# Examen de Physique des Particules 1 — Corrigé
## Particle Physics Booklet et notes de cours/TD autorisés

---

**Exercice 1 : La diffusion Bhabha**

Nous étudions dans la suite le processus Bhabha $e^-(p_1) + e^+(p_2) \to \gamma^* \to e^-(p_1') + e^+(p_2')$ pour des électrons non-polarisés et en **négligeant** la masse de l'électron.

a) Dans quelles conditions peut-on négliger la masse de l'électron ainsi que l'échange du boson $Z$ ?

L'amplitude de diffusion prend la forme

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s - \mathcal{M}_t \,, \tag{1}$$

$$\mathcal{M}_s = \frac{e^2}{s}[\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)][\bar{u}(p_1')\gamma_\mu v(p_2')] \,, \tag{2}$$

$$\mathcal{M}_t = \frac{e^2}{t}[\bar{u}(p_1')\gamma^\nu u(p_1)][\bar{v}(p_2)\gamma_\nu v(p_2')] \,. \tag{3}$$

b) Tracez les diagrammes de Feynman (à leading order) en indiquant toutes les informations pertinentes et justifiez le signe relatif entre les amplitudes $\mathcal{M}_s$ et $\mathcal{M}_t$.

c) Donnez la définition de l'élément de matrice $\overline{|\mathcal{M}|}^2$ et calculez le en fonction des variables de Mandelstam $s, t, u$. Utilisez $\sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_t|^2 = \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}_s|^2 (s \leftrightarrow t)$.

d) Donnez la section efficace différentielle $d\sigma/d\Omega^*$ en fonction de l'angle de diffusion $\cos\theta^*$ dans le référentiel du centre de masse.

---

**Exercice 1a)**
On peut négliger la masse de l'électron et l'échange du boson $Z$ si $m_e \ll \sqrt{s} \ll m_Z$.

**Exercice 1b)**
Diagrammes :

En tracant le carré des amplitudes on voit que , $\mathcal{M}_s\mathcal{M}_s^*$ et $\mathcal{M}_t\mathcal{M}_t^*$ ont deux lignes fermioniques fermées. Lorsque les termes d'interference $\mathcal{M}_s\mathcal{M}_t^*$ et $\mathcal{M}_t\mathcal{M}_s^*$ ont une ligne fermionique fermée. Il y a donc un signe relative $(-1)$ entre les deux ampitudes.

**Exercice 1c)**
On a

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_1',s_2'}|\mathcal{M}|^2$$

avec

$$|\mathcal{M}|^2 = |\mathcal{M}_s - \mathcal{M}_t|^2 = |\mathcal{M}_s|^2 + |\mathcal{M}_t|^2 - 2\Re[\mathcal{M}_s\mathcal{M}_t^*]\,.$$

Les variables de Mandelstam sont définies comme suivant :

$$\begin{aligned}
s &= (p_1+p_2)^2 = 2p_1\cdot p_2 = (p_1'+p_2')^2 = 2p_1'\cdot p_2'\,,\\
t &= (p_1-p_1')^2 = -2p_1\cdot p_1' = (p_2-p_2')^2 = -2p_2\cdot p_2'\,,\\
u &= (p_1-p_2')^2 = -2p_1\cdot p_2' = (p_2-p_1')^2 = -2p_2\cdot p_1'\,.
\end{aligned}$$

Pour la voie 's' on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_s|^2 &= \frac{e^4}{s^2}\sum_{\text{spins}}[\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu v(p_2)][\bar{u}(p_1')\gamma_\mu v(p_2')\bar{v}(p_2')\gamma_\nu u(p_1')]\\
&= \frac{e^4}{s^2}\mathrm{Tr}[(\not{p}_2 - m)\gamma^\mu(\not{p}_1+m)\gamma^\nu]\mathrm{Tr}[(\not{p}_1'+m)\gamma_\mu(\not{p}_2'-m)\gamma_\nu)]\\
&\simeq \frac{e^4}{s^2}\mathrm{Tr}[\not{p}_2\gamma^\mu\not{p}_1\gamma^\nu]\mathrm{Tr}[\not{p}_1'\gamma_\mu\not{p}_2'\gamma_\nu)]\\
&= \frac{e^4}{s^2}\times 4[p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - \eta^{\mu\nu}(p_1\cdot p_2)]\times 4[p_{2\mu}'p_{1\nu}' + p_{2\nu}'p_{1\mu}' - \eta_{\mu\nu}(p_1'\cdot p_2')]\\
&= 16\frac{e^4}{s^2}\Big[2(p_2\cdot p_2')(p_1\cdot p_1') + 2(p_1\cdot p_2')(p_2\cdot p_1')\\
&\qquad - 2(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2) - 2(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2) + 4(p_1'\cdot p_2')(p_1\cdot p_2)\Big]\\
&= 32\frac{e^4}{s^2}\Big[(p_2\cdot p_2')(p_1\cdot p_1') + (p_1\cdot p_2')(p_2\cdot p_1')\Big]\\
&= 8\frac{e^4}{s^2}\Big[t^2+u^2\Big]\,.
\end{aligned}$$

Le résultat pour la voie 't' peut être obtenu par croisement $s \leftrightarrow t$ :

$$\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_t|^2 = \sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}_s|^2(s\leftrightarrow t) = 8\frac{e^4}{t^2}\Big[s^2+u^2\Big]\,.$$

Bien sûr, on peut trouver ce résultat aussi par un calcul direct.

Reste à calculer le terme d'interférence :

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{spins}} \mathcal{M}_s \mathcal{M}_t^* &= \frac{e^4}{st} \sum_{\text{spins}} [\bar{u}(p_1)\gamma^\mu u(p_1')\bar{u}(p_1')\gamma_\nu v(p_2')\bar{v}(p_2')\gamma_\mu v(p_2)\bar{v}(p_2)\gamma^\nu u(p_1)] \\
&= \frac{e^4}{st} \mathrm{Tr}[(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu(\not{p}_1' + m)\gamma_\nu(\not{p}_2' - m)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m)\gamma^\nu] \\
&\simeq \frac{e^4}{st} \mathrm{Tr}[\not{p}_1\gamma^\mu\not{p}_1'\gamma_\nu\not{p}_2'\gamma_\mu\not{p}_2\gamma^\nu] \\
&= -2\frac{e^4}{st} \mathrm{Tr}[\not{p}_1\gamma^\mu\not{p}_1'\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_2'] \quad \text{en utilisant} \quad \gamma_\nu\not{p}_2'\gamma_\mu\not{p}_2\gamma^\nu = -2\not{p}_2\gamma_\mu\not{p}_2' \\
&= -8\frac{e^4}{st}(p_1' \cdot p_2) \mathrm{Tr}[\not{p}_1\not{p}_2'] \quad \text{en utilisant} \quad \gamma^\mu\not{p}_1'\not{p}_2\gamma_\mu = 4(p_1' \cdot p_2) \\
&= -32\frac{e^4}{st}(p_1' \cdot p_2)(p_1 \cdot p_2') \\
&= -8\frac{e^4}{st}u^2 \,.
\end{aligned}$$

En combinaisant ces résultats on trouve :

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 2e^4 \left[\frac{t^2+u^2}{s^2} + \frac{s^2+u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{st}\right] = 2e^4 \left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s} + \frac{u}{t}\right)^2\right] = \frac{2e^4}{s^2t^2}(s^4 + t^4 + u^4)$$

**Exercice 1d)**

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega^*} &= \frac{1}{64\pi^2 s}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{\alpha^2}{2s}\left[\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{s}\right)^2 + \left(\frac{u}{s} + \frac{u}{t}\right)^2\right] \\
&= \frac{\alpha^2}{2s}\frac{s^4 + t^4 + u^2(s+t)^2}{s^2t^2} = \frac{\alpha^2}{2s}\frac{s^4+t^4+u^4}{s^2t^2} \,,
\end{aligned}$$

car $s + t = -u$. On a

$$t = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta^*) \,,\; u = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta^*)$$
$$s^4 + t^4 + u^4 = \frac{s^4}{8}(3 + \cos^2\theta^*)^2 \,,\; s^2t^2 = \frac{s^4}{4}(1 - \cos\theta^*)^2 \,.$$

Donc

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{4s}\frac{(3+\cos^2\theta^*)^2}{(1-\cos\theta^*)^2} \quad \text{avec} \quad s = 4E^{*2} \,.$$

**Exercice 2 : Invariance de jauge SU(3)**

Le Lagrangien de la QCD est donné par

$$\mathcal{L}_{\rm QCD} = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a + \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f \tag{4}$$

avec

$$D_\mu = \partial_\mu + igG^a_\mu T_a \,, \quad G^a_{\mu\nu} T_a = \frac{-i}{g}[D_\mu, D_\nu] \,. \tag{5}$$

Ici, les générateurs $T_a$ sont dans la représentation fondamentale, c.à.d., $T_a = \lambda_a/2$ avec les matrices $\lambda_{a=1,\ldots,8}$ de Gell-Mann.

a) Rappelez (**sans dérivation**) comment les différents objets (quarks, gluons, dérivée covariante) changent sous une transformation de jauge SU(3)$_c$ et montrez que $\mathcal{L}_{\rm QCD}$ reste invariant.

b) Montrez que $G^a_{\mu\nu}$ transforme selon la représentation adjointe de SU(3)$_c$.
Piste : Considérez une transformation infinitésimale avec paramètres $\alpha^a(x) \ll 1$.

---

**Exercice 2a)**
Les quarks transforment selon la représentation fondamentale **3**, et les anti-quarks selon la représentation anti-fondamentale $\bar{\mathbf{3}}$ :

$$\begin{aligned} &q \to q' = Uq \qquad \text{avec} \quad U = e^{i\alpha^a(x)T^a} \,, T^a = \frac{\lambda_a}{2} \\ &\bar{q} \to \bar{q}' = \bar{q}U^{-1} \,, \end{aligned}$$

ou les matrices $\lambda_a$ ($a = 1, \ldots, 8$) sont les matrices $3 \times 3$ de Gell-Mann.

Les matrices gluoniques $G_\mu := G^a_\mu T_a$ et la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu \mathbf{I} + igG_\mu$ ($\mathbf{I}$ est la matrice d'identité $3 \times 3$ dans l'espace de couleur) transforment comme suivant :

$$\begin{aligned} &G_\mu \to G'_\mu = UG_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U(\partial_\mu U^{-1}) = UG_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1} \,, \\ &D_\mu \to D'_\mu = UD_\mu U^{-1} \,. \end{aligned}$$

Finalement, le tenseur gluonic $G_{\mu\nu} := G^a_{\mu\nu} T_a$ change comme suivant sous une transformation de jauge :

$$G_{\mu\nu} \to G'_{\mu\nu} = UG_{\mu\nu}U^{-1} \,.$$

Notez : **On n'a pas** $G^a_{\mu\nu} \to {G^a_{\mu\nu}}' = UG^a_{\mu\nu}U^{-1}$. Voir question b).

Connaissant ces lois de transformation, l'invariance de jauge du Lagrangien de la QCD peut être vérifiée facilement :

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a = -\frac{1}{2}{\rm Tr}[G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}] \to -\frac{1}{2}{\rm T}r[G'_{\mu\nu}G'^{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}{\rm T}r[UG_{\mu\nu}U^{-1}UG^{\mu\nu}U^{-1}] = \mathcal{L}_G$$

à cause de la cyclicité de la trace (et le fait que $U^{-1}U = \mathbf{1}$).

En plus, on a

$$\bar{q}q \to \bar{q}'q' = \bar{q}U^{-1}Uq = \bar{q}q\,,$$
$$\bar{q}D_\mu q \to \bar{q}'D'_\mu q' = \bar{q}U^{-1}UD_\mu U^{-1}Uq = \bar{q}D_\mu q\,,$$

(séparement pour chaque saveur $q = u, d, s, c, b, t$) ce qui implique que

$$\mathcal{L}_F = \sum_f \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f \to \mathcal{L}_F\,.$$

**Exercice 2b)**

À montrer :

$$G^a_{\mu\nu} \to G^a_{\mu\nu}{}' = \left(e^{i\alpha^c(x)F_c}\right)^a{}_b\,G^b_{\mu\nu}$$

ou $(F_c)^a{}_b = -if_{cab}$ sont les générateurs de SU(3) dans la représentation adjointe.

Considérons une transformation infinitésimale ($\alpha^a(x) \ll 1$). Dans ce cas il faut montrer :

$$G^a_{\mu\nu}{}' = (\delta^a{}_b + i\alpha^c(F_c)^a{}_b)\,G^b_{\mu\nu}\,.$$

Demonstration (en négligeant les termes de l'ordre $\mathcal{O}(\alpha^2)$) :

$$\begin{aligned}G'_{\mu\nu} &= G^a_{\mu\nu}{}'T_a = UG_{\mu\nu}U^{-1} \overset{\alpha^c \ll 1}{=} (1+i\alpha^c T_c)G_{\mu\nu}(1-i\alpha^c T_c) + \mathcal{O}(\alpha^2) = G_{\mu\nu} + i\alpha^c[T_c, G_{\mu\nu}]\\ &= G_{\mu\nu} + i\alpha^c[T_c, T_b]G^b_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + i\alpha^c(if_{cba}T_a)G^b_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu}T_a + i\alpha^c(-if_{cab}T_a)G^b_{\mu\nu}\,.\end{aligned}$$

Puisque les générateurs $T_a$ forment une base de l'algebre de Lie on peut conclure que

$$G^a_{\mu\nu}{}' = G^a_{\mu\nu} + i\alpha^c(-if_{cab})G^b_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} + i\alpha^c(F_c)^a{}_b G^b_{\mu\nu} \qquad \text{q.e.d.}$$

Une transformation finie (connecté avec la matrice d'identité) peut être obtenu d'une façon unique par exponentiation d'une transformation infinitésimale et on peut donc conclure que le tenseur $G^a_{\mu\nu}$ transforme selon la représentation adjointe.

**Exercice 3 : Règles de Feynman et production du boson de Higgs**

Le Lagrangien effectif gouvernant l'interaction du boson de Higgs avec des gluons est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = -\frac{k}{4} G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu} h \,, \tag{6}$$

où $k$ est une constante [1], $h$ est le boson de Higgs et $G^a_{\mu\nu}$ est le tenseur des gluons.

a) Le vertex $V_{ggh}$ prend la forme $V_{ggh} = ik\delta^{ab} H^{\mu\nu}(p_1, p_2)$. Ici $(p_1, a, \mu)$ sont l'impulsion, la couleur et l'indice de Lorentz du premier gluon, $(p_2, b, \nu)$ l'impulsion, la couleur et l'indice de Lorentz du deuxième gluon et le boson de Higgs a une impulsion $p_3$.
Dérivez le tenseur $H^{\mu\nu}(p_1, p_2)$ en utilisant les règles discutés en cours pour dériver un vertex à partir d'un Lagrangien.

b) $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ génère aussi des interactions du boson de Higgs avec trois et quatre gluons. Les vertex prennent la forme $V_{gggh} = -kg_s f^{abc} V^{\mu\nu\sigma}$, $V_{ggggh} = -ikg_s^2 X^{abcd}_{\mu\nu\sigma\lambda}$.
Donnez **sans dérivation** les expressions pour $V^{\mu\nu\sigma}$ et $X^{abcd}_{\mu\nu\sigma\lambda}$.
Piste : Comparez avec le vertex à trois et quatre gluons en QCD.

c) Le mécanisme dominant pour la production du boson de Higgs au LHC est le processus $gg \to h$. En utilisant le vertex effectif $V_{ggh} = ik\delta^{ab} H^{\mu\nu}(p_1, p_2)$, donnez l'expression pour la section efficace $\hat{\sigma}(gg \to h)$. Notamment, spécifiez l'élément de matrice $\overline{|M_{fi}|}^2$ moyenné sur les spins et couleurs et l'espace de phase. Utilisez $H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = m_h^4/2$.

d) Bonus : Proposez une expression pour la section efficace $\sigma(p+p \to h)$ de la production du Higgs dans les collisions proton–proton dans le modèle des partons.

---

**Exercice 3a)**

**Étape 1 :** La partie du Lagrangien effectif qui contribue au vertex $ggh$ est donne par

$$i\mathcal{L} = -i\frac{k}{4}(\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu)(\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu)h = i\frac{k}{2}[-(\partial_\alpha G^\mu_a g_{\mu\nu})(\partial^\alpha G^\nu_b \delta^b_a) + (\partial_\nu G^\mu_a)(\partial_\mu G^\nu_b \delta^b_a)]h \,.$$

**Étape 2 :** Il faut maintenant remplacer les dérivées par (-i) fois l'impulsion entrante des champs concernés :

$$i\mathcal{L} \to i\frac{k}{2}[-(-ip_{1\alpha} g_{\mu\nu})(-ip_2^\alpha) + (-ip_{1\nu})(-ip_{2\mu})]\delta^{ab} G^\mu_a G^\nu_b h = i\frac{k}{2}[g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - p_{1\nu} p_{2\mu}]\delta^{ab} G^\mu_a G^\nu_b h \,.$$

**Étape 3 :** Faire une somme sur les permutations des indices et impulsions de particules identiques :
En échangeant en même temps $(p_1, a, \mu) \leftrightarrow (p_2, b, \nu)$ on retrouve la même expression. Il faut donc multiplier l'expression précédente avec 2 :

$$i\mathcal{L} \to ik[g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - p_{1\nu} p_{2\mu}]\delta^{ab} G^\mu_a G^\nu_b h \,.$$

1. Pour être complet, jusqu'à 2-boucles $k = \frac{-\alpha_s}{3\pi v}(1 + \frac{11}{4}\frac{\alpha_s}{\pi})$. Ce Lagrangien est valable dans la limite $m_t \gg m_h$ où $m_t$ est la masse du quark top et $m_h$ la masse du boson de Higgs. $v = 246$ GeV est la valeur moyenne dans le vide (vev) du Higgs.

**Étape 4 :** Finalement il faut enlever les champs extéreurs pour trouver le vertex :

$$V_{hgg} = ik\delta^{ab} H^{\mu\nu}(p_1, p_2) \qquad \text{avec} \quad H^{\mu\nu}(p_1, p_2) = [g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - p_1^\nu p_2^\mu] \,.$$

Remarque : Dans cet exercice on ne peut pas utiliser l'integration par partie comme on l'a fait pour dériver le propagateur du gluon. La dérivée totale serait multiplié par le champ $h$ et par conséquent cela ne serait plus une dérivée totale.

**Exercice 3b)**
Ici, on peut suivre exactement la dérivation du vertex à 3 gluons et à 4 gluons en QCD (multiplié avec h). Par conséquent les expressions pour $V^{\mu\nu\rho}$ et $X^{abcd}_{\mu\nu\sigma\lambda}$ sont les mêmes comme dans ces vertex :

$$\begin{aligned} V^{\mu\nu\rho} &= g^{\mu\nu}(p_1 - p_2)^\rho + g^{\nu\rho}(p_2 - p_3)^\mu + g^{\rho\mu}(p_3 - p_1)^\nu \,, \\ X^{abcd}_{\mu\nu\lambda\sigma} &= f_{abe} f_{cde}(g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) + f_{ace} f_{bde}(g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda}) + f_{ade} f_{cbe}(g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma}) \,. \end{aligned}$$

**Exercice 3c)**

La section efficace partonique pour le processes $g(p_1) + g(p_2) \to h(p_h)$ est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{1}{2\hat{s}} \overline{|M|^2} \frac{d^3 p_h}{(2\pi)^3 2E_h} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_h) \\ &= \frac{1}{2\hat{s}} \overline{|M|^2} 2\pi \delta(\hat{s} - m_h^2) \,, \end{aligned}$$

Moyennant sur les helicities et couleurs des gluons on a

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \frac{1}{(N_c^2 - 1)^2} \sum_{a,b} |M|^2$$

avec

$$\begin{aligned} M &= k\delta^{ab} H^{\mu\nu}(p_1, p_2) \epsilon^a_\mu(p_1, \lambda_1) \epsilon^b_\nu(p_2, \lambda_2) \,, \\ |M|^2 &= k^2 H^{\mu\nu} H^{\rho\sigma} \epsilon^a_\mu(p_1, \lambda_1) \epsilon^b_\nu(p_2, \lambda_2) \epsilon^{a*}_\rho(p_1, \lambda_1) \epsilon^{b*}_\sigma(p_2, \lambda_2) \delta^{ab} \delta^{ab} \,. \end{aligned}$$

En utilisant

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_1} \epsilon^a_\mu(p_1, \lambda_1) \epsilon^{a*}_\rho(p_1, \lambda_1) &\to -g_{\mu\rho} \,, \\ \sum_{\lambda_2} \epsilon^b_\nu(p_2, \lambda_2) \epsilon^{b*}_\sigma(p_2, \lambda_2) &\to -g_{\nu\sigma} \,, \\ \sum_{a,b} \delta^{ab} \delta^{ab} &= N_c^2 - 1 \,, \end{aligned}$$

on trouve

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{(N_c^2 - 1)^2} k^2 H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} (N_c^2 - 1) \,.$$

Comme indique, on a

$$H^{\mu\nu} H_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - p_1^\nu p_2^\mu)(g_{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 - p_{1\nu} p_{2\mu}) = 2(p_1 \cdot p_2)^2 = \frac{\hat{s}^2}{2} = \frac{m_h^4}{2} \,.$$

On trouve alors

$$\overline{|M|^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{N_c^2-1}k^2\frac{m_h^4}{2} = \frac{1}{64}k^2 m_h^4\,,$$
$$\hat{\sigma} = \frac{\pi}{64}k^2 m_h^2 \delta(\hat{s}-m_h^2)\,.$$

**Exercice 3d)**
Dans le modèle des partons on a

$$\sigma(p+p\to h) \simeq \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2\, g(x_1)g(x_2)\hat{\sigma}(g+g\to h)_{|\hat{s}=x_1x_2S}\,.$$

Ici $g(x)$ est la densité de probabilité de trouver un gluon dans le proton qui porte une fraction $x$ de son impulsion, c.à.d., $p_1 = x_1 P_A$, $p_2 = x_2 P_B$ ou $P_A$ et $P_B$ sont les impulsions des deux protons. $S$ est l'énergie du centre de masse au carré et $\hat{s} = x_1x_2S = (p_1+p_2)^2$ l'énergie du centre de masse partonique.

En utilisant le resultat pour la section efficace partonique ($\hat{\sigma}$) on trouve

$$\sigma(p+p\to h) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2\, g(x_1)g(x_2)\frac{\pi}{64}k^2 m_h^2 \delta(x_1x_2S-m_h^2)\,.$$

Pour évaluer l'integral sur $x_2$ on utilise

$$\delta(x_1x_2S-m_h^2) = \frac{1}{x_1S}\delta\left(x_2-\frac{m_h^2}{Sx_1}\right) = \frac{1}{x_1S}\delta\left(x_2-\frac{\tau_0}{x_1}\right) \qquad \text{avec} \quad \tau_0 := \frac{m_h^2}{S}\,.$$

On trouve alors le resultat final pour la section efficace :

$$\sigma(p+p\to h) = \frac{\pi}{64}k^2 m_h^2 \int_0^1 dx_1 \frac{1}{x_1S} g(x_1)g(\tau_0/x_1)\times\Theta(0<\tau_0/x_1<1)$$
$$= \frac{\pi}{64}k^2\tau_0 \int_{\tau_0}^1 \frac{dx_1}{x_1} g(x_1)g(\tau_0/x_1)\,.$$