CINÉMATIQUE : CORRECTIONS

Exercices prioritaires :

Exercice n° 1

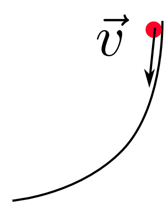
Vrai ou faux ? ⋆

Justifiez vos réponses.

1. L'accélération d'un point matériel dont la vitesse est constante (50 km/h) est systématiquement nulle.

Faux : l'accélération est nulle à condition que la vitesse soit constante à tout point de vue (intensité et direction). Par exemple, un objet circulant sur une trajectoire circulaire à vitesse constante a une accélération centripète v^2/R.

2. Une balle glisse sans frottement dans une pente incurvée. Ce faisant :
   (a) Sa vitesse augmente et son accélération diminue
   (b) Sa vitesse diminue et son accélération augmente
   (c) Les deux augmentent
   (d) Les deux sont constantes
   (e) Les deux diminuent



Sa vitesse augmente et son accélération diminue. Concernant la vitesse le problème est simple. On peut y répondre en faisant appel au th de l'E_c ou encore à la conservation de l'énergie mécanique totale (les forces sont conservatives car la réaction ne travaille pas et le poids dérive du potentiel gz). L'énergie potentielle diminue lorsque la balle descend donc sa vitesse augmente (énergie cinétique). Pour l'accélération c'est plus délicat. L'accélération tangentielle correspond à la projection de $\vec{g}$ sur la trajectoire. Comme la trajectoire s'incurve de la verticale vers l'horizontale cette projection diminue : l'accélération tangentielle diminue. L'accélération normale est v^2/R où R est le rayon de courbure. Il n'est donc pas du tout évident qu'elle diminue (en tout cas en permanence). Elle va sans doute finir par s'annuler si la trajectoire ne remonte jamais.

3. Un film montre la chute d'un objet (qui a donc une accélération dirigée vers le bas). Si on projette le film à l'envers (de la fin, vers le début), l'accélération sera-t-elle dirigée :

(a) vers le bas ?

(b) vers le haut ?

Vers le bas : le film à l'envers montre un objet qui monte avec une vitesse qui se réduit (la vitesse augmente dans le film à l'endroit). L'accélération est donc opposée à la vitesse (vers le haut) : elle est vers le bas.

Exercice n° 2

Mouvement avec accélération constante ⋆⋆

Quelle est la trajectoire d'un point subissant une accélération vectorielle constante ?

On peut choisir une repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de façon à ce que l'accélération soit $\vec{a} = a_0 \vec{\jmath}$, la vitesse initiale soit $\vec{v}_0 = v_{x0}\vec{\imath} + v_{y0}\vec{\jmath}$ et le point O soit le point de départ.

Par intégrations successives on peut aisément calculer les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \vec{a} &= \vec{a}_0 \\ \vec{v} &= \vec{a}_0 t + \vec{v}_0 \\ \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} &= a_0 \vec{\jmath} \\ \vec{v} &= v_{x0}\vec{\imath} + (a_0 t + v_{y0})\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{OM} &= v_{x0} t \vec{\imath} + (\frac{1}{2} a_0 t^2 + v_{y0} t)\vec{\jmath} \end{cases} \Rightarrow M \begin{cases} x &= v_{x0} t \\ y &= \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_{y0} t \\ z &= 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un mouvement parabolique d'équation : $y = \frac{a_0}{v_{x0}^2} x^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} x$. Le plan de la parabole n'est autre que le plan définit par $\vec{a}$ et $\vec{v}_0$.

1. Montrer que le mouvement correspondant n'est en général pas uniformément varié.

On entend par mouvement uniformément varié un mouvement dont le module de la vitesse est une fonction linéaire du temps $||\vec{v}|| = \alpha t + \beta$. On peut calculer le module de la vitesse :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_0^2 + a^2 t^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{v}_0 t}$$

Qui, de façon générale, n'a aucune raison d'être une fonction linéaire de t...

2. A quelle condition cette trajectoire est-elle rectiligne ?

La trajectoire est rectiligne pour $\vec{v} \parallel \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ (accélération colinéaire à la vitesse), c'est à dire $(\vec{a}t + \vec{v}_0) \parallel \vec{a}$. Or, comme de façon évidente $\vec{a} \parallel \vec{a}t$, on en déduit :

$$\text{Mouvement rectiligne} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_0 \parallel \vec{a}$$

3. Dans quel cas particulier le mouvement est-il uniformément varié ?

Le mouvement est uniformément varié si d'après la question 1 on a :

$$\sqrt{v_0^2 + a^2 t^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{v}_0 t} = \alpha t + \beta \quad \Leftrightarrow \quad v_0^2 + a^2 t^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{v}_0 t = (\alpha t + \beta)^2$$

Les deux seuls cas possibles sont $\vec{a}\cdot\vec{v}_0 = \pm a v_0$ réalisés si $\vec{v}_0 \parallel \vec{a}$ (mvt rectiligne) et donnant $||\vec{v}|| = v_0 \pm a t$ (mouvements rectilignes uniformément accéléré ou décéléré).

Exercice n° 3

Avion de chasse ⋆

Un avion de chasse vole à 1800 km/h suivant une trajectoire circulaire (looping) située dans un plan vertical.

1. Calculer la position, la vitesse et l'accélération du pilote en coordonnées cartésiennes et polaires.

On part des équations du mouvement :

$$\begin{cases} r = R & \theta = \omega t & x = R\cos\theta & y = R\sin\theta \\ \dot{r} = 0 & \dot{\theta} = \omega & \dot{x} = -R\omega\sin\theta & \dot{y} = R\omega\cos\theta \\ \ddot{r} = 0 & \ddot{\theta} = 0 & \ddot{x} = -R\omega^2\cos\theta & \ddot{y} = -R\omega^2\sin\theta \end{cases}$$

et on obtient directement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r &= R\cos\theta\vec{\imath} + R\sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta &= -R\omega\sin\theta\vec{\imath} + R\omega\cos\theta\vec{\jmath} \\ \vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r &= -R\omega^2\cos\theta\vec{\imath} - R\omega^2\sin\theta\vec{\jmath} \end{aligned}$$

2. Sachant qu'un pilote entraîné supporte au total $6g$ ($5g$ plus l'accélération de pesanteur g), quel est le rayon minimum qu'il peut donner à la trajectoire ?

La norme de l'accélération s'écrit :

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$$

Et on obtient directement :

$$R_{min} = \frac{v^2}{|\vec{a}|_{max}} = \frac{v^2}{5g} = 5097\,m$$

Remarque : dans ce type d'exercice, il faut partir des relations suivantes :
– $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
– $\vec{v} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$
– $\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$
et remplacer x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ, $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ par leurs valeurs respectives.

Exercice n° 4

Détermination d'un mouvement polaire ⋆⋆ ☺

Le corrigé est dans le polycopié de TD.

Un mobile ponctuel M a une vitesse $\vec{v}(t) = ae^{-\lambda t}\vec{u}_\theta$ en coordonnées polaires. La position initiale du mobile est donnée par $\theta(t=0) = 0$ et $r(t=0) = r_0$. On se propose d'étudier le mouvement de M.

1. Quelle est la dimension de a et $1/\lambda$? Que représentent-ils physiquement ?
2. Exprimer les équations temporelles du mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$.
3. Quelle est la trajectoire de M ? Faire un dessin.
4. Calculer le vecteur accélération de M en coordonnées polaires.
5. Le mouvement est-il uniforme, accéléré, uniformément accéléré, autre ?
6. La connaissance du vecteur vitesse est elle suffisante pour répondre à la question 2 ? à la question 4 ? Expliquer.

Exercice n° 5

Détermination d'un mouvement cylindrique ⋆⋆

Un mouvement est représenté en coordonnées cylindriques par $r = a$, $\theta = 3bt^2$ et $z = 4abt^2$.

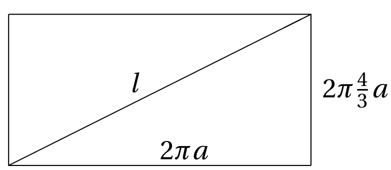


FIGURE 1: un tour ($\theta = 2\pi$) de l'hélice déroulée

1. Quelles sont les dimensions des deux constantes a et b ?

a a la dimension de r donc une longueur. b a la dimension de θ/t^2 donc l'inverse d'un temps au carré. $\Longrightarrow a \sim [L]$ et $b \sim [1/T^2]$

2. Quelle est la trajectoire ?

De $r = a$, on en déduit que dans le plan $x0y$, la trajectoire est un cercle. Comme par ailleurs $z = \frac{4a\theta}{3}$, on en déduit que la trajectoire est une hélice d'axe Oz de rayon a et de pas $\frac{8\pi a}{3}$.

3. Calculer à l'instant t la distance parcourue par le mobile (on pourra s'aider en se représentant la trajectoire sur le cylindre déroulé).

Sur la figure (1), on a déroulé un tour de l'hélice. Par le théorème de Pythagore, on obtient alors :

$$l = (a\theta)^2 + \left(\frac{4}{3}a\theta\right)^2 = a\theta\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}a\theta$$

$$\text{D'où :} \qquad s(t) = \frac{5}{3}a3bt^2 = 5abt^2$$

4. Calculer son vecteur vitesse et son accélération (en coordonnées cylindriques).

$$\text{De} \quad \left\{ \begin{array}{lll} r = a & \theta = 3bt^2 & z = 4abt^2 \\ \dot{r} = 0 & \dot{\theta} = 6bt & \dot{x} = 8abt \\ \ddot{r} = 0 & \ddot{\theta} = 6b & \ddot{z} = 8ab \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \overrightarrow{OM} & = & a\vec{u}_r + 4abt^2\vec{u}_z \\ \vec{v} & = & 2abt[3\vec{u}_\theta + 4\vec{u}_z] \\ \vec{a} & = & 2ab[-18bt^2\vec{u}_r + 3\vec{u}_\theta + 4\vec{u}_z] \end{array}$$

5. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire. Quel est l'angle α du vecteur vitesse avec le plan horizontal (calculer $\vec{u}_t \cdot \vec{u}_\theta$) ?

Par définition,

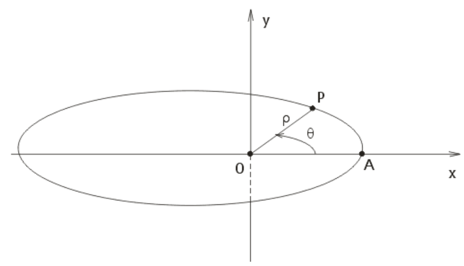
$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3\vec{u}_\theta + 4\vec{u}_z}{5}$$

Comme $|\vec{u}_t| = |\vec{u}_\theta| = 1$, on en déduit : $\cos(\alpha) = \vec{u}_t \cdot \vec{u}_\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 53°$

Exercices supplémentaires :

Exercice n° 6

Mouvement elliptique ⋆⋆



Un satellite décrit une trajectoire elliptique (voir Figure) dont l'équation en coordonnées polaires (avec l'origine au foyer) est :

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$$

ou p et $0<e<1$ sont deux paramètres constants, respectivement le paramètre et l'excentricité de l'ellipse). On sait par ailleurs que la conservation du moment cinétique implique :

$$\rho^2\dot{\theta} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

1. Déterminer la vitesse du satellite en un point quelconque, en coordonnées polaires .

En toute généralité on a $\overrightarrow{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_r} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. Dans le cas présent et en notant la constante $\rho^2\dot{\theta} = pu$ (u a la dimension d'une vitesse) on a :

$$\dot{\rho} = \frac{pe\dot{\theta}\sin(\theta)}{(1+e\cos(\theta))^2} = \frac{e}{p}\rho^2\dot{\theta}\sin(\theta) = eu\sin(\theta) \quad \text{et} \quad \rho\dot{\theta} = \frac{1}{\rho}\rho^2\dot{\theta} = u(1+e\cos(\theta))$$

2. En déduire le vecteur accélération et montrer que celle-ci est centrale. Pourquoi n'est-elle pas constante ?

En toute généralité on a $\overrightarrow{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$.
Dans le cas présent il est plus astucieux de partir de la forme trouvée pour la vitesse à la question précédente :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d}{dt}(eu\sin(\theta))\overrightarrow{u_r} + (eu\sin(\theta))\frac{d}{dt}(\overrightarrow{u_r}) + \frac{d}{dt}(u(1+e\cos(\theta)))\overrightarrow{u_\theta} + (u(1+e\cos(\theta)))\frac{d}{dt}(\overrightarrow{u_\theta})$$

$$\overrightarrow{a} = (eu\dot{\theta}\cos(\theta))\overrightarrow{u_r} + (eu\sin(\theta))\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + (-ue\dot{\theta}\sin(\theta))\overrightarrow{u_\theta} + u(1+e\cos(\theta))(-\dot{\theta})\overrightarrow{u_r}$$

Au final on a donc une accélération radiale $\vec{a} = -u\dot{\theta}\vec{u_r}$. u est une constante mais $\dot{\theta}$ non. L'accélération radiale n'est pas constante à cause du caractère elliptique de la trajectoire (la vitesse angulaire augmente quand le rayon diminue : c'est la "loi des aires" de Kepler.

3. En quels points la vitesse et l'accélération sont-elles minimales ou maximales ? Représenter les vecteurs correspondants sur la trajectoire.

$||\vec{v}|| = \sqrt{e^2u^2\sin^2\theta + u^2(1+\cos\theta)^2} = u\sqrt{e^2+2e\cos\theta+1}$. La vitesse est donc maximale lorsque $\cos\theta = 1$ ($\theta = 0$: périgée) et minimale lorsque $\cos\theta = -1$ ($\theta = \pi$: apogée) $||\vec{a}|| = u|\dot{\theta}| = pu^2/\rho^2$. L'accélération est donc maximale lorsque ρ est minimal (périgée) et minimale lorsque ρ est maximal (apogée).

Les expressions peuvent être factorisées en faisant apparaître $\rho^2\dot{\theta}$

Exercice n° 7

Mouvement circulaire accéléré *

Un mobile subit un mouvement circulaire de rayon R_0 et d'équation $\theta = at^2$ où $a = \mathrm{C^{te}}$. Trouver sa vitesse et son accélération.

Dans le cas de ce mouvement, on a :

$$\begin{cases} r = R_0 & \theta = at^2 \\ \dot{r} = 0 & \dot{\theta} = 2at \\ \ddot{r} = 0 & \ddot{\theta} = 2a \end{cases}$$

D'où les expressions :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= R_0\vec{u}_r \\ \vec{v} &= 2R_0at\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= -4R_0a^2t^2\vec{u}_r + 2R_0a\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Exercice n° 8

Trajectoire d'une roue **

On considère une roue de rayon R, de centre O', roulant sans glisser sur le sol avec une vitesse angulaire ω. On s'intéresse à la trajectoire d'un point A, situé à la périphérie de la roue et dont la position en $t = 0$ se trouve à l'origine du repère (O, x, y) lié au sol.

1. Déterminer les coordonnées (x, y) de A en fonction de t et tracer sa trajectoire.

On considère un repère R' se déplaçant avec la roue, dont l'origine O' est le centre de la roue, dont l'axe $O'x$ est parallèle au sol orienté dans le sens du déplacement et l'axe $O'y$ est vertical orienté vers le haut. Dans ce repère, la roue a un simple mouvement de rotation, dans le sens horaire.

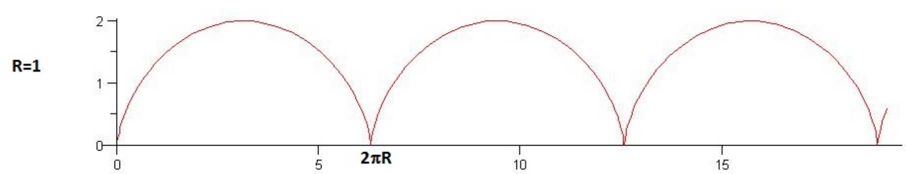
$$\begin{cases} \rho' = R & x' = -R\sin(\omega t) \\ \theta' = \omega t & y' = -R\cos(\omega t) \end{cases}$$

En appliquant les formules de changement de repère,

$$\begin{cases} x &= x' + R\omega t \\ y &= y' + R \end{cases}$$

on obtient alors la position dans le repère fixe R :

$$\begin{cases} x &= R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y &= R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$



2. Calculer le vecteur vitesse et étudier les variations de son module au cours du temps.

On en déduit le vecteur vitesse :

$$\begin{cases} v_x &= \dot{x} = R\omega(1 - \cos(\omega t)) \\ v_y &= \dot{y} = R\omega\sin(\omega t) \end{cases}$$

ainsi que son module

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\omega\sqrt{2(1 - \cos(\omega t))} \tag{1}$$

On trouve alors :

$$\begin{cases} v = v_{min} = 0 & \text{pour} \quad \omega t = 0 \mod 2\pi \\ v = v_{max} = 2R\omega & \text{pour} \quad \omega t = \pi \mod 2\pi \end{cases}$$

3. Représenter dans un espace vectoriel l'évolution du vecteur accélération au cours du temps.

L'accélération est donnée par :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = -R\omega^2\{\sin(\omega t)\vec{\imath} + \cos\omega t\vec{\jmath}\} \tag{2}$$

Le vecteur position décrit une cycloïde (cf. figure) et le vecteur accélération un cercle de rayon $R\omega^2$.

4. Mêmes questions pour la trajectoire vue par un observateur positionné au centre de la roue, sans tourner avec celle-ci.

Pour cet observateur, il s'agit simplement d'un mouvement circulaire uniforme !

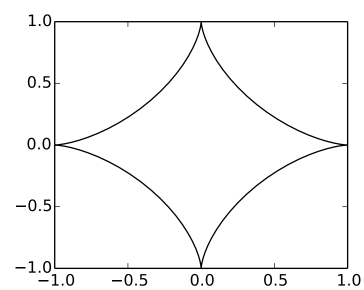
Exercice n° 9

Longueur de l'astroïde ⋆⋆⋆

Une particule se déplace selon une trajectoire décrite par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0\cos^3(\omega_0 t) \\ y(t) &= y_0\sin^3(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Déterminer la longueur de la trajectoire. On prendra : $x_0 = y_0 = 1$ m et $\omega_0 = 1$ rad/s.



La longueur de la trajectoire s'obtient en intégrant sur celle ci un élément de longueur :

$$\mathscr{L} = \oint ||d\overrightarrow{OM}|| = \int_0^T ||\vec{v}||dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}} ||\vec{v}||dt$$

où $T = 2\pi/\omega_0$ est le temps de parcours de l'astroïde et de toute évidence sa longueur sera 4 fois celle d'un de ses quartiers.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -3x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)\cos^2(\omega_0 t) \\ \dot{y}(t) &= 3y_0\omega_0\cos(\omega_0 t)\sin^2(\omega_0 t) \end{aligned}$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = \left(9x_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)\cos^4(\omega_0 t) + 9y_0^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t)\sin^4(\omega_0 t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans le premier quartier (cos et sin positifs) et en prenant $x_0 = y_0$ pour simplifier on obtient $||\vec{v}|| = 3x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$ et donc :

$$\mathscr{L} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}} 3x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)dt = 12x_0\omega_0\left[\frac{\sin^2(\omega_0 t)}{2\omega_0}\right]_0^{\frac{\pi}{2\omega_0}} = 6x_0$$

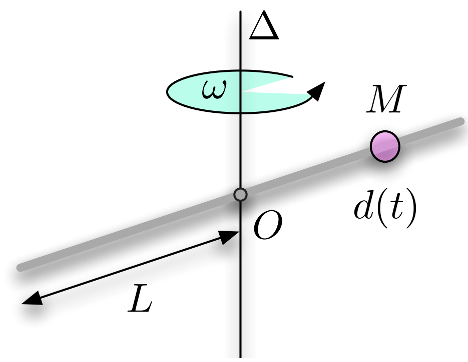
Dans le cas général le calcul est plus compliqué mais reste faisable. On obtient :

$$\mathscr{L} = 4\,\frac{x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2}{x_0 + y_0}$$

Exercice n° 10

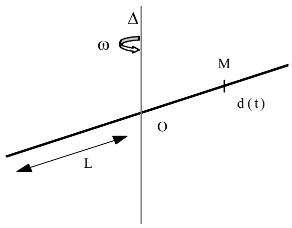
Tube tournant ⋆⋆⋆

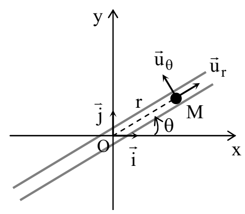
Un tube rectiligne tourne dans un plan horizontal à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical Δ passant par son centre (figure ci-contre). A l'instant $t = 0$ on lâche un point matériel de masse M à la distance d_0 de l'axe, ce point glisse sans frottement à l'intérieur du tube. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On utilisera dans cet exercice les fonctions hyperboliques (cosh et sinh). En préparation, révisez leurs propriétés.



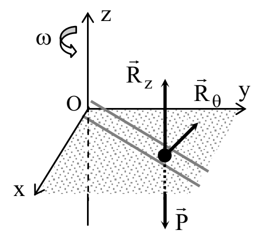
1. Exprimer $d(t)$, la distance entre le point et l'axe au cours du temps.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.
Système : le point matériel M de masse m constante.
Repère : R(O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$,$\vec{k}$).
Mouvement : M se déplace à l'intérieur du tube, qui est lui-même en rotation uniforme autour de l'axe Δ vertical. La vitesse angulaire de M est donc celle ω du tube qui est constante. Il est donc commode de travailler dans un système de coordonnées polaires, dans le plan horizontal.





Plan horizontal



Cinématique :
$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$
$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \dot{r}\vec{u}_r + r\omega\vec{u}_\theta$
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\omega\vec{u}_\theta + \dot{r}\omega\vec{u}_\theta - r\omega^2\vec{u}_r = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{u}_r + 2\dot{r}\omega\vec{u}_\theta$

Remarque : comme $\dot{\theta} = \omega$ est constant, on peut calculer directement $\theta(t) = \omega t$ si l'on choisit l'axe Ox tel que $\theta(t=0) = 0$. La seule inconnue du mouvement est donc $r(t)$.

Forces extérieures :
Forces à distance :
- poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$
Forces de contact :
- réaction normale du tube : elle est perpendiculaire au tube, donc elle n'a pas de composante le long du tube, c'est à dire suivant $\vec{u}_r$, donc la composante R_r est nulle. On peut écrire $\vec{R} = R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{k}$. On ne peut rien affirmer de plus, à part qu'il est raisonnable de penser que R_z est dirigée vers le haut (le tube empêche M de tomber).
- on néglige tout frottement.
Les inconnues du point de vue des forces sont R_z et R_θ.

PFD : repère galiléen et système de masse constante :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Leftrightarrow -mg\vec{k} + R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{k} = m((\ddot{r} - r\omega^2)\vec{u}_r + 2\dot{r}\omega\vec{u}_\theta)$$

Projection selon $\vec{u}_r$: $0 = \ddot{r} - r\omega^2$ (1)
Projection selon $\vec{u}_\theta$: $R_\theta = m2\dot{r}\omega$ (2)
Projection selon $\vec{k}$: $-mg + R_z = 0$ (3)

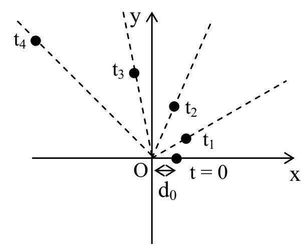
Remarque : si on avait oublié le terme R_θ, l'équation (2) donnerait alors $\dot{r} = 0$, c'est à dire $r = constante$, ce qui voudrait dire que M est immobile par rapport au tube, quelles que soient les conditions, ce qui ne serait pas vraisemblable.

Equation différentielle du mouvement :
Donnée par l'équation (1) : $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$

Résolution :
1- solution générale : $r(t) = Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t}$ où A et B sont des constantes d'intégration.
2- détermination de A et B par les conditions initiales : on lâche M à la distance d_0 de l'axe, donc $r(t=0) = A + B = d_0$, et $v^*(t=0) = 0$ dans le référentiel du tube. Mais M n'est pas immobile dans le référentiel du laboratoire puisqu'il est entraîné par la rotation du tube. Il a donc une vitesse orthoradiale (parallèle à $\vec{u}_\theta$). Sa vitesse radiale le long du tube (parallèle à $\vec{u}_r$) est donc nulle : $\dot{r}(t=0) = 0$. Or $\dot{r}(t) = -A\omega e^{-\omega t} + B\omega e^{\omega t}$. Donc $\dot{r}(t=0) = -A\omega + B\omega = 0$, donc $A = B$. On en déduit finalement $A = B = \frac{d_0}{2}$.

Solution : $d(t) = \frac{d_0}{2}\left(e^{-\omega t} + e^{\omega t}\right) = d_0 \cosh(\omega t)$

Analyse du résultat : $d(t)$ augmente avec le temps, donc M a un mouvement en spirale vers l'extérieur, et M sera finalement éjecté du tube.



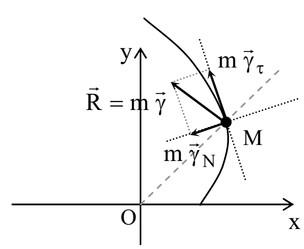
Plan horizontal

2. Exprimer la réaction du tube, en module et direction.

On reprend les équations (2) et (3) : $R_\theta = m2\dot{r}\omega$ et $R_z = mg$. On trouve donc :

$$\vec{R} = md_0\omega^2\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)\vec{u}_\theta + mg\vec{k}$$

Remarque 1 : La composante R_θ, orientée dans le sens de la rotation, manifeste l'action du tube sur M. Cette force R_θ est responsable du mouvement : $m\vec{a} = -mg\vec{k} + R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{k} = R_\theta\vec{u}_\theta$. Si cette force R_θ n'existait pas, le mouvement de M serait rectiligne uniforme. La force R_θ oblige M à rester dans le tube, et donc incurve la trajectoire, mais elle ne peut empêcher M de partir vers l'extérieur (i.e. r augmente).
Remarque 2 : En terme d'accélération, on a donc une accélération orthoradiale (suivant $\vec{u}_\theta$). Attention, bien que $\ddot{r} \neq 0$, la composante radiale de l'accélération (suivant $\vec{u}_r$) est nulle car $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$. L'accélération orthoradiale se décompose en une composante tangentielle (orientée dans le sens de la vitesse car le module de la vitesse augmente) et une composante normale (qui incurve la trajectoire).



Plan horizontal

3. Montrer que l'angle de sortie est indépendant de ω.

M arrive au bout du tube à l'instant t_{final} lorsque : $d(t_{final}) = L \Leftrightarrow d_0 \cosh(\omega t_{final}) = L$

Le temps t_{final} est donc donné par la relation :

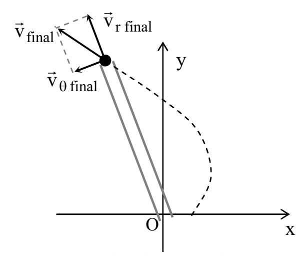
$$\cosh(\omega t_{final}) = \frac{L}{d_0}$$

La vitesse est alors : $\vec{v}(t_{final}) = \dot{r}(t_{final})\vec{u}_r + L\omega\vec{u}_\theta = d_0\omega\sinh(\omega t_{final})\vec{u}_r + L\omega\vec{u}_\theta$
L'angle de sortie ϕ est tel que :

$$\tan\phi = \frac{v_\theta(t_{final})}{v_r(t_{final})} = \frac{L}{d_0\sinh(\omega t_{final})} = \frac{1}{\tanh(\omega t_{final})}$$

En utilisant la relation mathématique :
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, on obtient
$\sinh(\omega t_{final}) = \sqrt{\cosh^2(\omega t_{final}) - 1} = \sqrt{L^2/d_0^2 - 1}$.
L'angle de sortie est donc donné par la relation indépendante de ω :

$$\tan\phi = \frac{L}{\sqrt{L^2 - d_0^2}}$$



Plan horizontal

4. Représenter la trajectoire du point une fois éjecté du tube de longueur $2L$.

Lorsque le point M arrive à l'extrémité du tube sa vitesse est :

$$\vec{v}(t_{final}) = \sqrt{L^2 - d_0^2}\,\omega\vec{u}_r + L\omega\vec{u}_\theta$$

Hors du tube, la seule force extérieure est le poids. Le point M décrit donc une parabole dont le sommet est le point d'éjection et qui est contenue dans le plan vertical contenant la vitesse initiale horizontale qui n'est autre que $\vec{v}(t_{final})$.