Université Joseph Fourier. Master 1 Physique
TD de mécanique quantique, Frédéric Faure.

TD n°3
Spectre de l'oscillateur Harmonique.
La force de Casimir du vide quantique.

---

1 Spectre de l'oscillateur Harmonique (ex. de cours)

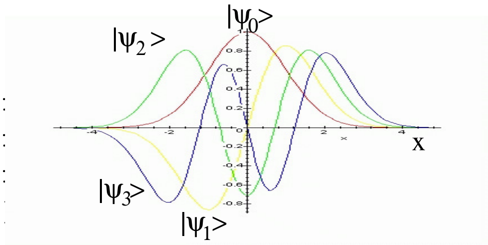
Références : [2] chap.V. [3].

L'objectif est de trouver les niveaux d'énergie du Hamiltonien $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \frac{1}{2}k\hat{q}^2$, décrivant une particule à une dimension $q \in \mathbb{R}$ dans un potentiel quadratique. Rappel : $\hat{p} = -i\hbar d/dq$, et $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{I}$. On pose $\omega = \sqrt{k/m}$.

1. Pourquoi ce modèle est important en physique ? donner un exemple.
2. On définit les opérateurs (vérifier qu'ils sont sans dimension) :
$$\hat{Q} = \left(\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}\right)^{1/2}\hat{q}, \quad \hat{P} = \left(\frac{1}{\hbar\sqrt{mk}}\right)^{1/2}\hat{p},$$
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q} + i\hat{P}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q} - i\hat{P}\right), \quad \hat{N} = a^\dagger a$$
Calculer les commutateurs $\left[\hat{Q}, \hat{P}\right], \left[a, a^\dagger\right], \left[\hat{N}, a\right], \left[\hat{N}, a^\dagger\right]$, et montrer que $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\hat{I}\right)$. On va maintenant chercher le spectre de l'opérateur $\hat{N}$.
3. On cherche la fonction $\psi_0(Q)$ définie par $a\psi_0 = 0$. Montrer que l'on obtient l'équation différentielle $\frac{d\psi_0}{dQ} = -Q\psi_0$ dont la solution normalisée est la Gaussienne $\psi_0(Q) = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{Q^2}{2}\right)$. Montrer que ψ_0 est fonction propre de $\hat{N}$.
4. Pour un entier $n \geq 1$, on définit par récurrence l'état ψ_n par $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}a^+\psi_{n-1}$. Par récurrence sur n montrer que $\hat{N}\psi_n = n\psi_n$ et que $\|\psi_n\|^2 = 1$.
5. Montrer que $a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$.
6. On cherche l'expression de la fonction $\psi_n(Q)$. Montrer la relation :
$$\psi_n(Q) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(Q - \frac{d}{dQ}\right)\psi_{n-1}(Q)$$

. A l'aide du logiciel gratuit **xcas** [1], dessiner les **fonctions d'Hermite** $\psi_n(Q)$ avec le code :

```
f0:=exp(-x^2/2);
f1:=1/(sqrt(2*1))*(x*f0-di
f2:=1/(sqrt(2*2))*(x*f1-di
f3:=1/(sqrt(2*3))*(x*f2-di
plot([f0,f1,f2,f3],x=-5..5
```



7. Pour simplifier l'écriture, on définit la fonction $H_n(Q)$ par l'écriture :$\psi_n(Q) = \langle Q|\psi_n\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{Q^2}{2}\right)\left(\frac{1}{n!2^n}\right)^{1/2} H_n(Q)$ et connaissant $\psi_0(Q)$ ci-dessus, on observe que $H_0(Q) = 1$. Montrer que $H_n(Q) = \left(2Q - \frac{d}{dQ}\right) H_{n-1}(Q)$. Déduire par récurrence que $H_n(Q)$ est en fait un polynôme de degré n à coefficients entiers appelé **polynome d'Hermite**, et calculer les premiers termes $H_1(Q), H_2(Q), H_3(Q)$.
8. Déduire de ce qui précède que les niveaux d'énergie de $\hat{H}$ sont $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, et que les fonctions propres associées sont $\psi_n(Q)$.
9. (**Optionnel)** Pour montrer que l'opérateur $\hat{N}$ n'a pas d'autres vecteurs propres, il faut montrer que ces états ψ_n forment une base de l'espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{N}$ est auto adjoint ($\hat{N}^+ = \hat{N}$), et déduire que les vecteurs propres ψ_n forment un ensemble orthonormés de vecteurs. On cherche une fonction $\varphi(Q)$ orthogonale à toutes les fonctions ψ_n. Comme $\psi_n \propto e^{-Q^2/2} H_n$ avec H_n polynome de degré n, cela implique $\int \varphi(Q)\, e^{-Q^2/2} P(Q)\, dQ = 0$ pour tout polynome P. En déduire que la transformée de Fourier de $\varphi(Q)\, e^{-Q^2/2}$ est nulle et donc que $\varphi = 0$.

2 La force de Casimir (1948)

(Lire : Wikipedia " Effet Casimir" ou Articles de Martin &Buenzli et B.Duplantier) C'est un effet assez surprenant qui montre que dans le "vide", il y a des "fluctuations quantiques" du champ électromagnétique qui ont des effets mesurables. Cet effet calculé par Casimir en 1948, a été observé en 1958 par Sparnay et encore plus récemment avec une grande précision. Considérons deux plaques métalliques (conducteurs parfaits) de surface S, séparés d'une distance $\ell \simeq 1\mu m$. On va montrer que le vide quantique électromagnétique induit une force attractive entre ces deux plaques appelée **force de Casimir** [1] :

$$F_{Casimir}(l) = -\left(\frac{\pi^2 \hbar c}{240\, \ell^4}\right) S \tag{1}$$

Remarquer que cette force décroit très vite avec la distance (en $1/\ell^4$), et que son expres-

1.
— Voici une courbe qui compare la théorie et les mesures expérimentales, obtenue par A.Roy et al. (1999) :

sion fait intervenir seulement les constantes fondamentales $\hbar c$. Sa valeur est très faible :

$$F_{Casimir} \simeq 10^{-7} N \text{ pour } \ell = 1\mu\text{m et surface } S = 1\text{cm}^2.$$

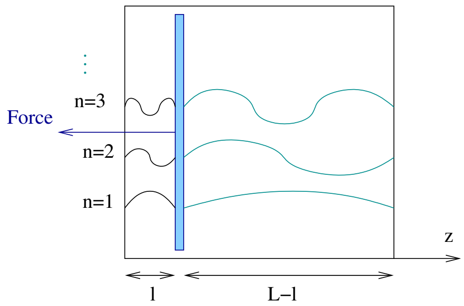


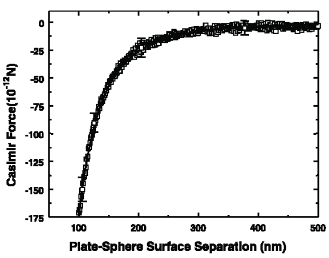
FIGURE 1 – Plaque métallique libre de bouger selon z dans une enceinte aux murs métalliques. Le vide quantique des modes électromagnétiques $n = 1, 2, 3\ldots$ est responsable de la force de Casimir.

1. Soit une boite métallique de côtés $L_x = L_y = L$ et d'épaisseur très fine $L_z = \ell \ll L$. Comme le champ électrique s'annulle sur les parois, les modes pouvant exister dans cette cavité ont par conséquent des longueurs d'onde selon (x, y, z) qui sont $\lambda_x = 2L/a$, $\lambda_y = 2L/b$, $\lambda_z = 2\ell/d$, indicés par des entiers $a, b, d > 0$. Montrer que la fréquence du mode indicé par (a, b, d) est

$$\omega_{a,b,d} = \frac{\pi c}{\ell} \left(\left(\frac{\ell}{L} \right)^2 \left(a^2 + b^2 \right) + d^2 \right)^{1/2}.$$

   On rappelle que si la cavité est "vide", chaque mode de fréquence ω a cependant une "énergie quantique du vide" $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Déduire une expression (formelle) de l'énergie du vide quantique électromagnétique dans cette cavité $\mathcal{E}(\ell)$, comme somme sur ces modes (en tenant compte des deux états de polarisation possibles). Quelle est l'origine de la divergence de $\mathcal{E}(\ell)$?

2. Pour éviter cette divergence, on introduit une **fréquence de coupure** [2] ω_c et on décide de multiplier l'énergie de chaque mode de fréquence ω par le facteur $\exp\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\right)$,



2. Physiquement, cette fréquence de coupure peut être la fréquence de coupure dans les métaux, appelée aussi fréquence plasma (pour $\omega < \omega_c$ le métal est réfléchissant, et pour $\omega > \omega_c$ le métal est transparent).

ce qui rend donc l'expression de $\mathcal{E}(\ell)$ convergente (on fera $\omega_c \to \infty$ à la fin du calcul[3]). Comme $\ell \ll L$, on pourra remplacer la somme sur (a,b) par une intégrale sur $a>0, b>0$, et ensuite utiliser des coordonnées polaires $a=\rho\cos\theta$,$b=\rho\sin\theta$. Remarquer que $\omega \mathrm{d}\omega = \left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 \rho \mathrm{d}\rho$. Montrer que

$$\mathcal{E}(l) \simeq \hbar\left(\frac{\pi}{2}\right)\sum_{d>0}\int_0^\infty \rho\omega e^{-\omega/\omega_c}\mathrm{d}\rho = \hbar\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{L}{\pi c}\right)^2\sum_{d>0}\int_{\omega_0}^\infty \omega^2 e^{-\omega/\omega_c}\mathrm{d}\omega$$

avec $\omega_0 = \frac{\pi c}{\ell}d$. Ensuite, on utilisera l'astuce $\int_{\omega_0}^\infty \omega^2 e^{-\omega/\omega_c}\mathrm{d}\omega = \left(\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_{\omega_0}^\infty d\omega\, e^{-\alpha\omega}\right)_{\alpha=\frac{1}{\omega_c}}$ et la formule de somme $\sum_{d>0}\alpha^d = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ pour déduire

$$\mathcal{E}(\ell) = \frac{\hbar c\pi^2 L_x^2}{2\ell^3}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x(e^x-1)}\right), \qquad x = \frac{\pi c}{\omega_c \ell}$$

3. Utiliser le développement :

$$\frac{1}{x(e^x-1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{1}{30.24}x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)$$

pour exprimer l'énergie du vide $\mathcal{E}(\ell)$ en puissances de ω_c. Montrer que dans la limite $\omega_c \to \infty$, $\mathcal{E}(\ell)$ diverge comme ω_c^4 , et calculer les termes sous dominants jusqu'au premier terme non divergent.

4. Calculer $U(\ell) = \mathcal{E}(\ell) + \mathcal{E}(L-\ell)$ qui est l'énergie du vide dans l'enceinte de la figure 1, et déduire l'expression de la force de Casimir définie par $F_{\text{Casimir}}(\ell) = -\frac{dU}{d\ell}$.

Références

[1] Parisse B. *Logiciel libre de calcul formel.* Taper xcas dans google.

[2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique.*

[3] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique.* http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement.

3. On choisit ici une fonction de troncation $e^{-\omega/\omega_c}$. Le résultat ne dépend pas du choix de cette fonction.