Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de mécanique quantique.

TD n°6 Solutions
Plusieurs particules

1 Etats quantiques Fermions et bosons

1. Cela donne

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle \wedge |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle - |\varphi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle\right) \otimes \left(|S\rangle_1 \otimes |S\rangle_2\right)\end{aligned}$$

La partie spin est symétrique. La partie spatiale est antisymétrique. La fonction d'onde (spinorielle) est définie par [1]

$$\begin{aligned}\psi\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) &= \left(\langle\vec{x}_1| \otimes \langle\vec{x}_2|\right).\left(|\psi_1\rangle \wedge |\psi_2\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle\vec{x}_1|\varphi_1\rangle\langle\vec{x}_2|\varphi_2\rangle - \langle\vec{x}_1|\varphi_2\rangle\langle\vec{x}_2|\varphi_1\rangle\right)\left(|S\rangle_1 \otimes |S\rangle_2\right)\end{aligned}$$

La partie spatiale est donc

$$\varphi\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_1\left(\vec{x}_1\right)\varphi_2\left(\vec{x}_2\right) - \varphi_2\left(\vec{x}_1\right)\varphi_1\left(\vec{x}_2\right)\right)$$

On rencontre cette situation lorsqu'un fort champ magnétique polarise l'état de spin des électrons dans l'état $|S\rangle$ par exemple. On remarque que $\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 0$, la probabilité de trouver les 2 electrons au même endroit est nulle.
Dans un matériau ferromagnétique, la fonction d'onde de deux éléctrons est antisymétrique, car cela permet de minimiser l'énergie de répulsion électrique. Par conséquent la partie de spin est symmétrique comme ici. Les spins sont alignés. Le ferromagnétisme est donc un effet indirect de la répulsion électrostatique sur les spins, via l'antisymétrie des électrons.

2. Alors

$$|\psi_1\rangle \wedge |\psi_2\rangle = \left(|\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_1\rangle \otimes |S_2\rangle - |S_2\rangle \otimes |S_1\rangle\right)$$

Cette fois ci, la partie spin est antisymétrique. Cette situation se rencontre dans un atome hydrogénoide, lorsque deux électrons sont sur la même orbitale (1s par exemple).

2 Paradoxe avec plusieurs particules : inégalité de Bell et non localité de la mécanique quantique

1. Etat général de polarisation : $|P\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle, \quad a, b \in \mathbb{C}$
$|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle$: polarisation rectiligne selon θ
2. On **décompose** l'état quantique $|P\rangle$ dans la base d'interaction :

$$|P\rangle = \underset{\text{Passage}}{(a|x\rangle)} + \underset{\text{Absorbé}}{(b|y\rangle)}$$

Le **hasard** décide si le photon **passe ou est absorbé** :

$$\text{Proba(passage)}=\frac{\left\|a|x\rangle\right\|^2}{\left\||P\rangle\right\|^2} = \frac{|a|^2}{|a|^2+|b|^2}, \qquad \text{et après passage, } |P\rangle = a|x\rangle$$

$$\text{Proba(absorbé)}=\frac{\left\|b|y\rangle\right\|^2}{\left\||P\rangle\right\|^2} = \frac{|b|^2}{|a|^2+|b|^2}, \qquad \text{et après passage, } |P\rangle = b|y\rangle \text{ (absorbé)}$$

Pour un photon dans l'état $|\theta\rangle = \cos\theta|x\rangle + \sin\theta|y\rangle$, alors Proba(passage)$= \cos^2\theta$ et Proba(absorbé)$= \sin^2\theta$.

1. Rappel : si $(a \otimes b) \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ et $(a' \otimes b') \in (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ alors le produit scalaire dans l'espace tensoriel est défini par $\langle a' \otimes b'|a \otimes b\rangle = \langle a'|a\rangle.\langle b'|b\rangle \in \mathbb{C}$.

3. Envoyer un faisceau de photon sur un filtre orienté dans la direction θ. A la sortie, les photons sortants sont dans l'état $|\theta\rangle$.
4. On peut supposer que le premier filtre est selon x, et le second selon θ. Un faisceau non polarisé est composé de 50% d'états $|x\rangle$ et 50% d'états $|y\rangle$. Après le premier filtre selon x, seuls les états $|x\rangle$ passent, donc l'intensité est $I_0/2$. Après le deuxième filtre, la proba de passage d'un photon est $\cos^2\theta$, donc l'intensité est $I_1 = (I_0/2)\cos^2\theta$.
5. Si $|P\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle$,

$$\begin{aligned}\frac{\langle P|\hat{A}|P\rangle}{\langle P|P\rangle} &= \frac{1}{\||P\rangle\|^2}\left(\overline{a}\langle x| + \overline{b}\langle y|\right)\left(a\,(+1)\,|x\rangle + b\,(-1)\,|y\rangle\right)\\ &= \frac{\|a|x\rangle\|^2}{\||P\rangle\|^2}(+1) + \frac{\|b|y\rangle\|^2}{\||P\rangle\|^2}(-1) = \langle A\rangle\end{aligned}$$

6. On a

$$\begin{aligned}|x\rangle &= \cos\theta|x'\rangle - \sin\theta|y'\rangle\\ |y\rangle &= \sin\theta|x'\rangle + \cos\theta|y'\rangle\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}|P_{12}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left(\cos\theta|x_1'\rangle - \sin\theta|y_1'\rangle\right)\left(\sin\theta|x_2'\rangle + \cos\theta|y_2'\rangle\right)\Big)\\ &\quad - \left(\sin\theta|x_1'\rangle + \cos\theta|y_1'\rangle\right)\left(\cos\theta|x_2'\rangle - \sin\theta|y_2'\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1'\rangle|y_2'\rangle - |y_1'\rangle|x_2'\rangle\right) : \quad \text{même écriture}\end{aligned}$$

7. On a d'après (6)

$$\begin{aligned}|P_{12}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_1\rangle|u_2^\perp\rangle - |u_1^\perp\rangle|u_2\rangle\right)\end{aligned}$$

Dans la base $|u\rangle, |u^\perp\rangle$ on a $\hat{A}_u \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\hat{B}_v \equiv \hat{R}(\theta)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\hat{R}(-\theta)$ avec $\theta = \theta_u - \theta_v$ et $\hat{R}(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ donnant $\hat{B}_v \equiv \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle A_u B_v\rangle &= \frac{1}{\langle P_{12}|P_{12}\rangle}\langle P_{12}|\hat{A}_u\hat{B}_v|P_{12}\rangle\\ &= \frac{1}{2}\left(\langle u_1, u_2^\perp|\hat{A}_u\hat{B}_v|u_1, u_2^\perp\rangle + \langle u_1^\perp, u_2|\hat{A}_u\hat{B}_v|u_1^\perp, u_2\rangle - \langle u_1, u_2^\perp|\hat{A}_u\hat{B}_v|u_1^\perp, u_2\rangle - \langle u_1^\perp, u_2|\hat{A}_u\hat{B}_v|u_1, u_2^\perp\rangle\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\langle u_2^\perp|\hat{B}_v|u_2^\perp\rangle - \langle u_2|\hat{B}_v|u_2\rangle\right) = -\cos(2\theta)\end{aligned}$$

8. Donc

$$\begin{aligned}\Delta_{quant.}(\phi) &= \langle A_u B_v\rangle - \langle A_u B_w\rangle + \langle A_v B_v\rangle + \langle A_v B_w\rangle\\ &= -\cos(\phi) + \cos(2\phi) - 1 - \cos(\phi) = \cos(2\phi) - 1 - 2\cos(\phi)\end{aligned}$$

Pour trouver le minimum, on calcule

$$\frac{d\Delta_{quant.}}{d\phi} = -2\sin(2\phi) + 2\sin(\phi) = -2\left(2\cos\phi - 1\right)\sin\phi$$

donnant un minimum en $\cos(\phi_{min}) = \frac{1}{2}$ soit $\phi_{min} = \frac{\pi}{3}$. Alors $\Delta_{quant.}(\phi_{min}) = \cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) - 1 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2.5$.

9. La localité est dans l'hypothèse que le résultat A ne dépend pas de l'angle en B, donc que dans $\langle A_u B_v \rangle$ et $\langle A_u B_w \rangle$ on utilise le même symbole A. On note $A = A_u$, $A' = A_v$, $B = B_v$, $B' = B_w$. On a

$$\begin{aligned} \left|\Delta_{loc}\left(A, A'; B, B'\right)\right| &\leq \left|\langle AB\rangle - \langle AB'\rangle\right| + \left|\langle A'B\rangle + \langle A'B'\rangle\right| \\ &= \left|\langle A\left(B - B'\right)\rangle\right| + \left|\langle A'\left(B + B'\right)\rangle\right| \\ &\leq \langle \left|B - B'\right| + \left|B + B'\right|\rangle = 2 \end{aligned}$$

(Pour la dernière égalité il suffit d'essayer les 4 possibilités $B, B' = \pm 1$.)
Conclusion sur la non localité de la mécanique quantique : d'après la figure, la mécanique quantique (vérifiée expérimentalement) viole l'inégalité de Bell $|\Delta_{loc}| \leq 2$. Donc la théorie quantique n'est pas locale (il n'existe pas de théorie locale à variables cachées).

10. Essayons de suivre le même calcul mais en mécanique quantique, afin de majorer $\Delta_{quant.}(\phi)$ (quelque soit l'état $|P\rangle$). On a

$$\begin{aligned} \left|\Delta_{quant.}(\phi)\right| &\leq \left|\langle AB\rangle - \langle AB'\rangle\right| + \left|\langle A'B\rangle + \langle A'B'\rangle\right| \\ &= \left|\langle P|\hat{A}\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right| + \left|\langle P|\hat{A}'\left(\hat{B} + \hat{B}'\right)|P\rangle\right| \end{aligned}$$

L'inégalité de Schwartz pour un produit scalaire entre vecteurs est $|\langle\psi|\varphi\rangle| \leq \|\psi\| \|\varphi\|$. Ici cela donne $\left|\langle P|\hat{A}\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right| \leq \left\|\hat{A}|P\rangle\right\| \left\|\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right\|$. Or $\left\|\hat{A}|P\rangle\right\| \leq \left\|\hat{A}\right\| \||P\rangle\| = 1$. On déduit

$$\left|\Delta_{quant.}(\phi)\right| \leq \left\|\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right\| + \left\|\left(\hat{B} + \hat{B}'\right)|P\rangle\right\|$$

Or pour $a, b \in \mathbb{R}$ on a $a + b \leq \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$ (en effet $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ et $2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2 \leq a^2 + b^2$ donc $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2 + b^2\right)$). On déduit

$$\left|\Delta_{quant.}(\phi)\right| \leq \sqrt{2\left(\left\|\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right\|^2 + \left\|\left(\hat{B} + \hat{B}'\right)|P\rangle\right\|^2\right)}$$

Finalement, on écrit

$$\begin{aligned} \left\|\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)|P\rangle\right\|^2 + \left\|\left(\hat{B} + \hat{B}'\right)|P\rangle\right\|^2 &= \langle P|\left(\hat{B} - \hat{B}'\right)^2|P\rangle + \langle P|\left(\hat{B} + \hat{B}'\right)^2|P\rangle \\ &= 2\langle P|\hat{B}^2|P\rangle + 2\langle P|\left(\hat{B}'\right)^2|P\rangle \leq 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

donc

$$\left|\Delta_{quant.}(\phi)\right| \leq \sqrt{2.4} = 2\sqrt{2} \simeq 2.82$$

Remarquer qu'avec l'état $|P_{12}\rangle$ considéré dans ce problème on n'atteind pas cette borne (seulement $\left|\Delta_{quant.}(\phi)\right| = 2.5$). Alain Aspect dans sa thèse a montré que en utilisant quatre polarisations distinctes on pouvait obtenir la borne choisissant $\left|\Delta_{quant.}(\phi)\right| = 2\sqrt{2}$ (voir http ://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/10/78/PDF/1983ASPECT.p pages 34-36).