

## Physique des Particules - TD10

---

### Problème 1 : Moments

Calculez les moments de Mellin de toutes les fonctions de branchement (splitting functions)  $P_{ij}(x)$  à l'ordre le plus bas :

$$\begin{aligned}
 P_{qq}(x) &= \frac{4}{3} \left( \frac{1+x^2}{1-x} \right)_+ \\
 P_{qg}(x) &= \frac{1}{2} [x^2 + (1-x)^2] \\
 P_{gq}(x) &= \frac{4}{3} \frac{1+(1-x)^2}{x} \\
 P_{gg}(x) &= 6 \left\{ \left( \frac{1}{1-x} \right)_+ + \frac{1-x}{x} - 1 + x(1-x) \right\} + \frac{33-2n_f}{6} \delta(1-x)
 \end{aligned}$$

### Problème 2 : Inversion de Mellin

La transformée de Mellin d'une fonction  $f(x)$  est définie par

$$F(N) = \int_0^1 dx x^{N-1} f(x).$$

Montrez que cette transformation peut être inversée de la manière suivante (Inversion de Mellin)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+\infty} dN x^{-N} F(N)$$

où  $\sigma$  est à choisir tel que les parties réelles de toutes les singularités de  $F(N)$  sont plus petites que  $\sigma$ . Montrez en plus que la transformée de Mellin d'une convolution de deux fonctions  $f, g$

$$(f \otimes g)(x) = \int_x^1 \frac{dz}{z} f(z) g\left(\frac{x}{z}\right)$$

est le produit des transformées de ces fonctions :

$$\int_0^1 dx x^{N-1} (f \otimes g)(x) = F(N)G(N).$$