OSCILLATEUR HARMONIQUE : CORRECTIONS

Exercices prioritaires :

Exercice n° 1

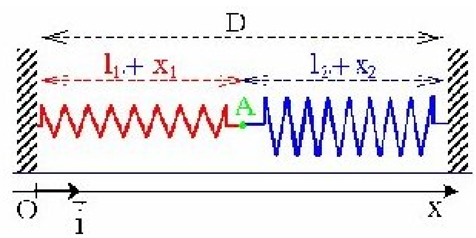
Deux ressorts accrochés ⋆

Deux ressorts sans masse de longueurs l_1 et l_2 au repos et de raideurs k_1 et k_2 sont accrochés bout à bout et tendus horizontalement entre deux murs distants de $D > l_1 + l_2$. Le dispositif est immobile.

Remarque : L'énoncé définissant les constantes de raideur des ressorts, il est implicitement supposé que l'on peut utiliser l'approximation linéaire pour modéliser l'élasticité des ressorts.

1. Calculer l'allongement de chacun des ressorts.

On note x_1 et x_2 les allongements respectifs des ressorts 1 et 2, à l'équilibre, comme représenté sur le schéma ci-contre.
Ces deux inconnues sont reliées par la relation $D = l_1 + x_1 + l_2 + x_2$, donc il suffit de trouver une équation sans inconnues supplémentaires pour pouvoir trouver x_1 et x_2.

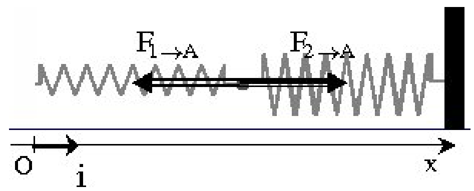


On va voir que ceci est possible en considérant le point d'attache A des deux ressorts.

Référentiel : terrestre, supposé galiléen (on ne demande pas ici de justification. On admettra que pour les problèmes posés dans ce TD cette hypothèse est vérifiée avec une bonne approximation. voir cours pour un peu plus de détails.)
Repère : On choisit comme repère $R(0, \vec{i})$ (voir le schéma ci-dessus)
Système : On considère comme système le point d'attache A des deux ressorts.
Bilan des forces extérieures(BFE) : Faisons un bilan des forces extérieures s'exerçant sur ce système :
-forces à distance : aucune, car la masse de ce point étant nulle, le poids est nul.
-forces de contact :

- la force de rappel exercée par le ressort 1 sur A : $\vec{F}_{1\to A} = -k_1 x_1 \vec{i}$
- la force de rappel exercée par le ressort 2 sur A : $\vec{F}_{1\to A} = k_2 x_2 \vec{i}$

PI : Le référentiel étant galiléen, on peut utiliser le principe d'inertie. Puisque le système est immobile, d'après le principe d'inertie, le système est isolé. Ainsi :



$$\vec{F}_{1\to A} + \vec{F}_{2\to A} = -k_1 x_1 \vec{i} + k_2 x_2 \vec{i} = \vec{0}.$$

Ainsi, en projetant cette relation sur Ox, on obtient : $0 = -k_1 x_1 + k_2 x_2$ (1), relation que l'on peut réécrire ainsi : $x_1 = \frac{k_2 x_2}{k_1}$.

On a donc bien obtenu une nouvelle équation reliant x_1 et x_2, sans inconnue supplémentaire. En utilisant $D = l_1 + l_2 + x_1 + x_2$, on obtient les résultats cherchés :

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2}(D - (l_1 + l_2)) \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(D - (l_1 + l_2)).$$

Remarques :
- Les résultats sont bien homogènes.
- Les résultats sont symétriques par échange des indices 1 et 2 : ceci est cohérent avec le fait que les deux ressorts ont des rôles équivalents
- Si la somme des longueurs à vide correspond à D, on s'attend à un allongement nul des ressorts, ce qui est bien le cas avec les relations obtenues.

(Cette étude a été menée en supposant les ressorts compressibles. On pouvait donc considérer le cas où $D < l_1 + l_2$. Ceci n'est pas toujours vérifié, par exemple avec ceux utilisés lors du TP, où les spires se retrouvent au contact les unes des autres lorsque l'on essaie de comprimer le ressort à partir de sa position de repos. Dans ce cas, l'approximation linéaire n'est plus valable et on ne peut donc pas utiliser les équations trouvées.)

2. Calculer pour chaque ressort la force qu'il exerce sur le mur auquel il est fixé. Comparer.

Afin de prévoir la force exercée par le mur sur le ressort 1, isolons maintenant le système consitué par le ressort 1.

Système : {ressort 1}

Bilan des forces extérieures :

-forces à distance : son poids, que l'on néglige ici en supposant les ressorts sans masse.

-forces de contact :

la force de rappel exercée par le ressort 2 au point A : $\vec{F}_{2\to A}$

la force exercée par le mur $\vec{F}_{mur\to 1}$.

PI - Le système étant à l'équilibre, d'après le PI : $\vec{F}_{2\to A} + \vec{F}_{mur\to 1} = \vec{0}$.

Ainsi : $\vec{F}_{mur\to 1} = -\vec{F}_{2\to A} = -k_2 x_2 \vec{i} = -\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}(D-(l_1+l_2))\vec{i}$.
Or $\vec{F}_{1\to mur} = -\vec{F}_{mur\to 1}$, donc :

$$\vec{F}_{1\to mur} = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}(D-(l_1+l_2))\vec{i}.$$

De même, en isolant le ressort 2, on obtient :

$$\vec{F}_{2\to mur} = -\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}(D-(l_1+l_2))\vec{i}.$$

On remarque que : $\vec{F}_{1\to mur}+\vec{F}_{2\to mur} = \vec{0}$, ce qui peut se réécrire : $\vec{F}_{mur\to 1}+\vec{F}_{mur\to 2} = \vec{0}$. Il s'agit de la relation que l'on obtient à l'aide du PI appliqué au système constitué par l'association des deux ressorts. Le résultat est donc cohérent.

3. Calculer la force qui agit sur le point commun aux deux ressorts, lorsque les ressorts sont écartés de x par rapport à la position d'équilibre.

Soit $\vec{F}$ la force exercée sur le point d'attache A.
On a : $\vec{F} = \vec{F}_{1\to A} + \vec{F}_{2\to A} = -k_1(x_1+x)\vec{i} + k_2(x_2-x)\vec{i}$.
Ainsi, en utilisant la relation (1), on obtient :

$$\vec{F} = -(k_1+k_2)x\vec{i}.$$

On constate que, dans cette association, les deux ressorts sont équivalents à un unique ressort accroché au mur de gauche, de constante de raideur k_1+k_2, et de longueur à vide l_1+x_1.

4. En supposant que ce point commun a une masse m, écrire l'équation qui régit le mouvement de m. Pour cela on repérera la masse sur un axe horizontal par sa position x ($x=0$ quand le système est immobile).

La RFD nous dit : $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{R}$ où le poids et la réaction du support (sans frottement) sont perpendiculaires au mouvement et se compensent. En projetant sur l'axe Ox et en utilisant la forme trouvée à la question précédente (x a bien la même définition) on a :

$$m\ddot{x} = -(k_1+k_2)x \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \left(\frac{k_1+k_2}{m}\right)x = 0$$

5. Déterminer complètement $x(t)$ en supposant qu'à $t=0$ la masse est lâchée depuis x_0 sans vitesse.

L'équation différentielle à résoudre est une équation différentielle homogène linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. La méthode générale de résolution consiste à rechercher des solutions exponentielles complexes. Ici nous sommes dans un cas classique (terme du premier ordre absent et terme constant positif) caractéristique de l'oscillateur harmonique. Les solutions sont des fonctions sinusoïdales de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{ou} \quad x(t) = \alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\sin(\omega_0 t)$$

Il est important de noter que nous avons 2 paramètres à déterminer à partir de conditions connues car l'équation est d'ordre 2.

Ici les deux conditions connues sont les conditions initiales sur la position et la vitesse : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

On trouve facilement ($A = x_0$ et $\phi = 0$) ou ($\alpha = x_0$ et $\beta = 0$) ce qui nous donne la solution complète :

$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

Exercice n° 2

Ressort et gravité ⋆

Une masse m est pendue à un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0. On repérera la position de la masse m par sa coordonnée z sur un axe vertical.

Orientons l'axe vertical par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$ dirigé vers le bas.

1. Déterminer la longueur l'_0 du ressort lorsque m est à l'équilibre.

Les forces sur la masse m sont son poids $m\overrightarrow{g} = mg\overrightarrow{u_z}$ et la force de rappel du ressort $\overrightarrow{F} = -k(l'_0 - l_0)\overrightarrow{u_z}$ (si $l'_0 > l_0$ le ressort est en extension et donc "tire vers le haut" ce qui explique le signe « - »). L'équilibre de la masse s'écrit donc :

$$m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad mg\overrightarrow{u_z} - k(l'_0 - l_0)\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad mg - k(l'_0 - l_0) = 0$$

On en déduit donc la position d'équilibre.

$$l'_0 = l_0 + \frac{mg}{k}$$

2. On écarte la masse vers le bas d'une distance Δz par rapport à sa position d'équilibre. Choisir avec astuce l'origine des "z", écrire l'équation du mouvement qui régit l'évolution de z.

Le choix de l'origine des z le plus naturel pourrait être celui correspondant à l'allongement « à vide ». Dans ce cas l'allongement du ressort vaudra z et la force de rappel s'écrira très simplement $\vec{F} = -kz\vec{u_z}$. Cependant nous savons par expérience que la masse va osciller autour de sa position d'équilibre et il apparaît donc judicieux de choisir l'origine en ce point. Dans ce cas la force de rappel s'écrit $\vec{F} = -k(z + l'_0 - l_0)\vec{u_z}$.
Le PFD s'écrit donc :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{z}\vec{u_z} = mg\vec{u_z} - k(z + l'_0 - l_0)\vec{u_z} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = mg - k(z - l'_0 - l_0)$$

Comme on a montré que $k(l'_0 - l_0) = mg$ on en déduit que l'équation du mouvement est :

$$m\ddot{z} = -kz$$

3. Résoudre cette équation en supposant qu'à $t = 0$ on a lâché la masse sans vitesse initiale.

L'équation différentielle à résoudre est une équation différentielle homogène linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. La méthode générale de résolution consiste à rechercher des solutions exponentielles complexes. Ici nous sommes dans un cas classique (terme du premier ordre absent et terme constant positif) caractéristique de l'oscillateur harmonique. Les solutions sont des fonctions sinusoïdales de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \text{ou} \quad z(t) = \alpha\cos(\omega_0 t) + \beta\sin(\omega_0 t)$$

Il est important de noter que nous avons 2 paramètres à déterminer à partir de conditions connues car l'équation est d'ordre 2.
Ici les deux conditions connues sont les conditions initiales sur la position et la vitesse : $z(0) = \Delta z$ et $\dot{z}(0) = 0$.
On trouve facilement ($A = \Delta z$ et $\phi = 0$) ou ($\alpha = \Delta z$ et $\beta = 0$) ce qui nous donne la solution complète :

$$z(t) = \Delta z \cos(\omega_0 t) \qquad \text{avec} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ℹ Remarquez que si le choix de l'origine des z avait été fait sur la position d'équilibre du ressort à vide (l_0), l'équation différentielle du mouvement aurait comporté un second membre constant. Il est alors possible de la ramener à une équation homogène en faisant le changement de variable $z \to Z + \frac{mg}{k}$ (ce qui revient à changer l'origine des z). L'autre possibilité est de résoudre l'équation telle quelle en prenant la solution générale sans second membre et une solution particulière (ici $z = \frac{mg}{k}$ est une solution particulière évidente).

4. Reprendre le problème en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

Toutes les forces considérées sont conservatives on peut donc appliquer le théorème de conservation de l'énergie mécanique totale.

Le poids dérive de l'énergie potentielle $-mgz$ (Oz est vers le bas). La force de rappel dérive de l'énergie élastique $\frac{1}{2}k(z + l'_0 - l_0)^2$. Le théorème s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k(z + l'_0 - l_0)^2 = C^{te}$$

Après dérivation on a : $m\dot{z}\ddot{z} - mg\dot{z} + k\dot{z}(z + l'_0 - l_0) = 0$ et en simplifiant par $\dot{z}$ on retrouve l'équation du mouvement précédente.

Exercice n° 3

Le pendule simple ⋆⋆ ☺

La solution se trouve dans le poly de TD

Un pendule, constitué d'une boule de masse m attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, est suspendu à un point fixe O. On met le pendule en mouvement, par exemple en l'écartant d'un angle θ_0 à la verticale, le fil étant tendu, puis en le lâchant sans vitesse initiale. On néglige tous les frottements. L'objectif est de faire le tour du problème, lequel a de nombreuses applications :

– Etablir l'équation différentielle du mouvement de la boule. Cette équation différentielle générale n'a pas de solution analytique en termes d'équation du mouvement (expression des coordonnées en fonction du temps), c'est-à-dire que l'on ne sait pas la résoudre avec un crayon

et un papier, sauf dans le cas de *l'approximation des petites oscillations*. Hormis quelques cas particuliers, seuls des calculs approchés (effectués par ordinateur) permettent de s'en sortir.
– Résoudre l'équation différentielle dans le cas de *l'approximation des petites oscillations* et en déduire dans ce cas l'équation temporelle du mouvement.
– Il est cependant possible de calculer analytiquement la vitesse en fonction de la position de la boule **dans le cas général**.
– L'expression de la vitesse permet de connaître la tension du fil en fonction de la position de la boule.

Résolution du problème général :
Pour ceux qui veulent se débrouiller tout seul, traiter les différentes étapes ci-dessus.
Résolution guidée :
Soit un repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$, O étant le point où est fixé le fil du pendule, O_x l'axe vertical dirigé vers le bas et O_y l'axe horizontal dirigé vers la droite. Soit θ l'angle polaire entre O_x et le fil du pendule compté positivement dans le sens direct.

1. Equation différentielle du mouvement :
   (a) Que peut on dire sur le mouvement de la boule ? en déduire l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération en fonction de θ, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.
   (b) Transcrire les conditions initiales pour θ et $\frac{d\theta}{dt}$.
   (c) Faire le bilan des forces extérieures exercées sur la boule.
   (d) Ecrire le principe fondamental de la dynamique. Projeter l'équation vectorielle obtenue dans les directions de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.
   (e) En déduire l'équation différentielle du mouvement.
2. Approximation des petites oscillations :
   Calculer l'angle θ (en degrés) tel que l'erreur relative faite en écrivant $\sin(\theta) = \theta$ est égale à 5%. Réécrire l'équation différentielle en faisant l'hypothèse que θ reste suffisamment petit pour que $sin(\theta) \simeq \theta$. Résoudre cette nouvelle équation différentielle pour établir l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
3. Vitesse en fonction de la position :
   Il est tout à fait possible (et c'est souvent le cas) d'exprimer la vitesse en fonction de la position, alors que la vitesse ou la position en fonction du temps ne trouvent pas de solution. Voici la séquence à suivre :
   (a) reprendre l'équation différentielle du mouvement sans faire d'approximation.
   (b) pour éviter la dérivée seconde, réécrire l'équation en posant $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$.
   (c) faire passer dt au numérateur.
   (d) on se retrouve avec d'un côté $d\omega$ qui serait facile à intégrer, et de l'autre $\sin\theta\, dt$ qui ne s'intègre pas, mais qui serait facile à intégrer si on avait $\sin\theta\, d\theta$.

(e) remplacer donc $\sin\theta\, dt$ par $\sin\theta\, d\theta\, \frac{dt}{d\theta}$, puis $\frac{dt}{d\theta}$ par $\frac{1}{\omega}$.

(f) intégrer séparément les différentielles sur ω et sur θ, pour obtenir l'expression finale $\omega(\theta)$.

4. Tension du fil :
Reprendre l'équation obtenue par la projection du PFD suivant $\vec{u}_r$ et en déduire l'expression du module de la force de tension du fil en fonction de θ.

Application :
Un enfant un peu trop grand se balance de bon coeur sur une balançoire dont les cordes sont usées. En quel point de la trajectoire le risque de rupture des cordes est-il le plus grand ?

Exercices supplémentaires :

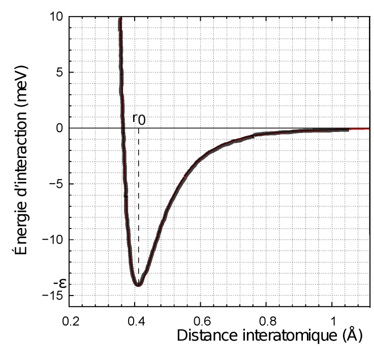
Exercice n° 4

Molécule diatomique**

Une molécule de diazote (N_2) peut être vue comme un système de deux masses m liées. On associe à la liaison une énergie potentielle caractérisant la cohésion de la molécule.

Cette énergie est une fonction $E_p(r)$ où r est la distance séparant les deux atomes. $E_p(r)$ est caractérisée par :

- $E_p(r) \to 0$ lorsque $r \to +\infty$ (l'énergie d'interaction est nulle lorsque les deux atomes sont éloignés)
- $E_p(r) \to +\infty$ lorsque $r \to 0$ (il est impossible de superposer les deux atomes)
- $E_p(r)$ passe par un minimum $E_0 < 0$ en $r = r_0$ (en r_0 la liaison est à son point d'équilibre)



1. En raisonnant sur la forme mathématique de $E_p(r)$, montrer qu'il existe une zone autour de r_0 dans laquelle la liaison chimique peut être modélisée par un ressort.

En écrivant $E_p(r)$ par son développement de Taylor :

$$E_p(r) = E_p(r_0) + \frac{dE_p}{dr}(r_0)(r-r_0) + \frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0)\frac{(r-r_0)^2}{2} + \ldots + \frac{d^nE_p}{dr^n}(r_0)\frac{(r-r_0)^n}{n!} + \ldots$$

on voit qu'autour de r_0, point pour lequel $\frac{dE_p}{dr}(r_0) = 0$, on peut trouver un domaine dans lequel l'énergie est décrite par :

$$E_p(r) = E_p(r_0) + \frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0)\frac{(r-r_0)^2}{2}$$

Cette forme quadratique est caractéristique de celle de l'oscillateur harmonique. Notez que le signe positif de $\frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0)$ est impératif (minimum d'énergie, force de rappel). Notez aussi que si le terme d'ordre 2 est nul alors le premier terme sera d'ordre 4 et on sort du cadre de l'oscillateur harmonique.

2. Donner l'expression de la constante de raideur k en fonction de $\frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0)$

L'énergie élastique d'un ressort de raideur k est $E_l = \frac{1}{2}k\Delta l^2$. Par analogie avec ce qui précède on a :

$$k = \frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0)$$

Exercice n° 5

Ressort et frottement visqueux : analogie électrocinétique**

Une masse m est accrochée à un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0. Le système est posé sur un support horizontal n'exerçant aucun frottement sur la masse. On repérera la position de la masse m par sa coordonnée x sur un axe horizontal ($x = -l_0$ repère le point fixe du ressort et $x = 0$ repère le point d'équilibre de la masse). L'air (le fluide dans lequel se déplace la masse) exerce une force de frottement visqueux qui s'exprime $\vec{f} = -\eta\vec{v}$ où η est un coefficient positif dépendant de la viscosité du fluide et de la forme de la masse (aérodynamique).

1. Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse.

Les forces extérieures s'appliquant sur la masse m sont : le poids $m\vec{g}$ (vertical), la réaction du support $\vec{R}$ (verticale car il n'y a pas de frottements), la force de rappel (horizontale) $\vec{F} = -kx\vec{u_x}$ et la force visqueuse (horizontale) $\vec{f} = -\eta\vec{v} = -\eta\dot{x}\vec{u_x}$. Le PFD nous dit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} \quad \Rightarrow \quad \text{sur } (Oz) \quad 0 = R - mg \quad \text{et sur} \quad (Ox) \quad m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x}$$

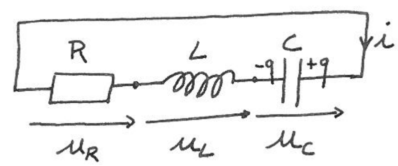
L'équation sur (Oz) ne nous donne rien sur le mouvement (la réaction compense le poids). Le mouvement est donné par l'équation sur Ox :

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

2. Comparer cette équation à celle qui régit la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série.

La loi des mailles appliquée au circuit s'écrit : $u_R + u_L + u_C = 0$. Par ailleurs nous connaissons les propriétés du circuit vis à vis de la charge du condensateur (attention aux conventions adoptées sur la figure pour les signes).

- Courant : $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$
- Capacité : $u_C = \frac{q}{C}$
- Résistance : $u_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = RC\dot{u}_C$
- Inductance : $u_L = L\frac{di}{dt} = LC\ddot{u}_C$



On a donc $\ddot{u}_C + \frac{R}{L}\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C$

3. Discuter des différents régimes que l'on obtient pour le mouvement en fonction de l'importance relative des deux paramètres $\alpha = 4km$ et $\beta = \eta^2$.

Nous avons une équation différentielle homogène, linéaire du deuxième ordre à coefficients constants. En cherchant des solutions sous la forme e^{rt} où $r \in \mathbb{C}$ on montre que r doit vérifier l'équation $r^2 + \frac{\eta}{m}r + \frac{k}{m} = 0$. La forme du mouvement va dépendre du fait que ces solutions soient purement réelles ou non. C'est le signe du discriminant $\Delta = (\eta^2 - 4km)/m$ qui va donc définir les différents régimes.

$\alpha < \beta$ $(\Delta > 0)$: les deux solutions sont réelles et négatives $r_1 = -1/\tau_1$ et $r_2 = -1/\tau_2$. La solution de l'équation différentielle va s'écrire :

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}} + Be^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

On a un mouvement purement amorti caractérisé par les deux constantes de temps τ_1 et τ_2

$\alpha > \beta$ $(\Delta < 0)$: les deux solutions sont complexes conjuguées et à partie réelle négative : $r_1 = -1/\tau + i\omega$ et $r_2 = -1/\tau - i\omega$. La solution de l'équation différentielle va s'écrire :

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t + \phi)$$

On a un mouvement oscillant amorti. La pseudo période d'oscillation est $T = 2\pi/\omega$ et la constante de temps d'amortissement est τ. On peut noter que la pseudo période tend vers $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ lorsque le frottement diminue et s'allonge pour tendre vers l'infini lorsque le frottement augmente pour atteindre un niveau tel que $\eta^2 = 4km$.

$\alpha = \beta$ ($\Delta = 0$) : on a une seule solution réelle et négative deux fois dégénérée $r = -1/\tau = -\eta/2m$. La solution de l'équation différentielle va s'écrire :

$$x(t) = (At + B)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

C'est le régime critique (retour à l'équilibre le plus rapide sans oscillations).

Exercice n° 6

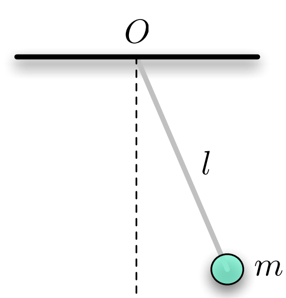
Pendule simple et énergie ⋆⋆

On considère une masse ponctuelle m fixée au bout d'une tige rigide, de longueur l, pouvant tourner librement dans un plan vertical autour de l'autre extrémité O.

1. Définir une coordonnée représentant de manière commode la position de la masse m.

La tige étant rigide et de longueur l constante, le mouvement de la masse m sera circulaire de centre O. La description en coordonnées polaire est donc la plus adaptée. La coordonnée θ permet alors de définir complètement le mouvement.

2. Écrire son énergie cinétique E_c et son énergie potentielle E_p en fonction de cette coordonnée et en donner une représentation graphique.

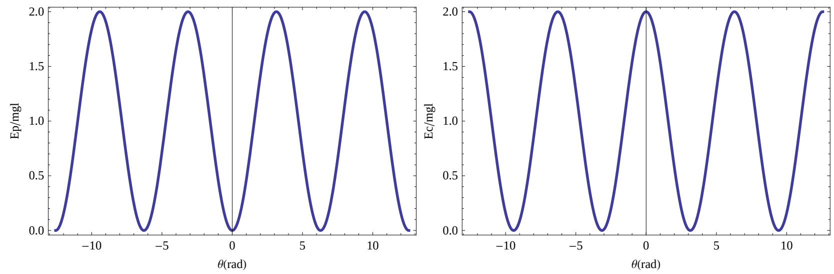


Les forces s'appliquant à la masse sont son poids (vertical) et la réaction de la tige (portée par la tige) qui ne travaille pas puisque perpendiculaire à la trajectoire. L'énergie mécanique est donc conservée et l'énergie potentielle ne dérive que du poids ($E_p = mgh$ où h est l'élévation de la masse).

En prenant comme origine d'énergie potentielle le point bas de la trajectoire on a :

$$E_p = mgl(1-\cos\theta) \quad \text{et} \quad E_c + E_p = c^{te} = E_{m0} \quad \Rightarrow \quad E_c = E_{m0} + mgl(\cos\theta - 1)$$

Figure : E_p *et* E_c *pour* $E_{m0} = 2mgl$



3. Discuter qualitativement le mouvement de la masse m, selon la valeur de son énergie mécanique totale.

Si $E_{m0} > 2mgl$, le pendule tourne.
Si $E_{m0} = 2mgl$, le pendule arrive à $\theta = \pi$ avec une vitesse nulle.
Si $E_{m0} < 2mgl$, le pendule oscille entre $\pm\theta_{max}$ avec $mgl(1-\cos\theta_{max}) = E_{m0}$.

4. On suppose que la masse m reste au voisinage de sa position d'équilibre. Écrire une expression du développement limité de E_p autour de cette position d'équilibre. En déduire l'équation du mouvement. A quel autre système connu est-on ramené ?

Pour θ petit, $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$, ce qui donne :

$$E_p = mgl\frac{\theta^2}{2} \qquad \text{et} \qquad E_c = ml^2\frac{\dot{\theta}^2}{2}$$

On écrit la conservation de l'énergie mécanique et on la dérive :

$$mgl\frac{\theta^2}{2} + ml^2\frac{\dot{\theta}^2}{2} = c^{te} \quad \Rightarrow \quad mgl\dot{\theta}\theta + ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

On est ramené à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Rappelons que la solution de cette équation différentielle est de la forme

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \Phi)$$

Exercice n° 7

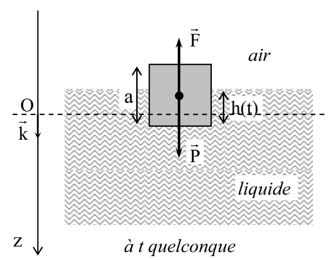
Oscillations d'un cube dans l'eau ⋆⋆⋆

Un cube de côté a, de masse volumique ρ_c, flotte en équilibre dans un liquide de masse volumique ρ_L ($\rho_L > \rho_c$). Les conditions sont telles que le cube ne bascule pas, gardant toujours sa face inférieure horizontale. On ne prend pas en compte la pression de l'air, ni les frottements visqueux avec le fluide. On choisit un repère dont l'origine se situe au niveau de la base du cube lorsqu'il est à l'équilibre dans le fluide. A l'instant $t = 0$ on enfonce le cube dans le fluide (hauteur de cube immergée h_0) et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas où $h_0 < a$.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.
Système : le cube de masse constante $m = \rho_c a^3$.
Repère : R(O,$\vec{k}$) avec O à la base du cube à l'équilibre et $\vec{k}$ dirigé vers le bas.
Mouvement : mouvement rectiligne vertical.
Système de coordonnées cartésiennes, position de la base du cube $z = z_{base}$.

Cinématique :
$\overrightarrow{OM} = z\vec{k}$
$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{z}\vec{k}$
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{z}\vec{k}$



Forces extérieures :
Forces à distance :
- poids du cube $\vec{P} = m_{cube} g\vec{k} = \rho_c a^3 g\vec{k}$

Forces de contact :
- poussée d'Archimède $\vec{F} = -m_{liquide} g\vec{k} = -\rho_L a^2 (h_{eq} + z) g\vec{k}$ où h_{eq} est la hauteur immergée à l'équilibre.

PFD : $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \rho_c a^3 g\vec{k} - \rho_L a^2 (h_{eq} + z) g\vec{k} = \rho_c a^3 \ddot{z}\vec{k}$
$\Rightarrow$ en projetant sur Oz : $\rho_c a g - \rho_L (h_{eq} + z) g = \rho_c a \ddot{z}$

La situation d'équilibre telle que $\ddot{z} = 0$ et $z = 0$ donne la hauteur immergée à l'équilibre $h_{eq} = \frac{\rho_c}{\rho_L} a$.

L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{z} + \frac{g\rho_L}{a\rho_c} z = 0$$

2. En déduire l'équation du mouvement du cube en fonction du temps. Préciser la période des oscillations.

L'équation différentielle peut s'écrire : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g\rho_L}{a\rho_c}}$

Solution générale : $z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ où A et ϕ sont des constantes d'intégration que l'on détermine par les conditions initiales.

Conditions initiales : on lâche le cube avec une hauteur immergée h_0 sans vitesse initiale, donc : $z(t=0) = h_0 - h_{eq}$ et $\dot{z}(t=0) = 0$.
Comme $\dot{z}(t) = -A\omega\sin(\omega_0 t + \phi)$, on en déduit $\phi = 0$ et $A = h_0 - h_{eq}$.

La solution s'écrit : $z(t) = (h_0 - h_{eq})\cos(\omega_0 t)$
C'est un mouvement oscillatoire harmonique. La période des oscillations est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{a\rho_c}{g\rho_L}}$$

3. Quelle doit être la valeur de h_0 pour que le cube puisse bondir hors du liquide ?

Le cube bondit hors de l'eau si la base du cube atteint la surface de l'eau, c'est à dire si la valeur minimale de z vaut $-h_{eq}$ ce qui s'écrit $-(h_0 - h_{eq}) = -h_{eq}$, d'où la condition $h_0 > 2h_{eq}$ pour bondir hors de l'eau.

Avec la condition $h_0 < a$, ce résultat implique que $h_{eq} < a/2$, c'est à dire $\rho_c < \rho_L/2$. La masse volumique du cube doit donc être inférieure à la moitié de celle du liquide pour que cette situation soit possible.

Exercice n° 8

Ressort et frottement solide ⋆⋆⋆

Une masse m est accrochée à un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0. Le système est posé sur un support horizontal exerçant un frottement solide sur la masse caractérisé par ses coefficients statique k_s et dynamique k_d ($k_s > k_d$ et on prendra ici $k_s = \frac{5}{4}k_d$). On repérera la position de la masse m par sa coordonnée x sur un axe horizontal ($x = -l_0$ repère le point fixe du ressort et $x = 0$ repère le point d'équilibre de la masse lorsqu'il n'y a pas de frottement).

Il est rappelé que le frottement solide devra être pris en compte de la manière suivante : Le support exerce sur la masse une réaction compensant le poids (sur l'axe Oz) et une force de frottement (sur l'axe Ox)

- Tant que la masse est immobile la force de frottement compense la force de rappel si celle ci est moins intense que $k_s mg$.
- Dès que la masse bouge la force de frottement est constante, s'oppose au mouvement et a pour intensité $k_d mg$.

1. Déterminer quelle est la valeur maximale d'étirement $x = x_L > 0$ (ou contraction $x = -x_L$) du ressort en dessous de laquelle la masse reste immobile si lâchée en cette position.

Si la masse est écartée de x_L elle subit une force de rappel d'intensité kx_L. Par ailleurs pour que la masse reste immobile il faut que le support génère sur la masse une force qui compense la force de rappel. La réaction tangentielle du support étant limitée à $k_s mg$ on en déduit que :

$$x_L = \frac{k_s mg}{k}$$

2. À $t = 0$ on écarte la masse d'une valeur $x_0 > x_L$. Écrire l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse en définissant clairement quand cette équation est applicable.

Le PFD projeté sur l'axe Ox s'écrit $m\ddot{x} = -kx + k_d mg$. Le deuxième terme de la partie droite de l'équation est le terme de frottement. Il a pour intensité $k_d mg$ car la masse a été écartée au delà de x_L et donc elle va bouger. Le signe positif de la force est du au fait que celle ci s'oppose au mouvement et qu'ici la vitesse sera négative au début du mouvement (la masse est rappelée vers $x = 0$). L'équation est donc valable tant que la vitesse est positive ($\dot{x} > 0$)

3. Montrer que le mouvement de la masse est bien une oscillation de même période que s'il n'y avait pas de frottement mais que le centre d'oscillation est déplacé : le déterminer.

Nous avons une équation différentielle du deuxième ordre avec second membre. La solution générale de l'équation sans second membre est de la forme $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ avec $\omega = \sqrt{k/m}$. Une solution particulière évidente est $x = \frac{k_d mg}{k}$. La solution générale aura donc la forme :
$x(t) = \frac{k_d mg}{k} + A\cos(\omega t + \phi)$ où $\phi = 0$ et $A = x_0 - \frac{k_d mg}{k}$ sont déterminés par les conditions initiales ($x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$). La forme de la solution s'écrit donc :

$$x(t) = \frac{k_d mg}{k} + \left(x_0 - \frac{k_d mg}{k}\right)\cos(\omega t) \quad \leftrightarrow \quad X(t) = X_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad X = x - \frac{k_d mg}{k}$$

4. Expliquer ce que l'on doit faire pour décrire la suite du mouvement lorsque la masse s'arrête pour changer de sens.

En $X = -X_0$ c'est à dire en $x = -x_0 + 2\frac{k_d mg}{k}$ la vitesse s'annule pour changer de sens.
- Vérifier si la masse peut repartir c'est à dire si $-x_L > -x_0 + 2\frac{k_d mg}{k}$
- Si oui, l'équation qui régit le mouvement devient $m\ddot{x} = -kx - k_d mg$. On voit très facilement que la solution s'obtient en changeant le signe de k_d. Le mouvement est donc un mouvement d'oscillation de même fréquence mais autour de la position $-\frac{k_d mg}{k}$.
- Ce mouvement est valable pendant une durée $T/2$ jusqu'à ce qu'on atteigne le maximum où la vitesse s'annule à nouveau

5. En supposant que $x_0 = \frac{13k_d mg}{2k}$ décrire le mouvement complet : à quel instant t_F et en quel point x_F la masse s'arrête t'elle définitivement ?

Pendant la première demi période le système va osciller de $+\frac{13k_d mg}{2k}$ vers $-\frac{9k_d mg}{2k}$. Une demi période supplémentaire va l'amener en $+\frac{5k_d mg}{2k}$. Enfin lors d'une troisième demi période la masse va revenir en $-\frac{k_d mg}{2k}$ qui est dans la zone d'équilibre statique. Elle va donc s'immobiliser en ce point au temps :

$$x_F - \frac{k_d mg}{2k} \qquad \text{et} \qquad t_F = \frac{3}{2}T = \frac{3\pi}{\omega} = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$