Physique des Particules - TD2

Problème 1

Soient T_a des matrices $n \times n$ hermitiennes ($T_a^\dagger = T_a$) et sans trace ($\mathrm{Tr}(T_a) = 0$). Montrez qu'il y a $n^2 - 1$ matrices linéairement indépendantes et que les constantes de structure f_{abc} dans $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$ sont réelles.

Problème 2

Montrez que $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$ et $\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ mènent à $f_{abc} = -f_{acb}$.
Indication : Calculez $\mathrm{Tr}(T_c[T_a, T_b])$ et prenez en considération que $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$.

Problème 3

a) Prouvez l'identité

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} (T_a)_{ij}(T_a)_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{n}\delta_{ij}\delta_{kl})$$

Indication : Utilisez $\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ pour calculer m_0 et m_a dans

$$M = m_0 \mathbf{1}_n + \sum_{a=1}^{n^2-1} m_a T_a$$

où M est une matrice $n \times n$ hermitienne quelconque.

b) Prouvez

$$\sum_{a=1}^{n^2-1} T_a T_a = C_F \mathbf{1}_n \quad \text{avec} \quad C_F \equiv \frac{n^2-1}{2n}$$

Problème 4

On définit la représentation adjointe de l'algèbre su(n) par $(X_a)_{bc} := -i f_{abc}$. Montrez que les générateurs X_a respectent l'algèbre :

$$[X_a, X_b] = i f_{abc} X_c$$

Indication : Utilisez $[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$ ainsi que l'identité de Jacobi

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

Tournez la page s.v.p.

Problème 5

Calculez λ dans

$$\sum_{c,d=1}^{n^2-1} f_{acd} f_{bcd} = \lambda \delta_{ab}$$

en utilisant

$$\sum_{a,b=1}^{n^2-1} X_a X_a = C_A \mathbf{1}_{n^2-1}$$

avec $C_A \equiv n$. Montrez en plus que

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{n^2-1} T_a T_b T_a &= \left(C_F - \frac{C_A}{2} \right) T_b \\
\sum_{a,b=1}^{n^2-1} f_{abc} T_a T_b &= i \frac{C_A}{2} T_c
\end{aligned}$$

Problème 6

Confirmez les résultats des problèmes 3, 4 et 5 pour le groupe $\mathrm{SU}(2)$ par calcul direct. Dans ce cas $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ et $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a$ avec les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$