Physique des Particules - TD5

Problème 1

Le lagrangien de la QED est donné par

$$\mathcal{L}_{\rm QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

avec $D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu, F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

1. Montrez que $\mathcal{L}_{\rm QED}$ est invariant sous les transformations locales de jauge $\mathrm{U}(1)$ suivantes :

$$\begin{aligned} \psi(x) &\to \psi'(x) = e^{-iq\Lambda(x)}\psi(x)\,, \\ \bar{\psi}(x) &\to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{+iq\Lambda(x)} \\ A_\mu(x) &\to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)\,. \end{aligned}$$

2. Montrez que l'on peut symétriser le lagrangien

$$\mathcal{L}_{\rm QED} \to \mathcal{L}'_{\rm QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\psi}i\partial_\mu\gamma^\mu\psi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})i\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi + e\bar{\psi}A^\mu\gamma_\mu\psi$$

tel que l'action $S = \int d^4x\,\mathcal{L}$ ne change pas (c.à.d. $S = S' = \int d^4x\,\mathcal{L}'$).

3. Déterminez les équations de mouvement pour $F^{\mu\nu}$ (A^μ) et ψ en utilisant les équations d'Euler-Lagrange résultant de la variation de l'action. Pourquoi peut-on varier les champs ψ et $\bar{\psi}$ séparément ?
4. Le théorème de Noether attribue à chaque symétrie continue (globale) du lagrangien une grandeur conservée. Montrez que l'invariance de $\mathcal{L}_{\rm QED}$ sous des transformations globales $\mathrm{U}(1)$ implique la conservation de la charge électrique.

Problème 2

Vérifiez la relation de fermeture suivante

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^\mu_\lambda(k)\epsilon^{\nu\star}_\lambda(k) = -g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{|\vec{k}|^2} + \frac{k^0(k^\mu\eta^\nu + k^\nu\eta^\mu)}{|\vec{k}|^2}\,,$$

avec $\eta = (1,0,0,0)$, $\eta\cdot\epsilon_\lambda(k) = 0$, $k\cdot\epsilon_\lambda(k) = 0$, $\epsilon_\lambda(k)\cdot\epsilon^\star_{\lambda'}(k) = -\delta_{\lambda\lambda'}$.

Problème 3

Montrez que

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4}\,D_{\mu\nu}(x-y)j^\nu(y)$$

avec

$$D_{\mu\nu}(z) = g_{\mu\nu}\int d^4q\;e^{iq\cdot z}\left(-\frac{1}{q^2}\right)$$

est une solution de $\Box A_\mu(x) = j_\mu(x)$.

Indication : $\int d^4q e^{iq\cdot z} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(z)$.

Tournez la page s.v.p.

Problème 4

En utilisant $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ et $\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ montrez que

1. $(\gamma_5)^2 = 1$,
2. $\mathrm{Tr}[\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}] = 0$ pour un nombre n impair,
3. $\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu}$,
4. $\mathrm{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu] = 0$
5. $\mathrm{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma] = 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma})$,
6. $\mathrm{Tr}[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma] = 4i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$,
7. $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^\mu = -2\gamma_\nu$,
8. $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma^\mu = 4g_{\nu\sigma}$,
9. $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma^\mu = -2\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\nu$.

Problème 5

Montrez que la contraction de deux ε-tenseurs donne :

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_\mu{}^{\rho\sigma\tau} = -(g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}g^{\gamma\tau} - g^{\alpha\rho}g^{\beta\tau}g^{\gamma\sigma} - g^{\alpha\sigma}g^{\beta\rho}g^{\gamma\tau} + g^{\alpha\sigma}g^{\beta\tau}g^{\gamma\rho} + g^{\alpha\tau}g^{\beta\rho}g^{\gamma\sigma} - g^{\alpha\tau}g^{\beta\sigma}g^{\gamma\rho}).$$

Qu'est-ce qu'on peut en déduire pour $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\alpha}{}^{\sigma\tau}$, $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\alpha\beta}{}^{\tau}$?

(<u>Indication</u> : Observez d'abord qu'au côté droit de l'équation ci-dessus peuvent apparaître uniquement les six tenseurs métriques. Vérifiez aussi que $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = -24$.)