

Physique des Particules - TD2

Problème 1

Soient T_a des matrices $n \times n$ hermitiennes ($T_a^\dagger = T_a$) et sans trace ($\text{Tr}(T_a) = 0$). Montrez qu'il y a $n^2 - 1$ matrices linéairement indépendantes et que les constantes de structure f_{abc} dans $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$ sont réelles.

Problème 2

Montrez que $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$ et $\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ mènent à $f_{abc} = -f_{acb}$.

Indication : Calculez $\text{Tr}(T_c [T_a, T_b])$ et prenez en considération que $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$.

Problème 3

a) Prouvez l'identité

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} (T_a)_{ij} (T_a)_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{n}\delta_{ij}\delta_{kl})$$

Indication : Utilisez $\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ pour calculer m_0 et m_a dans

$$M = m_0 \mathbf{1}_n + \sum_{a=1}^{n^2-1} m_a T_a$$

où M est une matrice $n \times n$ hermitien quelconque.

b) Prouvez

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} T_a T_a = C_F \mathbf{1}_n \quad \text{avec} \quad C_F \equiv \frac{n^2 - 1}{2n}$$

Problème 4

On définit la représentation adjointe de l'algèbre $\mathfrak{su}(n)$ par $(X_a)_{bc} := -if_{abc}$. Montrez que les générateurs X_a respectent l'algèbre :

$$[X_a, X_b] = if_{abc}X_c$$

Indication : Utilisez $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$ ainsi que l'identité de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

Tournez la page s.v.p.

Problème 5

Calculez λ dans

$$\sum_{c,d=1}^{n^2-1} f_{acd}f_{bcd} = \lambda\delta_{ab}$$

en utilisant

$$\sum_{a,b=1}^{n^2-1} X_a X_b = C_A \mathbf{1}_{n^2-1}$$

avec $C_A \equiv n$. Montrez en plus que

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} T_a T_b T_a = \left(C_F - \frac{C_A}{2} \right) T_b$$
$$\sum_{a,b=1}^{n^2-1} f_{abc} T_a T_b = i \frac{C_A}{2} T_c$$

Problème 6

Confirmez les résultats des problèmes 3, 4 et 5 pour le groupe $SU(2)$ par calcul direct. Dans ce cas $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ et $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ avec les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$