1 - x)\right] \\ &= \frac{g^2}{2}|V_{tb}|^2\frac{m_t^2}{2}\frac{1 - x}{x}[x + (1 + x)] \\ &= \frac{g^2}{4m_W^2}|V_{tb}|^2 m_t^4(1 - x)(1 + 2x) .\end{aligned}$$

Notez que $\overline{|M|^2}$ est une constante.

Exercice 1e)

L'expression générale s'écrit

$$\Gamma(t \to bW^+) = \frac{1}{F}\int \overline{|M|^2} dPS_{1\to 2} \,,$$

avec $F = 2E_t$. Puisque $\overline{|M|^2}$ est une constante, la largeur dans le référentiel où le quark top est au repos est donnée par

$$\Gamma(t \to bW^+) = \frac{1}{2m_t}\overline{|M|^2}\int dPS_{1\to 2} \,,$$

Exercice 1f)

L'espace de phase est donné par

$$\begin{aligned}
\int dPS_{1\to 2} &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1}\frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2}\delta^{(4)}(p_1+p_2-p) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int d^4p_1\delta_+(p_1^2)\frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2}\delta^{(4)}(p_1+p_2-p) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int d^4p_1\delta_+((p-p_2)^2)\frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} = \frac{1}{4\pi^2}\int \delta_+(m_t^2+m_W^2-2m_tE_2)\frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2}\,.
\end{aligned}$$

En utilisant

$$\begin{aligned}
\delta_+(m_t^2+m_W^2-2m_tE_2) &= \frac{1}{2m_t}\delta_+\left(\frac{m_t^2+m_W^2}{2m_t}-E_2\right)\,, \\
d^3\vec{p}_2 &= 4\pi|\vec{p}_2|^2d|\vec{p}_2| = 4\pi|\vec{p}_2|E_2dE_2 \qquad \text{car} \quad |\vec{p}_2|d|\vec{p}_2| = E_2dE_2\,, \\
\frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2} &= 2\pi|\vec{p}_2|dE_2\,,
\end{aligned}$$

l'espace de phase prend la forme

$$\int dPS_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi m_t}|\vec{p}_2| = \frac{1}{4\pi m_t}|\vec{p}_1|$$

car $\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}=0$ et donc $\vec{p}_2=-\vec{p}_1$.

Notez que ce résultat est essentiellement donné dans le PDG booklet (Chap. 46, Kinematics).

Finalement, il faut évaluer $|\vec{p}_1|$:

$$|\vec{p}_1| = E_1 = \frac{p\cdot p_1}{m_t} \overset{d)}{=} \frac{m_t}{2}(1-x) \qquad \text{avec} \quad x = \frac{m_W^2}{m_t^2}\,,$$

et le résultat final pour l'espace de phase s'écrit

$$\int dPS_{1\to 2} = \frac{1}{8\pi}(1-x)\,.$$

<u>Calcul alternatif :</u>

$$\begin{aligned}
\int dPS_{1\to 2} &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-p) \qquad \text{avec} \quad p=(m_t,\vec{0})^T \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_1}\frac{d^3\vec{p}_2}{2E_2}\delta(E_1+E_2-m_t)\,\delta^{(3)}(\vec{p}_1+\vec{p}_2) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{4}\int \frac{d^3\vec{p}_1}{E_1E_2}\delta(E_1+E_2-m_t) \qquad \text{avec} \quad E_1=|\vec{p}_1|\,, \vec{p}_2=-\vec{p}_1 \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{4\pi|\vec{p}_1|^2d|\vec{p}_1|}{|\vec{p}_1|E_2}\delta(|\vec{p}_1|+E_2-m_t) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{|\vec{p}_1|d|\vec{p}_1|}{E_2}\delta(|\vec{p}_1|+E_2-m_t)\,.
\end{aligned}$$

Pour évaluer la distribution delta il faut prendre en compte que E_2 est une fonction de $|\vec{p}_1|$:

$$E_2 = \sqrt{m_W^2 + \vec{p}_2^2} = \sqrt{m_W^2 + \vec{p}_1^2}\,.$$

Pour cette raison, c'est plus facile d'intégrer directement sur l'argument de la distribution delta :

$$d|\vec{p}_1| = \frac{d|\vec{p}_1|}{d(|\vec{p}_1| + E_2 - m_t)} d(|\vec{p}_1| + E_2 - m_t)\,.$$

L'inverse du Jacobien est donné par

$$\frac{d(|\vec{p}_1| + E_2 - m_t)}{d|\vec{p}_1|} = 1 + \frac{dE_2}{d|\vec{p}_1|} = 1 + \frac{|\vec{p}_1|}{E_2} = \frac{E_2 + |\vec{p}_1}{E_2} = \frac{E_2 + E_1}{E_2} = \frac{m_t}{E_2}$$

et on obtient

$$d|\vec{p}_1| = \frac{E_2}{m_t} d(|\vec{p}_1| + E_2 - m_t)\,.$$

En injectant cette expression dans l'espace de phase donne

$$\int dPS_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi}\frac{|\vec{p}_1|}{m_t}\,.$$

Exercice 1g)

Avec les résultats précedentes :

$$\begin{aligned}
\Gamma(t \to bW^+) &= \frac{1}{16\pi m_t}[\overline{|M|^2}](1-x) \\
&= \frac{1}{16\pi m_t}\left[\frac{g^2}{4m_W^2}|V_{tb}|^2 m_t^4 (1-x)(1+2x)\right](1-x) \\
&= \frac{1}{16\pi}\frac{g^2}{4m_W^2} m_t^3 |V_{tb}|^2 (1-x)^2(1+2x)\,.
\end{aligned}$$

Pour introduire la constante de Fermi on utilise la relation

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$$

et la largeur s'écrit

$$\Gamma(t \to bW^+) = \frac{G_F}{8\pi\sqrt{2}} m_t^3 |V_{tb}|^2 (1-x)^2(1+2x)\,.$$

Exercice 1h)

Application numérique :

$$\begin{aligned}
G_F &= 1.16638 \cdot 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2}\,, \\
m_W &= 80.385\mathrm{GeV}\,, \\
m_t &= 173.5\mathrm{GeV}\,, \\
|V_{tb}| &= 0.99915\,, \\
\Gamma(t \to bW^+) &\simeq 1.51\mathrm{GeV}\,, \\
\tau &= 1/\Gamma \simeq 4.36 \cdot 10^{-25}\,s\ \simeq 1 \times 10^{-16} m\,.
\end{aligned}$$

PDG Booklet (2014) : $\Gamma = 2.0 \pm 0.5$ GeV. On a donc un accord raisonnable vu que notre calcul a été effectué à leading order.

Particularité du quark top :
Le quark top ne peut pas propager plus que $\mathcal{O}(10^{-15})$ m ce qui correspond à la distance typique d'hadronisation d'un quark. Le quark top se désintégre alors *avant* de pouvoir s'hadroniser.

Exercice 2 : La production en paire du quark top

Nous étudions dans la suite le processus $q(p_1) + \bar{q}(p_2) \to t(p_1') + \bar{t}(p_2')$ (non-polarisé) où $q = u, d, s$ est un quark léger. On va négliger la masse du quark léger et m_t désigne la masse du quark top.

a) Tracez le(s) diagramme(s) de Feynman à leading order pour l'interaction dominante en indiquant toutes les informations pertinentes et donnez l'élément de matrice M_{fi}.
b) Calculez le carré de l'élément de matrice $\overline{|M_{fi}|^2}$ (en effectuant la moyenne/somme sur les spins et couleurs des quarks à l'état initial/final). Donnez le résultat final en fonction des variables de Mandelstam s, $t_1 := t - m_t^2$ et $u_1 := u - m_t^2$.
c) Précisez l'expression pour la section efficace $d\sigma/dt$ en fonction des variables de Mandelstam.
d) Déterminez les variables de Mandelstam dans le reférentiel du CMS et donnez la section efficace $d\sigma/d\Omega^*$ en fonction de s, θ^* dans ce référentiel.
e) Utilisez le résultat en c) ou d) pour obtenir la section efficace totale $\sigma_{q\bar{q}\to t\bar{t}}(s)$.
f) Ce processus, $q\bar{q} \to t\bar{t}$, était dominant au collisionneur $p - \bar{p}$ Tevatron (contribuant environ 90% à la section efficace). Par contre, au collisionneur $p - p$ LHC il y a un autre processus partonique qui domine (avec environ 90%). Lequel ? Tracez les diagrammes de Feynman.
g) Cherchez dans le PDG booklet les rapports de branchement pour les modes de désintégration dominants $t \to \ell\nu_l b$ ($\ell = e, \mu$) et $t \to q\bar{q}b$. Quels sont ainsi les trois canaux les plus importants pour la désintégration de la paire $t\bar{t}$? Donnez les rapports de branchement.

Le calcul dans les questions a) – e) est, avec des substitutions évidentes (photon $\to$ gluon dans la voie s, $e \to g$, $m_\mu \to m_t$, facteur de couleur), idéntique au calcul du processus $e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+$ (non-polarisé, en gardant la masse du muon) effectué en TD (voir aussi Sec. 5.2.2. dans les notes de cours de Mécanique Quantique Relativiste de Benoit Clément).

Exercice 1a)
Diagramme :

On a

$$-iM_{fi} = \left[\bar{u}_{s_1'}(p_1')(-igT^a_{j'i'}\gamma^\mu)v_{s_2'}(p_2')\right]\left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{s}\right)\left[\bar{v}_{s_2}(p_2)(-igT^a_{ji}\gamma^\nu)u_{s_1}(p_1)\right]$$
$$M_{fi} = -\frac{g^2}{s}T^a_{j'i'}T^a_{ji}\left[\bar{u}_{s_1'}(p_1')\gamma^\mu v_{s_2'}(p_2')\right]\left[\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma_\mu u_{s_1}(p_1)\right]$$

avec $s = (p_1 + p_2)^2$.

Exercice 1b)

$$M_{fi}^* = \overline{M_{fi}} = -\frac{g^2}{s} T_{j'i'}^{b*} T_{ji}^{b*} \left[\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma_\nu v_{s_2}(p_2)\right] \left[\bar{v}_{s_2'}(p_2')\gamma^\nu u_{s_1'}(p_1')\right]$$
$$|M_{fi}|^2 = \frac{g^4}{s^2} T_{j'i'}^a T_{ji}^a T_{i'j'}^b T_{ij}^b \{\bar{u}_{s_1'}(p_1')\gamma^\mu v_{s_2'}(p_2')\bar{v}_{s_2'}(p_2')\gamma^\nu u_{s_1'}(p_1')\}\{\bar{v}_{s_2}(p_2)\gamma_\mu u_{s_1}(p_1)\bar{u}_{s_1}(p_1)\gamma_\nu v_{s_2}(p_2)\}$$

Dans la dernière ligne on a utilisé que $(T^b)^* = (T^b)^T$ à cause de l'Hermiteicité des générateurs : $T^b = (T^b)^\dagger$. Une somme sur $a = 1, \ldots, 8$ et $b = 1, \ldots, 8$ est sous-entendue (convention d'Einstein).

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{N_c}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{N_c}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i'=1}^{3}\sum_{j'=1}^{3}\frac{1}{2}\sum_{s_1}\frac{1}{2}\sum_{s_2}\sum_{s_1'}\sum_{s_2'}|M_{fi}|^2 = C\frac{g^4}{4s^2}\,Tr_1{}^{\mu\nu}\,Tr_{2\mu\nu}$$

avec

$$\mathrm{Tr}_1{}^{\mu\nu} = \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu(\not{p}_2' - m_t)\gamma^\nu(\not{p}_1' + m_t)\} = 4(p_2'^{\mu}p_1'^{\nu} + p_1'^{\mu}p_2'^{\nu} - g^{\mu\nu}p_1'\cdot p_2') - 4m_t^2 g^{\mu\nu}$$
$$\mathrm{Tr}_{2\mu\nu} = \mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}_2\} = 4(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu} - g_{\mu\nu}p_1\cdot p_2)\,.$$

Ici, C est le facteur de couleur :

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{N_c}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{N_c}\sum_{j=1}^{3}\sum_{i'=1}^{3}\sum_{j'=1}^{3} T_{j'i'}^a T_{ji}^a T_{i'j'}^b T_{ij}^b \\
&= \frac{1}{N_c}\frac{1}{N_c}[\sum_{i',j'} T_{j'i'}^a T_{i'j'}^b][\sum_{i,j} T_{ji}^a T_{ij}^b] \\
&= \frac{1}{N_c}\frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}(T^aT^b)\mathrm{Tr}(T^aT^b)
\end{aligned}$$

En utilisant $Tr(T^aT^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ et avec une somme sur a et b sous-entendu, on trouve :

$$C = \frac{1}{2N_c}\frac{1}{2N_c}\sum_{a=1}^{N_c^2-1}\delta^{aa} = \frac{1}{2N_c}\frac{N_c^2-1}{2N_c} = \frac{1}{2N_c}C_F\,.$$

Notez : $N_c^2 - 1 = 8$ et $C_F = (N_c^2-1)/(2N_c) = 4/3$ est le Casimir de la représentation fondamentale.

On trouve finalement

$$\begin{aligned}
\overline{|M_{fi}|^2} &= C\frac{g^4}{4s^2}16(\underbrace{2p_1\cdot p_1' p_2\cdot p_2'}_{=\frac{1}{2}t_1^2} + \underbrace{2p_1\cdot p_2' p_2\cdot p_1'}_{=\frac{1}{2}u_1^2} + \underbrace{2p_1\cdot p_2}_{=s} m_t^2) \\
&= \frac{C_F}{N_c}\frac{g^4}{s^2}\left[u_1^2 + t_1^2 + 2sm_t^2\right]
\end{aligned}$$

avec les variables de Mandelstam

$$\begin{aligned}
s &= (p_1+p_2)^2 = (p_1'+p_2')^2 = 2p_1\cdot p_2 = 2p_1'\cdot p_2' + 2m_t^2\,, \\
t_1 &= t - m_t^2 = (p_1-p_1')^2 - m_t^2 = (p_2-p_2')^2 - m_t^2 = -2p_1\cdot p_1' = -2p_2\cdot p_2'\,, \\
u_1 &= u - m_t^2 = (p_1-p_2')^2 - m_t^2 = (p_2-p_1')^2 - m_t^2 = -2p_1\cdot p_2' = -2p_2\cdot p_1'\,, \\
s &+ t_1 + u_1 = 0\,.
\end{aligned}$$

Exercice 1c)
On a

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dt} &= \frac{1}{16\pi\lambda_i}\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{16\pi s^2}\overline{|M_{fi}|^2} \\
&= \frac{C_F}{N_c}\frac{g^4}{16\pi s^4}\left[u_1^2 + t_1^2 + 2sm_t^2\right] \\
&= \frac{C_F}{N_c}\frac{(4\pi\alpha_s)^2}{16\pi s^4}\left[(s+t_1)^2 + t_1^2 + 2sm_t^2\right] = \frac{d\sigma}{dt_1}
\end{aligned}
$$

Exercice 1d)
Dans le réferentiel du CMS :

$$
\begin{aligned}
&p_1 = (E, 0, 0, E)\,,\; p_2 = (E, 0, 0, -E)\,,\; E = \frac{\sqrt{s}}{2}\,, \\
&p_1' = (E, p_f \sin\theta^*, 0, p_f\cos\theta^*)\,,\; p_2' = (E, -p_f\sin\theta^*, 0, -p_f\cos\theta^*)\,,
\end{aligned}
$$

avec

$$
p_f = \frac{\sqrt{\lambda(s, m_t^2, m_t^2)}}{2\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{s}}{2}\beta_f = E\beta_f \qquad \text{avec} \quad \beta_f = \sqrt{1 - \frac{4m_t^2}{s}}\,.
$$

On trouve alors

$$
t_1 = -\frac{s}{2}(1 - \beta_f\cos\theta^*)\,,\; u_1 = -\frac{s}{2}(1 + \beta_f\cos\theta^*)\,.
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega^*} &= \frac{d\sigma}{dt_1}\frac{dt_1}{2\pi d\cos\theta^*} = \frac{s}{4\pi}\beta_f\frac{d\sigma}{dt_1} \\
&= \frac{s}{4\pi}\beta_f\frac{C_F}{N_c}\frac{(4\pi\alpha_s)^2}{16\pi s^4}\left[u_1^2 + t_1^2 + 2sm_t^2\right] \\
&= \frac{C_F}{2N_c}\frac{\alpha_s^2}{4s}\left[1 + \cos^2\theta^* + \frac{4m_t^2}{s}(1 - \cos^2\theta^*)\right]\beta_f\,.
\end{aligned}
$$

Exercice 1e)

$$
\begin{aligned}
\sigma_{q\bar{q}\to t\bar{t}}(s) &= \int_{t_{1-}}^{t_{1+}} dt_1\,\frac{d\sigma}{dt_1}\,, \quad t_{1-} = -\frac{s}{2}(1 + \beta_f)\,,\; t_{1+} = -\frac{s}{2}(1 - \beta_f) \\
&= \frac{C_F}{N_c}\alpha_s^2\frac{\pi}{s^4}\int_{t_{1-}}^{t_{1+}} dt_1\left[s^2 + 2sm_t^2 + 2st_1 + 2t_1^2\right] \\
&= \frac{C_F}{N_c}\alpha_s^2\frac{\pi}{s^4}\left[(s^2 + 2sm_t^2)(t_{1+} - t_{1-}) + s(t_{1+}^2 - t_{1-}^2) + \frac{2}{3}(t_{1+}^3 - t_{1-}^3)\right]\,.
\end{aligned}
$$

Avec

$$\begin{aligned}
&t_{1+} - t_{1-} = s\beta_f \, , \\
&t_{1+}^2 - t_{1-}^2 = (t_{1+} - t_{1-})(t_{1+} + t_{1-}) = -s^2\beta_f \, , \\
&t_{1+}^3 - t_{1-}^3 = (t_{1+} - t_{1-})(t_{1+}^2 + t_{1+}t_{1-} + t_{1-}^2) = s^3\beta_f \left(1 - \frac{m_t^2}{s}\right) \, ,
\end{aligned}$$

on trouve facilement

$$\sigma_{q\bar{q}\to t\bar{t}}(s) = \frac{C_F}{2N_c}\frac{4\pi\alpha_s^2}{3s}\left(1 + \frac{2m_t^2}{s}\right)\beta_f \, .$$

Alternativement (probablement plus facile)

$$\begin{aligned}
\sigma_{q\bar{q}\to t\bar{t}}(s) &= 2\pi\int_{-1}^{1} d\cos\theta^* \frac{d\sigma}{d\Omega^*} \\
&= 2\pi\frac{C_F}{2N_c}\frac{\alpha_s^2}{4s}\beta_f \left[\underbrace{\int_{-1}^{1} d\cos\theta^*(1+\cos^2\theta^*)}_{=\frac{8}{3}} + \frac{4m_t^2}{s}\underbrace{\int_{-1}^{1} d\cos\theta^*(1-\cos^2\theta^*)}_{=\frac{4}{3}}\right] \\
&= \frac{C_F}{2N_c}\frac{4\pi\alpha_s^2}{3s}\left(1 + \frac{2m_t^2}{s}\right)\beta_f \, .
\end{aligned}$$

Exercice 1f)
Au LHC le processus $gg \to t\bar{t}$ est dominant. Il y a trois diagrammes de Feynman qui contribuent à leading order (voie-t, voie-u et voie-s avec vertex à 3 gluons :

Exercice 1g)
Avec
— $BR(t \to q\bar{q}'b) \simeq 0.68$
— $BR(t \to \ell\nu_\ell b) \simeq 0.32$ (somme sur tous les leptons)

les trois canaux de désintégration les plus importants sont
— $t\bar{t} \to W^+bW^-\bar{b} \to q\bar{q}'bq''\bar{q}'''\bar{b}$ (45.7 %) : ”all jets”
— $t\bar{t} \to W^+bW^-\bar{b} \to q\bar{q}'b\ell^-\bar{n}u_\ell\bar{b} + \ell^+\nu_\ell bq''\bar{q}'''\bar{b}$ (43.8 %) : ”leptons + jets”
— $t\bar{t} \to W^+bW^-\bar{b} \to \ell^+\nu_\ell b\ell^-\bar{n}u_\ell\bar{b}$ (10.5 %) : ” dilepton channel”