Université Joseph Fourier. Master 1 Physique
TD de mécanique quantique.

TD n°7 Solutions

Couplage de moments cinétiques et applications

---

1 Couplage de deux spins 1/2 : $\mathcal{D}_{J=1/2} \otimes \mathcal{D}_{J=1/2} = \mathcal{D}_{J=0} \oplus \mathcal{D}_{J=1}$

C'est un exercice de cours. Voir aussi la réf. : [1], chap. X, p.1006.

1. On considère une particule 1 (respect. 2) de spin 1/2, décrit par un vecteur dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$, de base $|+_1\rangle, |-_1\rangle$ (respect. $\mathcal{H}_2$, de base $|+_2\rangle, |-_2\rangle$). Une base orthonormée de l'espace total $\mathcal{H}_{tot.} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est donc donnée par les 4 vecteurs
$$(|+_1, +_2\rangle, |+_1, -_2\rangle, |-_1, +_2\rangle, |-_1, -_2\rangle)$$
Remarque : on note $|+_1, +_2\rangle \equiv |+_1\rangle \otimes |+_2\rangle$, etc...
2. On note $\vec{S}_1 = (S_{1,x}, S_{1,y}, S_{1,z})$ les opérateurs de spin de la particule 1, et de même $\vec{S}_2$ pour la particule 2. L'opérateur de rotation d'un angle α autour de l'axe $\vec{u}$ du système total s'écrit :
$$\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \hat{R}_{(1),\vec{u}}(\alpha) \otimes \hat{R}_{(2),\vec{u}}(\alpha)$$
avec
$$\hat{R}_{(1),\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{S}_1.\vec{u}\right), \qquad \hat{R}_{(2),\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{S}_2.\vec{u}\right)$$
On déduit que $\hat{R}_{\vec{u}}(\alpha) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha\left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right).\vec{u}\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\alpha\vec{S}.\vec{u}\right)$ est générée par $\vec{S} = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)$. On vérifie que ces opérateurs forment l'algèbre du moment cinétique en écrivant $[S_x, S_y] = [(S_{1,x} + S_{2,x}), (S_{1,y} + S_{2,y})] = S_{1,z} + S_{2,z} = S_z$, etc...
3. On veut décomposer l'espace total $\mathcal{H}_{tot.} = \mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_{1/2}$ en représentation irréductibles des rotations du système total, générées par $\vec{S}$. Autrement dit, on cherche une base de vecteurs $|J, M\rangle$ (à exprimer dans la base de départ), vérifiant :
$$\hat{S}_z|J, M\rangle = M\hbar|J, M\rangle, \qquad \vec{S}^2|J, M\rangle = \hbar^2 J(J+1)|J, M\rangle$$
On écrit : $\vec{S}^2 = \left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1.\vec{S}_2$. Et
$$\begin{aligned}\hat{\vec{S}}_1.\hat{\vec{S}}_2 &= \left(\hat{S}_{1,x}\hat{S}_{2,x} + \hat{S}_{1,y}\hat{S}_{2,y} + \hat{S}_{1,z}\hat{S}_{2,z}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\hat{S}_{1,+}\hat{S}_{2,-} + \frac{1}{2}\hat{S}_{1,-}\hat{S}_{2,+} + \hat{S}_{1,z}\hat{S}_{2,z}\right)\end{aligned}$$
avec $S_\pm = S_x \pm iS_y$. Donc
$$\begin{aligned}\hat{\vec{S}}^2 &= \hat{\vec{S}}_1^2 + \hat{\vec{S}}_2^2 + 2\hat{\vec{S}}_1.\hat{\vec{S}}_2\\ &= \hat{\vec{S}}_1^2 + \hat{\vec{S}}_2^2 + \left(\hat{S}_{1,+}\hat{S}_{2,-} + \hat{S}_{1,-}\hat{S}_{2,+} + 2\hat{S}_{1,z}\hat{S}_{2,z}\right)\end{aligned}$$
4. On va aussi utiliser :
$$\hat{S}_1^2|- >= \hbar^2\frac{3}{4}|- >$$
$$\hat{S}_{1,+}|- >= \hbar|+ >$$
$$\hat{S}_{1,-}|- >= 0$$
$$\hat{S}_{1,z}|\pm >= \pm\frac{\hbar}{2}|\pm >$$

On calcule :

$$\hat{S}_z|-->=(-1)\hbar|-->$$
$$\hat{\vec{S}}^2|-->=\hbar^2\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+2\frac{1}{4}\right)|-->=2\hbar^2|-->$$

donc :

$$|-->=|J=1,M=-1>$$

Ensuite, on crée $|J=1,M=0>$ par action de $\hat{S}_+$:

$$\begin{aligned}|J=1,M=0>&=\frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\hat{S}_+|J=1;M=-1>=\frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\left(\hat{S}_{1,+}+\hat{S}_{2,+}\right)|-->\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+->+|-+>\right)\end{aligned}$$

et on crée $|J=1,M=1>$ par action à nouveau de $\hat{S}_+$:

$$\begin{aligned}|J=1,M=1>&=\frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\hat{S}_+|J=1;M=0>=\frac{1}{\hbar\sqrt{2}}\left(\hat{S}_{1,+}+\hat{S}_{2,+}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+->+|-+>\right)\\&=\frac{1}{2}\left(|++>+|++>\right)=|++>\end{aligned}$$

On a donc obtenu trois vecteurs $|J=1,M=-1,0,+1>$ de l'espace $\mathcal{H}_{tot}$ qui lui est de dimension 4.

Le complémentaire orthogonal est de dimension 1, et engendré par le vecteur :

$$|\psi>=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+->-|-+>\right)$$

on calcule de même :

$$\hat{S}^2|\psi>=...=0,\qquad \hat{S}_z|\psi>=0$$

donc $|\psi>=|J=0,M=0>$.

En résumé, voici la décomposition de l'espace $\mathcal{H}_{tot}$ en vecteurs $|J,M>$ orthonormés :

$$\textbf{Triplet}\quad:\left\{\begin{array}{ll}|J=1;M=+1> & =|++>\\ |J=1;M=0> & =\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+->+|-+>\right)\\ |J=1;M=-1> & =|-->\end{array}\right.$$

$$\textbf{Singlet}\quad:|J=0;M=0>=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+->-|-+>\right)$$

Montrant que l'espace $\mathcal{H}_{tot}=\mathcal{D}_{1/2}\otimes\mathcal{D}_{1/2}$ se décompose en somme deux représentations irréductibles du groupe de rotation :

$$\mathcal{D}_{1/2}\otimes\mathcal{D}_{1/2}=\mathcal{D}_{J=1}\oplus\mathcal{D}_{J=0}\qquad(1)$$

Les dimensions de ces espaces sont : $2\times 2=3+1$.

Remarquer que les valeurs de J possibles de la particule composée sont la somme $J=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|=1$ et la différence $J=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=0$ des deux spins $\frac{1}{2}$ individuels. Les coefficients devant les états $|\pm,\pm\rangle$ dans les expressions des états triplets et singlet ci-dessus, s'appellent **coefficients de Clebsch-Gordan**.

2 Structure hyperfine des atomes

(Suite de l'exercice (1)). Réf. : [1], chap. XII-D, p.1217.

1. Comme en algèbre vectorielle, il semble assez clair que le produit scalaire $\vec{S}_1.\vec{S}_2$ est invariant par rotation de l'ensemble. (En physique, on dit que c'est un "opérateur scalaire"). Pour être

plus précis, pour montrer l'invariance par rotation, il faut montrer $\left[\hat{H}, \vec{S}\right] = 0$. On a vu que $\vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1.\vec{S}_2$. On déduit que

$$\begin{aligned}\hat{H} &= A.\hat{I} + B.\vec{S}_1.\vec{S}_2 \\ &= A.\hat{I} + \frac{B}{2}\left(\hat{\vec{S}}^2 - \hat{\vec{S}}_1^2 - \hat{\vec{S}}_2^2\right) \\ &= A\hat{I} + \frac{B}{2}\left(\hat{\vec{S}}^2 - \hbar^2\frac{3}{2}I\right)\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que sur $\mathcal{H}_{tot}$, $\hat{\vec{S}}_1^2 \equiv \hbar^2\frac{3}{4}I$, $\hat{\vec{S}}_2^2 \equiv \hbar^2\frac{3}{4}I$ (car pour $j = 1/2$ alors $j(j+1) = 3/2$). Or $\left[\hat{\vec{S}}^2, \vec{S}\right] = 0$ donc $\left[\hat{H}, \vec{S}\right] = 0$.

2. Ensuite, on a $\vec{S}^2|J, M\rangle = \hbar^2 J(J+1)$, on déduit que

$$\hat{H}|J = 0, M\rangle = E_0|J = 0, M\rangle, \qquad M = 0$$

$$\hat{H}|J = 1, M\rangle = E_1|J = 1, M\rangle, \qquad M = -1, 0, +1$$

avec

$$E_J = A + \frac{B}{2}\hbar^2\left(J(J+1) - \frac{3}{2}\right)$$

soit :

$$E_0 = A - \frac{3}{4}B\hbar^2, \qquad E_1 = A + \frac{1}{4}B\hbar^2$$

c.a.d. que $\hat{H}$ a deux niveaux d'énergie, $E_{J=0}, E_{J=1}$ de multiplicité respectives $1, 3$. Par conséquent, dans son état d'énergie fondamentale, la particule composée est une particule de moment angulaire intrinsèque $J = 0$. Dans son état excité elle a un moment angulaire intrinsèque $J = 1$.

3. On écrit $\Delta E = h\nu$ et $\lambda = \frac{c}{\nu} = 21$ cm. Donc $\Delta E = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = 6.10^{-6}eV$. Or $\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{7}{4}B\hbar^2$, donc

$$B = \frac{4}{7}\frac{\Delta E}{\hbar^2}$$

4. $\nu = 9192631770$, donnant $\Delta E = h\nu = 3.8\,10^{-5}eV$.

5. On a vu que $\mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$. Si $\hat{H}$ est un opérateur vérifiant $\left[\hat{H}, \vec{S}\right] = 0$ (invariance par rotation) alors d'après le **Lemme de Shur**, $\hat{H}$ exprimé dans la décomposition $\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1$ est de la forme bloc:

$$\hat{H} = \left(\begin{array}{cc} \lambda\hat{I} & 0 \\ \underbrace{0}_{\mathcal{D}_0} & \underbrace{\mu\hat{I}}_{\mathcal{D}_1} \end{array}\right), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Or on a vu que l'opérateur $A.\hat{I} + B.\vec{S}_1.\vec{S}_2 = A + \frac{B}{2}\hbar^2\left(J(J+1) - \frac{3}{2}\right)$ s'exprime dans cette même décomposition par

$$\left(\begin{array}{cc} E_0 = A - \frac{3}{4}B\hbar^2 & 0 \\ 0 & E_1 = A + \frac{1}{4}B\hbar^2 \end{array}\right)$$

Il suffit donc de prendre A, B tels que $A - \frac{3}{4}B\hbar^2 = \lambda$ et $\mu = A + \frac{1}{4}B\hbar^2$.
Plus généralement, pour le couplage $\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2} = \oplus_{j=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2}\mathcal{D}_j$, un opérateur invariant s'exprime comme $\lambda_j\hat{I}$ sur chaque espace $\mathcal{D}_j$ de la décomposition. Il y a donc $N = j_2 + j_1 - |j_2 - j_1|$ paramètres indépendant λ_j. Comme l'opérateur de Casimir $\vec{S}^2$ est $\hbar^2 j(j+1)\hat{I}$ sur

un espace $\mathcal{D}_j$ (et distingue donc les espaces $\mathcal{D}_j$) on déduit que un opérateur invariant peut s'exprimer sous la forme $\hat{H} = \mu_0 \hat{I} + \mu_1 \vec{S}^2 + \mu_2 \left(\vec{S}^2\right)^2 + \ldots + \mu_{N-1} \left(\vec{S}^2\right)^{N-1}$. Il est possible de relier les $(\mu_j)_j$ et les $(\lambda_j)_j$. De façon équivalente on pourrait utiliser $\left(\vec{S}_1.\vec{S}_2\right)^k$ à la place de $\left(\vec{S}^2\right)^k$, les coefficients seraient différents.

3 Couplage $\mathcal{D}_{J=1} \otimes \mathcal{D}_{J=1/2}$. Symétrie d'isospin et diffusion pion-nucléon

1. On a $\mathcal{D}_{j=1} \otimes \mathcal{D}_{j=1/2} = \mathcal{D}_{j=1/2} \oplus \mathcal{D}_{j=3/2}$, de dimensions $3 \times 2 = 2 + 4 = 6$ (d'après $dim \mathcal{D}_j = 2j + 1$).
2. En utilisant la table, et les correspondances $|p\rangle = |j_2 = \frac{1}{2}, m_2 = \frac{1}{2}\rangle$, $|\pi^+\rangle = |j_1 = 1, m_1 = 1\rangle$ etc.. , on obtient :

$$|p\pi^+\rangle = |\frac{3}{2};\frac{3}{2}\rangle, \qquad |p\pi^0\rangle = \sqrt{2/3}|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{1/3}|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\rangle$$

$$|p\pi^-\rangle = \sqrt{1/3}|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{2/3}|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\rangle \qquad |n\pi^+\rangle = \sqrt{1/3}|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2/3}|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\rangle$$

$$|n\pi^0\rangle = \sqrt{2/3}|\frac{3}{2};\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{1/3}|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\rangle, \qquad |n\pi^-\rangle = |\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\rangle$$

3. D'après le Lemme de Shur, dans un espace de représentation irréductible, un opérateur invariant $\hat{U}$ doit agir comme l'identité à une constante complexe près. De plus il est nul entre des espaces iréductibles différents. Donc dans la décomposition $\mathcal{D}_{j=1/2} \oplus \mathcal{D}_{j=3/2}$:

$$\hat{U} \equiv_{\mathcal{D}_{3/2} \oplus \mathcal{D}_{1/2}} \begin{pmatrix} A_{3/2}\hat{I}_4 & 0 \\ 0 & A_{1/2}\hat{I}_2 \end{pmatrix}$$

avec $A_{3/2}, A_{1/2} \in \mathbb{C}$.
4. on obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma\left(p\pi^+ \to p\pi^+\right) &= \left|\langle p, \pi^+|\hat{U}|p, \pi^+\rangle\right|^2 = \left|A_{3/2}\right|^2 \\
\sigma\left(p\pi^- \to n\pi^0\right) &= \left|\langle n, \pi^0|\hat{U}|p, \pi^-\rangle\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{3}A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}A_{1/2}\right|^2 \\
\sigma\left(p\pi^- \to p\pi^-\right) &= \left|\langle p, \pi^-|\hat{U}|p, \pi^-\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{3}A_{3/2} + \frac{2}{3}A_{1/2}\right|^2
\end{aligned}$$

   (a) si $\left|A_{3/2}\right| \gg \left|A_{1/2}\right|$, alors $\sigma\left(p\pi^+ \to p\pi^+\right) = \left|A_{3/2}\right|^2$, $\sigma\left(p\pi^- \to n\pi^0\right) \simeq \frac{2}{9}\left|A_{3/2}\right|^2$, $\sigma\left(p\pi^- \to p\pi^-\right) \simeq \frac{1}{9}\left|A_{3/2}\right|^2$.
   (b) si $\left|A_{3/2}\right| \ll \left|A_{1/2}\right|$, alors $\sigma\left(p\pi^+ \to p\pi^+\right) \simeq 0$, $\sigma\left(p\pi^- \to n\pi^0\right) \simeq \frac{2}{9}\left|A_{1/2}\right|^2$, $\sigma\left(p\pi^- \to p\pi^-\right) \simeq \frac{4}{9}\left|A_{1/2}\right|^2$.
   (c) si $A_{3/2} = A_{1/2}$, alors $\sigma\left(p\pi^+ \to p\pi^+\right) = \left|A_{3/2}\right|^2$, $\sigma\left(p\pi^- \to n\pi^0\right) \simeq 0$, $\sigma\left(p\pi^- \to p\pi^-\right) \simeq \left|A_{3/2}\right|^2$.

5. L'expérience donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma\left(p\pi^+ \to p\pi^+\right)}{\sigma\left(p\pi^- \to n\pi^0\right)} &= 4.33 \simeq 4.5 \\
\frac{\sigma\left(p\pi^+ \to p\pi^+\right)}{\sigma\left(p\pi^- \to p\pi^-\right)} &= 8.47 \simeq 9
\end{aligned}$$

On est donc proche de la situation $|A_{3/2}| \gg |A_{1/2}|$.

6. Durée de vie $\tau \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} = 6.510^{-24}s$. L'espace de degré interne d'isospin de cette particule Δ est $\mathcal{D}_{j=3/2}$, de dimension $2j+1=4$. D'après l'écriture $|j=3/2, m=3/2\rangle = |p^+, \pi^+\rangle$, etc... on déduit que $|\Delta^{++}\rangle = |j=3/2; m=3/2\rangle$, $|\Delta^{+}\rangle = |j=3/2; m=1/2\rangle$,$|\Delta^{0}\rangle = |j=3/2; m=-1/2\rangle$,$|\Delta^{-}\rangle = |j=3/2; m=-3/2\rangle$.

Références

[1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique.*