FORCES CENTRALES ET GRAVITATION : CORRECTIONS

Exercices prioritaires :

Exercice n° 1

Poids et altitude ⋆

A la surface de la terre le « poids » d'un homme indiqué par un dynamomètre est de 80 kg. Quel sera le « poids » indiqué par le dynamomètre à une altitude de 8000 m ?

On donne $R_T = 6400$ km.

Le dynamomètre dont il est question ici mesure une force, et il est donc sensible à la force de gravitation, qui diminue avec l'altitude (ici 8000m). On a :

$$|F_0| = \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T^2} \quad \text{et} \quad |F_h| = \mathcal{G}\frac{mM_T}{(R_T+h)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\frac{F_h}{F_0}\right| = \left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2 = 0,9975$$

Le « poids » indiqué par le dynamomètre sera donc : $0,9975\,m = 79,8$ kg.

ℹ : une balance peut soit mesurer une masse, par comparaison (balance romaine ou balance à fléau de marché par exemple), soit une force, c'est le cas de la plupart des balances actuelles, mais cette force est traduite en masse, en supposant $P = mg_0$ (g_0 étant l'accélération de la pesanteur à la surface de la terre). A noter qu'une balance à fléau indiquerait 80 kg quelle que soit l'altitude car la masse est constante contrairement à la force de gravitation.

Exercice n° 2

Trajectoire d'une comète ⋆⋆ ☺

En 1997, la comète *Hale-Bopp* est passée relativement près de la Terre et a traversé notre ciel. Cette comète possède une orbite elliptique autour du Soleil avec une excentricité $e = 0,995$. A son périhélie, le 1^{er} avril 1997, sa distance au Soleil était $r_P = 1,35 \times 10^8$ km et en ce point sa vitesse valait $v_P = 45$ km/s.

1. La conservation de quelle quantité permet d'expliquer que la trajectoire de la comète est plane ? Pourquoi cette quantité est-elle conservée tout au long du mouvement ?

> Question de cours : c'est la conservation du moment cinétique. Le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au vecteur position et au vecteur vitesse (produit vectoriel). S'il se conserve cela implique que le plan qui contient vitesse et position ne change pas : c'est le plan de la trajectoire.
>
> Le moment cinétique est conservé car la seule force qui s'exerce sur la comète est la force gravitationnelle qui est une force centrale et qui n'exerce aucun moment sur la comète. En vertu du théorème du moment cinétique celui ci ne varie donc pas.

2. Calculer le paramètre q de cette orbite. En déduire la distance r_A de la comète à l'aphélie. Quelle est la vitesse v_A correspondante ? Justifier la démarche suivie pour obtenir cette vitesse particulière.

> Le produit $C = r\,v$ est donc constant et représente la « constante des aires ». On a $C = r_P v_P = 6{,}075\,10^{15}$ m^2/s.
>
> A partir de l'équation de la trajectoire en coordonnées polaires on a :
>
> $$r_P = \frac{q}{1+e\cos\theta_P} \quad \text{avec} \quad \theta_P = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q = r_P(1+e) = 2{,}69\,10^{11}\ \text{m}$$
>
> On en déduit ensuite les caractéristique de l'aphélie :
>
> $$r_A = \frac{q}{1+e\cos\theta_A} \ \text{avec}\ \theta_A = \pi \quad \Rightarrow \quad r_A = \frac{1+e}{1-e} r_P = 5{,}39\,10^{13}\ \text{m} \quad \text{et} \quad v_A = \frac{C}{r_A} = 113\ \text{m/s}$$

3. Que vaut le demi-grand axe a de l'orbite ?

> $$a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{r_P(1-e+1+e)}{2(1-e)} = \frac{r_P}{(1-e)} = 2{,}70\,10^{13}\ \text{m}$$

4. Montrer que $q = a(1-e^2)$.

> $$a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{q}{2(1+e)} + \frac{q}{2(1-e)} = \frac{q}{(1-e)(1+e)} \quad \Rightarrow \quad q = a(1-e^2)$$

5. Sachant que T désigne la période orbitale et que le rapport T^2/a^3 est constant en vertu de la loi des aires, prédire en quelle année la comète reviendra à son périhélie nous rendre visite.

Le rapport T^2/a^3 est une constante qui ne dépend que la masse du soleil additionnée à celle de la comète. Dès lors que la masse du corps en orbite autour du soleil est négligeable devant celle du soleil on pourra donc considérer cette constante comme caractéristique du soleil. Ainsi nous pouvons écrire la constante pour la comète Hale-Bop et pour la planète Terre. On a donc :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \quad \Rightarrow \quad T = T_T\sqrt{\frac{a^3}{a_T^3}} = 1\,\text{an}\sqrt{\left(\frac{2,70\,10^{13}}{1,50\,10^{11}}\right)^3} \simeq 2400\,\text{ans}$$

ℹ Connaissant $\mathcal{G}$ et M_S, il aurait été possible d'utiliser la formule issue des lois de Newton :

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3 = \mathcal{G}(M_S + m) \simeq \mathcal{G}M_S$$

ℹ Enfin si l'on se limite aux données de l'énoncé (la constante $C = r_P v_P$) on a :

$$S = \pi ab = \frac{1}{2}CT \quad \text{avec} \quad a = \frac{r_P}{(1-e)} \quad \text{et} \quad b = a\sqrt{1-e^2} \qquad \Rightarrow \quad T = 2\pi\frac{r_P(1+e)^{\frac{1}{2}}}{v_P(1-e)^{\frac{3}{2}}}$$

6. On sait que l'énergie mécanique de la comète vaut $E = -4,49\times10^{23}$ J (l'énergie potentielle étant définie comme nulle à l'infini). Déterminer sa masse m. Étant donné que la masse volumique des roches cométaire est très voisine de celle de l'eau, quel est le rayon moyen R de cette comète (en faisant l'approximation d'une comète sphérique).

$$E_m = \frac{1}{2}mv_P^2 - \mathcal{G}\frac{mM_S}{r_P} \qquad \Rightarrow \quad m = \frac{E_m}{\frac{1}{2}v_P^2 - \mathcal{G}\frac{M_S}{r_P}}$$

⚠ L'application de cette formule est dangereuse dans le cas présent car, lorsque l'excentricité est proche de 1, l'énergie mécanique est proche de zéro et issue de la différence de deux termes grands. Il vaut mieux alors tout exprimer en fonction des caractéristiques de l'orbite de la comète c'est à dire éliminer dans l'expression de l'énergie mécanique la constante $\mathcal{G}M_S$.

En se plaçant au périhélie on peut exprimer la constante des aires de deux façons : $C^2 = r_P^2 v_P^2$ et $C^2 = q\mathcal{G}M_S$ (cette relation n'est pas immédiate. Pour l'obtenir il faut écrite le PFD projeté sur $\vec{u}_r$ et l'appliquer au périhélie ou plus simplement écrire l'égalité de l'énergie mécanique en l'aphélie et au périhélie). On peut alors réexprimer l'énergie en fonction des paramètres du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_P^2 - m\frac{r_P^2 v_P^2}{q r_P} = \frac{1}{2}mv_P^2\left(1 - \frac{2r_P}{q}\right) = \frac{1}{2}mv_P^2\left(\frac{1-e}{1+e}\right) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2E_m}{v_P^2}\frac{1+e}{1-e}$$

ℹ On peut remarquer au passage que le signe de l'énergie mécanique totale est déterminé par la valeur de e.

- $e < 1$: $E_m < 0$. La trajectoire est une ellipse et la comète est liée au soleil. (On a défini le zéro d'énergie potentielle à l'infini lorsque la comète ne ressent plus d'attraction)
- $e = 1$: $E_m = 0$. La trajectoire est une parabole (soleil au foyer). La comète est à la limite de libération
- $e > 1$: $E_m > 0$. La trajectoire est une hyperbole. La comète n'est pas liée au soleil

7. Démontrer, en justifiant chaque étape qui le nécessite, que l'on a la relation :

$$\frac{1}{2}(v_P + v_A)^2 = \mathcal{G}\frac{2M_{soleil}}{q}$$

$$v_P = \frac{C}{r_P} \quad \text{et} \quad v_A = \frac{C}{r_A} \quad \Rightarrow \quad v_P + v_A = C\left(\frac{1}{r_P} + \frac{1}{r_A}\right) = C\left(\frac{1+e}{q} + \frac{1-e}{q}\right) = \frac{2C}{q}$$

Avec $C^2 = q\mathcal{G}M_S$ et en éliminant C on obtient la relation demandée.

8. Quelques années après son dernier passage la comète passe relativement près d'une planète géante du système solaire. Cette dernière perturbe gravitationnellement la comète et donc sa trajectoire. Après cette perturbation, les nouvelles caractéristiques orbitales sont $e' = 0,70$ et $a' = 1,5 \times 10^{10}$ km.
   - Quelle est la valeur du paramètre q' de cette nouvelle trajectoire elliptique ?

     $q' = a'(1 - e'^2) = 7,65\,10^{12}$ m

   - Que deviennent alors les distances r'_P et r'_A, respectivement au périhélie et à l'aphélie ?

     $r'_P = q'/(1+e') = a'(1-e') = 4,5\,10^{12}$ m et $r'_A = q'/(1-e') = a'(1+e') = 25,5\,10^{12}$ m

   - Déterminer aussi les nouvelles vitesses correspondantes v'_P et v'_A.

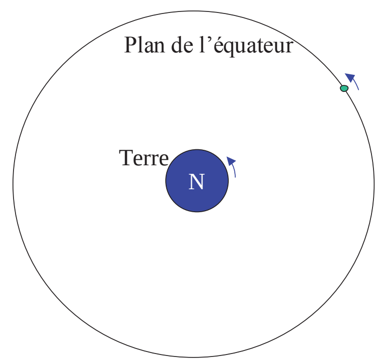
     $$C' = \sqrt{q'\mathcal{G}M_S} \quad \Rightarrow \quad v'_P = \frac{\sqrt{q'\mathcal{G}M_S}}{r'_P} = 7100\,\text{m/s} \quad \text{et} \quad v'_A = \frac{\sqrt{q'\mathcal{G}M_S}}{r'_A} = 1250\,\text{m/s}$$

Exercice n° 3

Satellite géostationnaire ⋆

Déterminer le rayon de l'orbite circulaire d'un satellite géostationnaire.

Pour que le satellite soit géostationnaire il est nécessaire qu'il tourne à la même vitesse angulaire (1 tour par jour) autour de l'axe de rotation de la Terre. Par ailleurs son orbite ayant pour foyer la Terre on en conclus que cette orbite est circulaire (vitesse angulaire constante) et dans le plan équatorial (perpendiculaire à l'axe de rotation et contenant le centre de la Terre).
D'après le PFD on a :



Dessin à l'échelle pour la terre et l'orbite

$$-mr\omega^2\vec{u}_r = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\mathcal{G}\frac{M_T}{\omega^2}}$$

Ici $\omega = 2\pi/T_T$ où T_T est la période de rotation de la Terre (jour) : $T_T = 24 \times 3600$ s$= 86400$ s.

On trouve alors $r = 42300$ km, ce qui donne au final une altitude $r - R_T = 36000$ km.

ℹ En toute rigueur la période de la terre à considérer est sa période de rotation sidérale (mesurée par rapport aux étoiles, comme le mouvement du satellite), qui est plus courte que notre « jour ». En un jour de 24h, la terre effectue une rotation complète (2π) plus environ $2\pi/365,25$ pour compenser (rattraper) son mouvement autour du soleil. Le jour sidéral est donc plus court de 236 secondes ($86400 - 236$). La correction correspondante est faible.

Exercices supplémentaires :

Exercice n° 4

Poids à l'intérieur et à l'extérieur de la Terre :Théorème de Gauss ⋆⋆

Le théorème de Gauss, dans le cas gravitationnel, peut s'écrire :

$$\iint_S \vec{g}\cdot\vec{dS} = -4\pi\mathcal{G}M_S$$

où M_S est la masse qui se trouve à l'intérieur de la surface fermée S.

En utilisant le théorème de Gauss, et en supposant la Terre est une sphère homogène de rayon R, calculer la force de gravitation exercée par la Terre sur une masse ponctuelle m placée à une distance r du centre de la Terre :

La symétrie du problème nous permet de dire que l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$ en un point M est radial et ne dépend que de la distance au centre de la terre. On peut donc écrire $\vec{g} = -g(r)\vec{u}_r$ (on pressent que $\vec{g}$ sera dirigé vers le centre). Par ailleurs si on utilise comme surface de Gauss la sphère centrée sur la Terre et passant par le point M (distance r), le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est radial et orienté vers l'extérieur de la sphère : $\overrightarrow{dS} = dS\vec{u}_r$. On a donc :

$$\iint_S \vec{g}\cdot\vec{dS} = -\iint_S g(r)dS = -g(r)\iint_S dS = -4\pi r^2 g(r) \quad \Rightarrow \quad g(r) = \frac{\mathcal{G}M_S}{r^2}$$

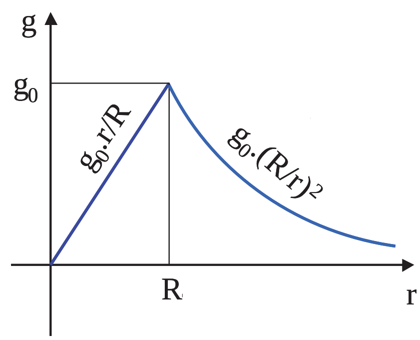
La conclusion va dépendre de l'expression de M_S.

1. dans le cas $r > R$

   M_S est constante : $M_S = M_T = 4/3\pi R^3\rho$.
   $g(r) = \frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} = g_0\frac{R^2}{r^2} \qquad \left(g_0 = g(R) = \frac{\mathcal{G}M_T}{R^2}\right)$

2. dans le cas $r < R$

   $M_S = 4/3\pi r^3\rho = M_T(r/R)^3$ et donc
   $g(r) = \frac{\mathcal{G}M_T r}{R^3} = g_0\frac{r}{R} \qquad \left(g_0 = g(R) = \frac{\mathcal{G}M_T}{R^2}\right)$



Exercice n° 5
Pesanteur à la surface du soleil ⋆

Sachant que le rayon du Soleil est 110 fois celui de la Terre, et sa masse 330 000 fois celle de la Terre, déterminer l'accélération de la pesanteur à la surface du Soleil.

$$g_{0T} = \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \qquad g_{0S} = \frac{\mathcal{G}M_S}{R_S^2} \qquad \Rightarrow \qquad g_{0S} = g_{0T}\frac{M_S R_T^2}{M_T R_S^2} = 9{,}81.330000.\left(\frac{1}{110}\right)^2 = 267{,}5\,\mathrm{ms}^{-2}$$

Exercice n° 6
Orbite d'un satellite ⋆⋆

Un satellite artificiel gravite sur une orbite dont le périgée est à 640 km et l'apogée à 4000 km de la surface de la Terre. Calculer le demi-grand axe a de l'orbite, son excentricité e, son équation, sa période, sa vitesse au périgée et à l'apogée, et son énergie totale si sa masse est de 100 kg.

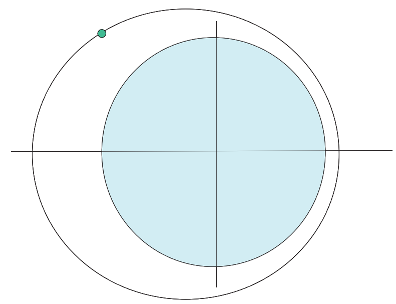
640 km pour le périgée veut forcement dire que les mesures sont données à partir de la surface de la Terre.

On a donc : $r_A = 6400 + 4000 = 10400$ km et $r_P = 6400 + 640 = 7040$ km
En découle $a = (r_A + r_P)/2 = 8720$ km et $c = (r_A - r_P)/2 = 1680$ km
Donc $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{r_A r_P} = 8557$ km et $e = c/a = 0.193$

$$q = 2\frac{r_P r_A}{r_P + r_A} = 8396\,\text{km}$$

L'équation polaire de la trajectoire est :

$$r = \frac{q}{1 + e\cos\theta} \quad \theta \text{ étant nul au périgée.}$$



Dessin à l'échelle pour la terre et l'orbite

Période (troisième loi de Kepler) :
$\Omega^2 a^3 = \mathcal{G}(M_T + m) \simeq \mathcal{G} M_T$ AN : $\Omega = 7,77\,10^{-4}$ rad/s

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 8,097\,10^3 \text{ s} = 2\,\text{h}\,15\text{min}$$

Si l'on ne connaît pas les valeurs de $\mathcal{G}$ et M_T on peut remarquer que $\mathcal{G} M_T = g_0 R_T^2$ où g_0 est l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre ($g_0 = 9,81$ m.s^{-2}) et R_T son rayon ($2\pi R_T = 40000$ km).

Vitesses : les vitesses à l'apogée et au périgée peuvent s'obtenir en utilisant la constante des aires, $C = r^2\dot{\theta}$. L'apogée et le périgée sont les deux seuls points de la trajectoire où la vitesse est ortho-radiale (en ces points $v_A = r_A\dot{\theta}_A$ et $v_P = r_P\dot{\theta}_P$). On a donc $C = r_A v_A = r_P v_P$. Par ailleurs en écrivant la conservation de l'énergie mécanique entre les points A et P on montre que $C^2 = q\mathcal{G} M_T$. On a donc $v_A = \sqrt{q\mathcal{G} M_T}/r_A = 5570$ m/s et $v_P = \sqrt{q\mathcal{G} M_T}/r_P = 8230$ m/s.

Énergie : c'est une constante qui peut être évaluée en un point quelconque, au périgée par exemple :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_P^2 - \mathcal{G}\frac{m M_T}{r_P} = m\left(\frac{v_P^2}{2} - \frac{\mathcal{G} M_T}{r_P}\right) = -2,3\,10^9 \text{ J}$$

Le zéro d'énergie potentielle est pris à l'infini (la force d'attraction s'y annule) ce qui nous permet de dire que le fait que l'énergie soit négative est la marque d'un système lié (le satellite ne peut s'échapper). On aurait une énergie nulle dans le cas d'un trajectoire parabolique ($e = 1$) et positive dans le cas d'une trajectoire hyperbolique ($e > 1$).

Exercice n° 7

Sonde interplanétaire ⋆⋆

On désire envoyer une sonde interplanétaire à partir de la Terre vers la planète Jupiter. On supposera que les orbites de ces deux planètes sont des cercles coplanaires de rayons R_T et R_J centrés sur le Soleil et qu'elles sont décrites dans le même sens.

1. Déterminer la vitesse V_T de la Terre sur son orbite en fonction de R_T et de la période T de son mouvement autour du Soleil. En déduire la masse M_S du Soleil.
   A.N. $R_T = 1,5 \times 10^{11}$ m ; $T = 3,16 \times 10^7$ s ; $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ S.I.

   On suppose dans cette question que la Terre est animée d'un mouvement circulaire uniforme autour du Soleil. On a donc $V_T = R_T \Omega_T = 2\pi R_T / T_T = 2,98\ 10^4$ m/s

   Le PFD aplliqué à la Terre (seule la force due au Soleil est considérée) nous donne :

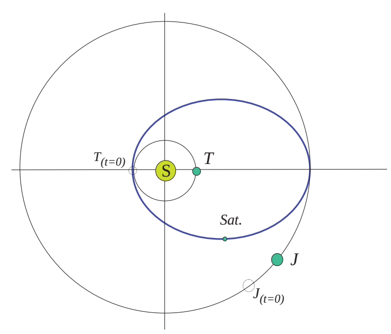
   $$M_T \frac{V_T^2}{R_T} = \frac{\mathcal{G} M_T M_S}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad M_S = \frac{V_T^2 R_T}{\mathcal{G}} = \frac{4\pi^2 R_T^3}{\mathcal{G} T_T^2} = 2\ 10^{30} \text{ kg}$$

2. On désire que la sonde, une fois libérée de l'attraction terrestre, décrive une orbite elliptique tangente en son périhélie à l'orbite de la Terre ($r_1 = R_T$) et en son aphélie à celle de Jupiter ($r_2 = R_J$). Calculer les vitesses v_1 et v_2 correspondantes et en déduire le supplément de vitesse $v_1 - V_T$ à fournir à la sonde supposée libérée de l'attraction terrestre. On donne $R_J = 7,78 \times 10^{11}$ m.

   L'orbite du satellite est imposée par son périhélie ($r_P = R_T$) et son aphélie ($r_A = R_J$). Il est alors possible d'obtenir le paramètre de l'ellipse,

   $$q = 2\frac{r_A r_P}{r_A + r_P} = 2,515\ 10^{11} \text{ m}$$

   La constante des aires vaut
   $C = \sqrt{q \mathcal{G} M_S} = 5,79\ 10^{15}$ m^2/s.
   Mais aussi, au périhélie, on a $C = r_P v_P$ ce qui nous permet d'obtenir la vitesse à impulser au satellite $(v_P - V_T)$

   Dessin à l'échelle pour les orbites, qui donne les positions lorsque le satellite a effectué la moitié du voyage
   Calculs (attention, cf. texte) -> t_m=0,49 année

   $$v_P = \frac{C}{R_T} = 3,86\ 10^4 \text{ m/s} \qquad \Rightarrow \qquad v_P - V_T = (3,86 - 2,98)\ 10^4 = 8800 \text{ m/s}$$