

Examen de Physique des Particules 1 — Corrigé

Particle Physics Booklet et notes de cours/TD autorisés

Exercice 1 : La diffusion $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ polarisée

Nous étudions dans la suite le processus $e^-(p_1, h_1) + e^+(p_2, h_2) \rightarrow \gamma^* \rightarrow q(p'_1) + \bar{q}(p'_2)$.

Les fermions dans l'état initial sont polarisés avec une hélicité $h_1, h_2 = \text{fixe}$ ($h_1, h_2 \in \{-1, +1\}$). Par conséquent, aucune somme/moyenne sur les spins initiaux n'est effectuée. Par contre, les quarks ne sont pas polarisés et il faut effectuer une somme sur les spins dans l'état final.

On utilise pour un (anti-)fermion polarisé avec impulsion p , masse m et hélicité fixe $h = +1, -1$ les opérateurs de projection suivants :

$$u(p, h)\bar{u}(p, h) = (\not{p} + m)\frac{1}{2}(1 - h\gamma_5), \quad (1)$$

$$v(p, h)\bar{v}(p, h) = (\not{p} - m)\frac{1}{2}(1 + h\gamma_5). \quad (2)$$

On retrouve les relations de fermeture usuelles lorsqu'on somme sur h :

$$\sum_h u(p, h)\bar{u}(p, h) = (\not{p} + m), \quad (3)$$

$$\sum_h v(p, h)\bar{v}(p, h) = (\not{p} - m). \quad (4)$$

Pour simplifier les calculs on **négligera les masses des électrons et quarks**.

- Tracez le(s) diagramme(s) de Feynman (à leading order) en indiquant toutes les informations pertinentes et donnez l'élément de matrice M_{fi} .
 - Calculez le carré de l'élément de matrice $|M_{fi}|^2$ (en effectuant la somme sur les spins et couleurs des quarks) en fonction des variables de Mandelstam et des hélicités h_1, h_2 .
 - Précisez alors la section efficace $d\sigma/dt$ en fonction de s, t, h_1, h_2 .
 - Déterminez les variables de Mandelstam dans le référentiel du CMS et donnez la section efficace $d\sigma/d\Omega^*$ en fonction de s, θ^*, h_1, h_2 dans ce référentiel.
 - Utilisez le résultat en c) ou d) pour obtenir la section efficace totale $\sigma(h_1, h_2)$.
 - Comment peut-on utiliser le résultat en e) pour obtenir la section efficace non-polarisée σ ? Est-ce que le résultat pour σ ainsi obtenu correspond à vos attentes? Comparez avec le processus $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$.
 - Trouvez la section efficace pour une expérience où 80% des électrons ont une hélicité gauche ($h_{e^-} = -1$), 20% une hélicité droite ($h_{e^-} = +1$), 60% des positrons une hélicité droite ($h_{e^+} = +1$) et 40% une hélicité gauche ($h_{e^+} = -1$).
-

Exercice 1a)

Diagramme :

On a

$$-iM_{fi} = [\bar{u}_{s'_1}(p'_1)iee_q\gamma^\mu v_{s'_2}(p'_2)] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{s} \right) [\bar{v}_{h_2}(p_2)ie\gamma^\nu u_{h_1}(p_1)]$$

$$M_{fi} = -\frac{e^2 e_q}{s} [\bar{u}_{s'_1}(p'_1)\gamma^\mu v_{s'_2}(p'_2)] [\bar{v}_{h_2}(p_2)\gamma_\mu u_{h_1}(p_1)]$$

avec $s = (p_1 + p_2)^2$.**Exercice 1b)**

$$M_{fi}^* = \overline{M_{fi}} = -\frac{e^2 e_q}{s} [\bar{u}_{h_1}(p_1)\gamma_\nu v_{h_2}(p_2)] [\bar{v}_{s'_2}(p'_2)\gamma^\nu u_{s'_1}(p'_1)]$$

$$|M_{fi}|^2 = \frac{e^4 e_q^2}{s^2} \{ \bar{u}_{s'_1}(p'_1)\gamma^\mu v_{s'_2}(p'_2)\bar{v}_{s'_2}(p'_2)\gamma^\nu u_{s'_1}(p'_1) \} \{ \bar{v}_{h_2}(p_2)\gamma_\mu u_{h_1}(p_1)\bar{u}_{h_1}(p_1)\gamma_\nu v_{h_2}(p_2) \}$$

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \sum_{\text{couleurs } s'_1, s'_2} |M_{fi}|^2 = N_c \frac{e^4 e_q^2}{4s^2} \text{Tr}_1^{\mu\nu} \text{Tr}_{2\mu\nu}$$

avec

$$\text{Tr}_1^{\mu\nu} = \text{Tr}\{\gamma^\mu \not{p}'_2 \gamma^\nu \not{p}'_1\} = 4(p_2'^\mu p_1'^\nu + p_1'^\mu p_2'^\nu - g^{\mu\nu} p_1' \cdot p_2')$$

$$\text{Tr}_{2\mu\nu} = \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_1 (1 - h_1 \gamma_5) \gamma_\nu \not{p}_2 (1 + h_2 \gamma_5)\}.$$

On a

$$\text{Tr}_{2\mu\nu} = \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2\} - h_1 \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_5 \gamma_\nu \not{p}_2\} + h_2 \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_5\} - h_1 h_2 \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_5 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_5\}$$

$$=: \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(1)} - h_1 \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(2)} + h_2 \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(3)} - h_1 h_2 \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(4)}$$

En utilisant $\gamma_5 \gamma_\alpha = -\gamma_\alpha \gamma_5$, $\gamma_5^2 = \mathbf{1}$ on voit facilement que $\text{Tr}_{2\mu\nu}^{(4)} = \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(1)}$, $\text{Tr}_{2\mu\nu}^{(3)} = \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(2)}$. Par conséquent,

$$\text{Tr}_{2\mu\nu} = (1 - h_1 h_2) \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(1)} + (h_2 - h_1) \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(2)}.$$

La trace $\text{Tr}_{2\mu\nu}^{(2)}$ est anti-symétrique sous l'échange de $\mu \leftrightarrow \nu$,

$$\text{Tr}_{2\mu\nu}^{(2)} = \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma_5\} = -4i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta = -\text{Tr}_{2\nu\mu}^{(2)},$$

tandis que Tr_1 est symétrique tel que $\text{Tr}_1^{\mu\nu} \text{Tr}_{2\mu\nu}^{(2)} = 0$.

La trace $\text{Tr}_2^{(1)}$ est bien connue du cas non-polarisé :

$$\text{Tr}_2^{(1)} = \text{Tr}\{\gamma_\mu \not{p}'_1 \gamma_\nu \not{p}'_2\} = 4(p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu} - g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2).$$

On trouve finalement

$$\begin{aligned} \overline{|M_{fi}|^2}(h_1, h_2) &= (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{e^4}{4s^2} \text{Tr}_1^{\mu\nu} \text{Tr}_2^{(1)} = (1 - h_1 h_2) \overline{|M_{fi}|^2}(\text{non-pol}) \\ &= (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{4e^4}{s^2} \left(\underbrace{2p_1 \cdot p'_1 p_2 \cdot p'_2}_{=\frac{1}{2}t^2} + \underbrace{2p_1 \cdot p'_2 p_2 \cdot p'_1}_{=\frac{1}{2}u^2} \right) \\ &= (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{2e^4}{s^2} [t^2 + (s+t)^2] \end{aligned}$$

avec les variables de Mandelstam

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p'_1 + p'_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 = 2p'_1 \cdot p'_2, \\ t &= (p_1 - p'_1)^2 = (p_2 - p'_2)^2 = -2p_1 \cdot p'_1 = -2p_2 \cdot p'_2, \\ u &= (p_1 - p'_2)^2 = (p_2 - p'_1)^2 = -2p_1 \cdot p'_2 = -2p_2 \cdot p'_1, \\ s + t + u &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 1c)

On a (en négligeant les masses des électrons et muons)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}(h_1, h_2) &= \frac{1}{16\pi s^2} \overline{|M_{fi}|^2}(h_1, h_2) = (1 - h_1 h_2) \frac{d\sigma^{\text{non-pol}}}{dt} \\ &= (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{2\pi\alpha^2}{s^4} [t^2 + (s+t)^2]. \end{aligned}$$

Exercice 1d)

Dans le référentiel du CMS (en négligeant les masses des électrons et muons) :

$$\begin{aligned} p_1 &= (E, 0, 0, E), \quad p_2 = (E, 0, 0, -E), \quad E = \frac{\sqrt{s}}{2}, \\ p'_1 &= (E, E \sin \theta^*, 0, E \cos \theta^*), \quad p'_2 = (E, -E \sin \theta^*, 0, -E \cos \theta^*), \\ t &= -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta^*), \quad u = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta^*). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega^*} &= \frac{d\sigma}{dt} \frac{dt}{2\pi d \cos \theta^*} = \frac{s}{4\pi} \frac{d\sigma}{dt} \\ &= (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{\alpha^2}{4s} (1 + \cos^2 \theta^*). \end{aligned}$$

Exercice 1e)

$$\begin{aligned}
 \sigma(h_1, h_2) &= \int_{t_-}^{t_+} dt \frac{d\sigma}{dt}(h_1, h_2), \quad t_- = -s, t_+ = 0 \\
 &= (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{2\pi\alpha^2}{s^4} \underbrace{\int_{-s}^0 dt (t^2 + (s+t)^2)}_{=\frac{2}{3}s^3} = (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \\
 &= (1 - h_1 h_2) \sigma_0,
 \end{aligned}$$

avec la section efficace non-polarisée

$$\sigma_0 = N_c e_q^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3s}.$$

Alternativement

$$\begin{aligned}
 \sigma(h_1, h_2) &= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta^* \frac{d\sigma}{d\Omega^*} = (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{\pi\alpha^2}{2s} \underbrace{\int_{-1}^1 d\cos\theta^* (1 + \cos^2\theta^*)}_{=\frac{8}{3}} \\
 &= (1 - h_1 h_2) N_c e_q^2 \frac{4\pi\alpha^2}{3s} = (1 - h_1 h_2) \sigma_0.
 \end{aligned}$$

Exercice 1f)

Pour obtenir la section efficace non-polarisée il faut moyenner sur les hélicités :

$$\sigma = \frac{1}{4} \sum_{h_1, h_2} \sigma(h_1, h_2) = \frac{1}{4} \left[\underbrace{\sigma(1, 1)}_{=0} + \underbrace{\sigma(-1, -1)}_{=0} + \underbrace{\sigma(1, -1)}_{=2\sigma_0} + \underbrace{\sigma(-1, 1)}_{=2\sigma_0} \right] = \sigma_0$$

comme attendu !

Attention : $h_1, h_2 \in \{-1, 1\}$! On peut dans cet exemple travailler avec des polarisations effectives $h_1 = h_2 = 0$ pour obtenir le résultat non-polarisé. Par contre, c'est seulement possible parce que $\sigma(h_1, h_2) = (1 - h_1 h_2) \sigma(\text{unpol})$ avec un facteur de polarisation qui multiplie la section efficace non-polarisée. Dans d'autres processus $\sigma(h_1, h_2)$ a une structure plus compliquée et une telle démarche n'est pas possible.

Exercice 1g)

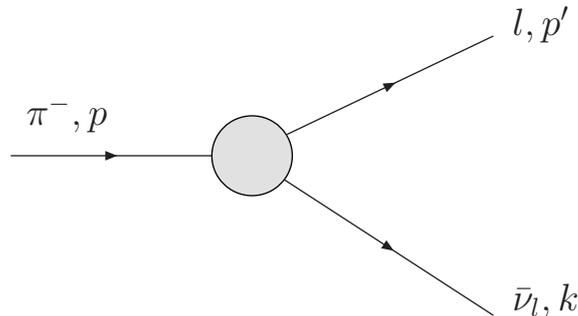
On trouve

$$\begin{aligned} \sigma &= 20\% * 60\% \underbrace{\sigma(1, 1)}_{=0} + 80\% * 40\% \underbrace{\sigma(-1, -1)}_{=0} + 20\% * 40\% \underbrace{\sigma(1, -1)}_{2\sigma_0} + 80\% * 60\% \underbrace{\sigma(-1, 1)}_{=2\sigma_0} \\ &= 1.12\sigma_0. \end{aligned}$$

Attention : $h_1, h_2 \in \{-1, 1\}$! On peut dans cet exemple travailler avec des polarisations effectives $h_1 = 0.8(-1) + 0.2 * 1 = -0.6$, $h_2 = 0.6 * 1 + 0.4(-1) = 0.2$ pour obtenir le résultat cherché. Par contre, c'est seulement possible parce que $\sigma(h_1, h_2) = (1 - h_1 h_2)\sigma(\text{unpol})$ avec un facteur de polarisation qui multiplie la section efficace non-polarisée. Dans d'autres processus $\sigma(h_1, h_2)$ a une structure plus compliquée et une telle démarche n'est pas possible.

Exercice 2 : Désintégration du pion chargé

On considère la désintégration du pion chargé en leptons. L'amplitude de Feynman associée à ce processus est de la forme : $|\mathcal{M}_{fi}|^2 = Ak \cdot p'$, où A est une constante et k et p' sont les quadri-impulsions sortantes (voir schéma).



- Précisez tous les modes de désintégration du π^- à l'ordre le plus bas.
- Rappelez la formule de l'espace de phase $d\Phi_2$ pour deux particules.
- Donnez l'expression de la largeur partielle différentielle de désintégration $d\Gamma_{\pi^- \rightarrow l \bar{\nu}_l}$.
- Démontrez que pour un quadri-vecteur $k = (k^0, \vec{k})$ avec $k^2 = 0$:

$$\int \frac{1}{2E} d^3\vec{k} = \int d^4k \delta(k^2) \theta(k^0) \equiv \int d^4k \delta_+(k^2)$$

avec $E \equiv \omega = |\vec{k}|$.

- Déterminez les largeurs partielles de $\Gamma_{\pi^- \rightarrow l \bar{\nu}_l}$, en fonction de A et des masses du pion et du lepton. Vous pourrez utiliser le résultat de la question précédente pour faire disparaître l'énergie et l'impulsion du neutrino de l'expression obtenue en (b).
- En déduire analytiquement et numériquement les rapports d'embranchement du pion en muon et en électron, en supposant que la constante A est identique pour les deux désintégrations.
- Comparez aux valeurs expérimentales. D'où vient la différence observée ?

Exercice 2a)

Les modes de désintégration du pions sont limités par la cinématique. Le pion étant le hadron chargé le plus léger seule l'interaction faible permet sa désintégration. Finalement, les seules désintégrations accessibles cinématiquement sont $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ et $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$.

Exercice 2b)

Pour deux particules finales d'impulsions p' et k :

$$d\phi_2 = \frac{(2\pi)^4 d^3\vec{p}' d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_{p'} (2\pi)^3 2E_k} = \frac{d^3\vec{p}' d^3\vec{k}}{16\pi^2 E_l E_\nu}$$

Exercice 2c)

La largeur partielle de désintégration dans le référentiel au repos du pion, est :

$$d\Gamma_{\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l} = \frac{1}{2m_\pi} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\phi_n = \frac{A}{32\pi^2 m_\pi} \frac{k \cdot p'}{E_l E_\nu} \delta^{(4)}(p - p' - k) d^3\vec{p}' d^3\vec{k}$$

Les réponses aux questions 4.b et 4.c figurent dans le PDG, paragraph 46 "Kinematics".

Exercice 2d)

$$\begin{aligned} \int dk \delta_+(k^2) &= \int dk^0 d^3\vec{k} \delta_+(k_0 k^0 - |\vec{k}|^2) \\ &= \int dk^0 d^3\vec{k} \delta_+(k_0 k^0 - E^2) \\ &= \int dk^0 d^3\vec{k} \frac{\delta(k_0 - E)}{2E} \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{2E} \end{aligned}$$

On utilise ici la propriété de la distribution de Dirac :

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - a_i)}{|f'(a_i)|}$$

où a_i désigne les zéros de la fonction f . Dans le cas présent :

$$\delta_+(k_0 k^0 - E^2) = \left(\frac{\delta(k_0 - E)}{2E} + \frac{\delta(k_0 + E)}{2E} \right) \theta(k^0) = \frac{\delta(k_0 - E)}{2E},$$

la distribution de Heaviside $\theta(k_0)$ supprimant la contribution négative $k_0 = -E$.

Exercice 2e)

En utilisant le résultat précédent on procède à l'intégration de la largeur différentielle :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l} = \Gamma_l &= \int d\Gamma_{\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l} \\
&= \frac{A}{32\pi^2 m_\pi} \int \frac{k \cdot p'}{E_l E_\nu} \delta^{(4)}(p - p' - k) d^3 \vec{p}' d^3 \vec{k} \\
&= \frac{A}{16\pi^2 m_\pi} \int \frac{k \cdot p'}{E_l} \delta^{(4)}(p - p' - k) \delta_+(k^2) d^3 \vec{p}' d^4 k \\
&= \frac{A}{16\pi^2 m_\pi} \int \frac{(p - p') \cdot p'}{E_l} \delta_+((p - p')^2)
\end{aligned}$$

Dans le référentiel au repos du pion, les produits de 4-impulsion donnent :

$$pp' = m_\pi E_l \quad , \quad (p - p') \cdot p' = m_\pi E_l - m_l^2 \quad , \quad (p - p')^2 = m_l^2 + m_\pi^2 - 2m_\pi E_l$$

L'élément différentiel $d^3 \vec{p}'$, se réécrit en coordonnées sphériques :

$$d^3 \vec{p}' = |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega = |\vec{p}'| E_\mu dE_\mu$$

avec $|\vec{p}'|^2 = E_\mu^2 - m^2 \rightarrow |\vec{p}'| d|\vec{p}'| = E_\mu dE_\mu$.

Finalement, l'expression de la largeur devient :

$$\begin{aligned}
\Gamma_l &= \frac{A}{16\pi^2 m_\pi} \int (E_l m_\pi - m_l^2) (E_l^2 - m_l^2)^{\frac{1}{2}} \delta_+(m_\pi^2 + m_l^2 - 2E_l m_\pi) dE_l d\Omega \\
&= \frac{A}{4\pi m_\pi} \int (E_l m_\pi - m_l^2) (E_l^2 - m_l^2)^{\frac{1}{2}} \delta_+(m_\pi^2 + m_l^2 - 2E_l m_\pi) dE_l \\
&= \frac{A}{4\pi m_\pi} \int (E_l m_\pi - m_l^2) (E_l^2 - m_l^2)^{\frac{1}{2}} \delta_+ \left(\frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2m_\pi} - E_l \right) \frac{1}{2m_\pi} dE_l \\
&= \frac{A}{8\pi m_\pi^2} \left(\frac{m_\pi^2 + m_l^2}{2} - m_l^2 \right) \left(\frac{m_\pi^4 + m_l^4 + 2m_\pi^2 m_l^2}{4m_\pi^2} - m_l^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{A}{8\pi m_\pi^2} \frac{(m_\pi^2 - m_l^2)^2}{4m_\pi}
\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\Gamma_l = \frac{Am_\pi}{32\pi} \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right)^2$$

Exercice 2f)

Puisque les seuls modes de désintégration du pion sont $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ et $\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$, les rapports d'embranchement sont donnés par :

$$BR_{\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu} = \frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_\mu + \Gamma_e} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 + (m_\pi^2 - m_e^2)^2}$$

de même :

$$BR_{\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e} = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_\mu + \Gamma_e} = \frac{(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2 + (m_\pi^2 - m_e^2)^2}$$

L'application numérique donne :

$$BR_{\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu} = 0.1542 \quad , \quad BR_{\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e} = 0.8458$$

Exercice 2g)

Dans le PDG, on trouve :

$$BR_{\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu} = 0.999877 \quad , \quad BR_{\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e} = 0.000123$$

L'hypothèse que A ne dépend pas de la particule est manifestement fautive. Pour cet exercice on ne s'est intéressé qu'à la partie cinématique de la désintégration, qui favorise l'écart de masse le plus grand entre particules initiales et finales. Cependant, la désintégration en électron est défavorisée par la violation de parité des interactions faibles : la désintégration du π^- conduit à un lepton chargé d'hélicité droite. Plus la particule est légère, plus son hélicité équivaut à sa chiralité, or l'interaction faible par courant chargé ne se couple qu'aux fermions gauches. On pourrait dire que la désintégration du pion en muons est *moins interdite* que celle-ci en électrons.

De fait on montre que A dépend de la masse du fermion. En comparant les rapports $\frac{BR_{\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu}}{BR_{\pi^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e}} = \frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_e}$, il vient :

$$\frac{\left(\frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_e}\right)_{mes.}}{\left(\frac{\Gamma_\mu}{\Gamma_e}\right)_{cin.}} \approx \left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)^2$$

Soit $A_\mu \propto m_\mu^2$ et $A_e \propto m_e^2$.

Information supplémentaire (hors concurrence)

Plus précisément l'élément de matrice pour la désintégration du pion chargé est donné par :

$$-iM_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \bar{u}(p') (\not{p}' + \not{k}) (1 - \gamma_5) v(k),$$

où $G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ est la constante de Fermi et $f_\pi = 130 \text{ MeV}$ la constante de désintégration du pion. (Attention : selon les conventions f_π peut être multiplié ou divisé par $\sqrt{2}$.) En utilisant l'équation de Dirac $\bar{u}(p') \not{p}' = m_l \bar{u}(p')$, $\not{k} v(k) = 0$, l'amplitude peut encore être simplifiée :

$$-iM_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi m_l \bar{u}(p') (1 - \gamma_5) v(k).$$

On peut maintenant calculer le carré de l'amplitude :

$$\begin{aligned} \overline{|M_{fi}|^2} &= \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 m_l^2 \text{Tr}[(\not{p}' + m_l)(1 - \gamma_5) \not{k} (1 + \gamma_5)] \\ &= \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 m_l^2 \text{Tr}[(\not{p}' + m_l) \not{k} (1 + \gamma_5)^2] \\ &= G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 \text{Tr}[(\not{p}' + m_l) \not{k} (1 + \gamma_5)] \\ &= \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 m_l^2 \text{Tr}[\not{p}' \not{k}] = 4G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 k \cdot p'. \end{aligned}$$

On trouve donc bien la forme $\overline{|M_{fi}|^2} = Ak \cdot p'$ avec $A = 4G_F^2 f_\pi^2 m_l^2 \propto m_l^2$.