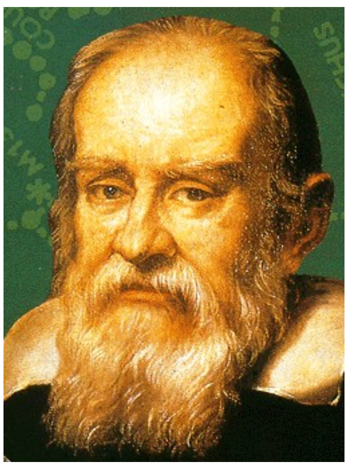
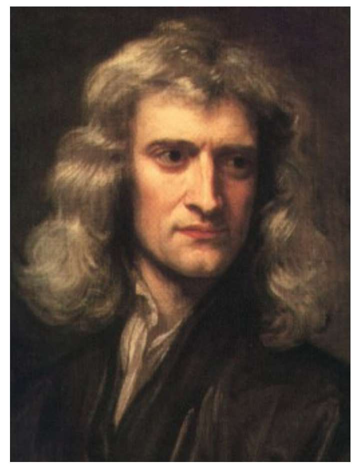
Université Joseph Fourier – Grenoble 1
Licence 1ère année

Phy 12a/12b
Mécanique du point (2ème semestre)



Galilée (1564-1642)

J. Kepler (1571-1630)



I. Newton (1643-1727)

Travaux dirigés et Ateliers

Année 2015-2016

Table des matières

Conseils pour bien commencer

Bienvenue dans cette nouvelle UE. Le but de ce qui suit est de vous donner quelques conseils pour bien utiliser ce recueil d'exercices ainsi que pour travailler avec efficacité.

☞ Cette UE est découpée en cinq chapitres distincts : « chocs », « cinématique », « oscillations », « moment cinétique » et « forces centrales ». La compréhension d'un de ces chapitres nécessite impérativement d'avoir bien assimilé les chapitres précédents. Pour cette raison, il vous faudra fournir un effort constant durant tout le semestre. Rappelez-vous qu'au cours de chaque chapitre, un « QCM en ligne » sera proposé et sa notation interviendra dans la note finale de l'UE.

☞ Le découpage de chaque chapitre est le suivant :
- Chaque chapitre commence par quelques exercices jugés essentiels qui seront corrigés en séance.
- Des exercices supplémentaires, qui suivant l'état de votre avancement, pourront être étudiés soit en séance soit chez vous.
- Des réponses partielles sont données à la fin du chapitre.
- Le corrigé détaillé d'un exercice par chapitre est donné à la fin du polycopié

ℹ Le degré de difficulté est marqué par le nombre d'astérisques dans l'en-tête de l'exercice (de ⋆ à ⋆⋆⋆) et les exercices corrigés par un ☺.

☞ Vous êtes fortement encouragés à consulter d'autres ouvrages. Utilisez des ouvrages disponibles en BU (consultez-les, et cherchez celui qui vous convient le mieux). Par ailleurs, n'oubliez pas de consulter le site internet du DLST proposant des documents pédagogiques.

☞ Pour que vous appréhendiez le plus tôt possible la méthode pour résoudre un exercice de mécanique, voici une liste de recommandations qu'il vous est demandé de suivre :
- lire l'énoncé dans sa globalité
- faire la liste des données pertinentes et des inconnues : le but d'un exercice est souvent d'exprimer les inconnues en fonction des données : si on ne les a pas identifiées on risque de tourner en rond
- faire un schéma : grand, légendé, coloré, précis, propre, résumant l'énoncé (rien de plus, rien de moins, attention à ne pas faire le schéma dans un cas particulier)
- respecter les notations imposées par l'énoncé : si l'énoncé impose d'appeler R la réaction du support et r le rayon de la trajectoire, inverser les deux est très dangereux ! Vous devez expliciter sur votre copie toute grandeur qui n'est pas définie dans l'énoncé (par un schéma, une formule et/ou une phrase)
- choisir le théorème ou résultat de cours à utiliser, sachant qu'il faut trouver autant d'équations que d'inconnues (1 équation vectorielle compte pour 2 si elle peut être projetée sur 2 axes perpendiculaires)

- résoudre : là c'est purement des maths, mais la rédaction ne doit pas être une suite d'équations sans lien logique les unes avec les autres, on doit pouvoir suivre le raisonnement (avec quelques mots bien choisis, ex. donc ≠ car, et/ou des symboles mathématiques du type ⇒)
- si la question est « donner l'expression de X » on attend comme résultat final une forme littérale, la plus simplifiée possible, reliant l'inconnue X aux données de l'énoncé
- vérifier si le résultat final est logique dans un ou deux cas « triviaux » (par exemple si la constante de raideur d'un ressort $k \longmapsto \infty$, alors son allongement $\Delta x \longmapsto 0$)
- applications numériques : si la question est « calculer X » on demande une application numérique. Même s'il est souvent préférable d'effectuer le calcul en mettant toutes les grandeurs en unité SI, on veillera à afficher le résultat final dans une unité usuelle et adaptée à l'ordre de grandeur (donc pas forcément SI : ex. la vitesse d'une voiture se comprend mieux en km/h, un angle en degré c'est souvent plus clair qu'en radian, l'épaisseur d'un cheveu se mesure plutôt en μm qu'en m) et avec un arrondi correct (ex. en physique $x = 3,0$ donne $1/x = 0,33$ et non $0,33333\ldots$: garder en gros autant de chiffres significatifs dans le résultat que dans la moins précise des données, voire un de plus pour éviter les erreurs d'arrondis si on réutilise ce résultat ensuite)
- vérifier l'homogénéité du résultat final

⚠ Voici en supplément quelques "règles" qu'il vous faut respecter :

- Soigner la présentation de la copie, en particulier en faisant apparaître clairement les résultats finaux demandés (encadrer, souligner ou surligner : ça aide à la fois l'étudiant, qui peut ainsi mieux retrouver les résultats utiles dans sa copie, et l'enseignant qui compte les points), aussi bien en examen qu'en TD !
- Soigner la rédaction : orthographe (« on a démontrer » ...), liens logiques (ex. si $m = 100$ g et $g = 10$ m/s^2, on ne peut pas écrire que $P = mg \Leftrightarrow P = 1$ N (implique oui, mais pas équivalent) ; idem en français, ne pas confondre « donc » et « car » (la cause et l'effet) : il fait beau donc je vais me baigner et non ...), attention à la construction des phrases, à utiliser un vocabulaire scientifique précis (ex. « [OB] est le milieu de [AB] » ne veut rien dire, l'enseignant n'est pas censé faire l'effort de traduire)
- Pas de justification = 0 points (même si la réponse est juste !) : tout résultat doit être justifié de façon claire et concise, en quelques mots bien choisis qui montrent à l'enseignant que le résultat n'est pas donné par hasard (surtout pour les questions demandant une réponse du type oui/non : on ne joue pas à la loterie !)
- Pas d'unité = 0 point (même si la valeur numérique est juste, car le résultat est inutilisable !) : faire apparaître l'unité du résultat. Si cela peut vous aider, écrire l'unité des valeurs numériques dans le détail de l'opération à calculer, afin de vérifier si les unités utilisées sont correctes (ex. $d = V \times t = (50 \text{ m/s}) \times (1 \text{ min}) = (50 \text{ m/s}) \times (60 \text{ s}) = 3000 \text{ m} = 3 \text{ km}$).

Notations conseillées

Repère cartésien	$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$
Repère polaire	$\vec{u_r}, \vec{u_\theta}$
Repère cylindrique	$\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{k}$
Vecteur position	$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$
dans un repère cartésien	$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$
dans un repère polaire	$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r}$
dans un repère cylindrique	$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{k}$
Différentielle	$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)$
Vecteur vitesse	$\vec{v}$
Vecteur accélération	$\vec{a}$
Qtité de mvt	$\vec{p} = m\,\vec{v}$
	$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)$
Angle statique	α, θ_0
Composantes d'un vecteur	$\vec{T} = T_x\,\vec{\imath} + T_y\,\vec{\jmath} + T_z\,\vec{k}$
Norme d'un vecteur	$T = \Vert\vec{T}\Vert$
Poids	$\vec{P}$
Force de 1 sur 2 (resp. 2 sur 1)	$\vec{F}_{1/2}$ (resp. $\vec{F}_{2/1}$)
Coefficient frott. statique	k_s
Coefficient frott. dynamique	k_d
Réaction normale	R_N
Réaction tangentielle	R_T
Force gravitationnelle	$\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r}$
Moment cinétique	$\vec{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}$
Moment d'une force	$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$
Travail élémentaire	$dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$
Travail	$W_A^B = \displaystyle\int_A^B \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$
Energie cinétique	E_c
Energie potentielle	E_p
Energie mécanique	E_m
Centre de masse	$(m_1+m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$
Dérivées temporelles de $\theta(t)$	$d\theta/dt = \dot{\theta}$, $d^2\theta/dt^2 = \ddot{\theta}, \ldots$
Dérivées spatiales de $f(x)$	$df/dx = f'$, $d^2f/dx^2 = f'', \ldots$

QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET COLLISIONS

Exercices prioritaires :

Exercice n° 1

Vrai-Faux ⋆

1. Lors d'un choc inélastique ni l'énergie ni la quantité de mouvement ne sont conservées.
2. Lors du choc élastique d'une balle indéformable tombant verticalement sur la surface de la terre (supposée aussi indéformable) la quantité de mouvement totale n'est pas conservée sinon la terre serait légèrement déviée.
3. Roulons sous la pluie : un wagonnet roule sans frottement à l'horizontale, sous la pluie, de sorte qu'il se remplit d'eau au fur et à mesure qu'il avance.

Sa vitesse :
(a) augmente
(b) diminue
(c) ne change pas

Sa quantité de mouvement :
(a) augmente
(b) diminue
(c) ne change pas

Son énergie :
(a) augmente
(b) diminue
(c) ne change pas

Exercice n° 2

Couple de patineurs ⋆

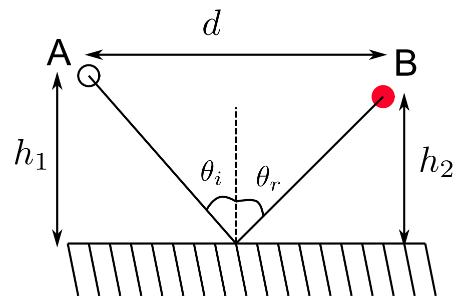
Un couple de patineurs est initialement immobile sur la glace. Se repoussant avec leurs mains, la femme communique à son partenaire une vitesse de 10 km/h sur la glace. La femme a une masse $m = 52$ kg et l'homme une masse $m' = 68$ kg.

1. Quel est le mouvement du centre de masse du couple ?
2. Calculer la vitesse de la femme sur la glace et la vitesse à laquelle l'homme voit sa partenaire s'éloigner.

Exercice n° 3

Billard à une bande ⋆

Les boules A et B d'un billard sont disposées comme sur la figure. On veut percuter la boule B avec la boule A, via un rebond sur la bande.



1. En supposant le choc élastique, trouver la position du rebond de la boule A sur la bande pour que celle ci entre en collision avec la boule B.
2. Sachant qu'on considérera la bande comme un solide indéformable de masse infinie, que peut-on dire de l'énergie de la boule avant et après le choc ?
3. Que peut-on dire des changement de quantités de mouvement selon (x) et selon (y) ?

ℹ Lors du choc sur la bande les forces sont exclusivement perpendiculaires à celle-ci.

Exercice n° 4

Ralentissement d'atomes par des photons ⋆⋆

Les forces exercées par la lumière sur la matière peuvent se comprendre de façon assez simple en termes de photons et d'atomes. Un photon est une particule possédant une énergie $E_{ph} = h\nu$ et une quantité de mouvement $p_{ph} = h\nu/c = h/\lambda$, avec $h = 6,63 \times 10^{-34}$ la constante de Planck, ν la fréquence de l'onde électromagnétique, λ la longueur d'onde et c la vitesse de la lumière dans le vide. Quand un atome absorbe (ou émet un photon), ce dernier disparaît (ou apparaît), mais l'énergie et la quantité de mouvement totale sont conservées.

1. On considère un jet d'atomes, se déplaçant de gauche à droite à la vitesse initiale v_0 : de combien la quantité de mouvement de chaque atome varie-t-elle lorsqu'il absorbe un photon se propageant en sens opposé ? (faire un schéma représentant la situation avant/après)
2. Du fait de l'intensité du faisceau lumineux et de l'efficacité du processus d'absorption, chaque atome absorbe R photons par seconde. En déduire la quantité de mouvement Δp encaissée par chaque atome pendant un temps Δt et donc, la force de freinage qui s'exerce sur un atome.
3. Montrer que la force exercée s'exprime de façon très simple en fonction de la puissance P_{abs} (en W) transportée par les photons absorbés. A quelle relation déjà connue, cette relation puissance–force est-elle analogue ?
4. Les atomes de sodium de masse atomique $m = 23$ g et de vitesse initiale $v_0 = 300$ m/s absorbent un photon de longueur d'onde 0.6 μm toute les 3 μs. Que vaut R ? En déduire le temps nécessaire pour immobiliser les atomes.
5. En fait, chaque absorption est suivie de l'émission spontanée d'un photon qui part en moyenne dans toutes les directions de l'espace. Pourquoi ce processus peut-il être négligé dans le bilan global des échanges de quantités de mouvement ?

Remarque : dans cet exercice, la description théorique du problème est énormément simplifiée en négligeant, entre autres, l'effet Doppler. D'après-vous sous quelle forme se retrouve l'énergie perdue par les atomes ?

Exercice n° 5

Ralentissement des neutrons **

Un neutron de masse m, de vitesse V, heurte un noyau de masse km au repos. Exprimer l'énergie E' du neutron après le choc en fonction de son énergie initiale E et de k. On suppose que les vitesses des particules, avant et après le choc, sont toutes colinéaires et que l'énergie cinétique est conservée au cours du choc (choc élastique).

L'énergie cinétique initiale du neutron étant 1 MeV, combien de chocs identiques au précédent cette particule doit-elle subir pour que son énergie cinétique finale soit au plus de 25 meV (thermalisation) lorsqu'elle percute :

1. des noyaux d'hydrogène ($k = 1$) ?
2. des noyaux de deutérium ($k = 2$) ?
3. des noyaux de carbone ($k = 12$) ?

Conclusion : quel est l'élément le plus efficace pour ralentir des neutrons ?

Exercices supplémentaires :

Exercice n° 6

Pendule et projectile **

Un pendule simple est composé d'une masse M suspendue à un fil inextensible et sans masse de longueur l. A l'instant initial, il est au repos, le fil étant vertical. Un projectile de masse m arrive horizontalement avec une vitesse v et vient s'enfoncer dans la masse M dans laquelle il reste incrusté après le choc.

1. Calculer la vitesse v' de l'ensemble $\{M + m\}$ immédiatement après le choc, ainsi que l'énergie dissipée dans le choc.
2. Calculer l'amplitude θ des oscillations du pendule.

A.N. $g = 10$ m/s^2, $l = 2$ m, $m = 10$ g, $M = 2$ kg, $v = 200$ m/s.

Exercice n° 7

Angle maximum de déflexion ⋆⋆⋆ ☺

Une particule de masse m_1 et de vitesse V_1 heurte une particule de masse m_2 et de vitesse nulle. La collision est supposée élastique.

En supposant $m_1 > m_2$, calculer l'angle maximum de déflexion θ_1^{max} de la particule 1.

Deux possibilités pour traiter ce problème :

1. Dans le référentiel du centre de masse :
2. Dans le référentiel du laboratoire :
   En exploitant la conservation de la quantité de mouvement, on exprimera V_1' et V_2' en fonction de V_1, θ_1 et θ_2. En reportant ces valeurs dans l'équation de l'énergie, on en déduira θ_1 en fonction de θ_2, m_1 et m_2.

Exercice n° 8

Patineur et ballon ⋆

Un patineur de masse $M = 70$ kg est immobile au centre d'une patinoire circulaire de rayon $r = 20$ m. On lui lance un ballon de masse $m = 2$ kg. Le ballon a une vitesse horizontale $v = 10$ m/s lorsque le patineur l'attrape. L'ensemble patineur-ballon se met en mouvement, supposé sans frottement. Quel temps mettra-t-il pour atteindre le bord de la patinoire ?

Exercice n° 9

Désintégration du radon ⋆⋆

Un atome de radon au repos (masse 222 u.m.a.) émet en se désintégrant une particule α (noyau d'hélium, masse 4 u.m.a.) et se transforme en atome de polonium (masse 218 u.m.a.) :

$$^{222}_{86}Rn \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{218}_{84}Po$$

Quelle est la vitesse et l'énergie cinétique de l'atome de polonium, sachant que l'énergie cinétique de la particule α est $E_c = 5,5 \times 10^6$ eV ?

Rappel : u.m.a. = unité de masse atomique ; un atome de carbone a pour masse 12 u.m.a. ; 1 mole de carbone a pour masse 12 g ; le nombre d'Avogadro $N \approx 6 \times 10^{23}$ molécules par mole.

Exercice n° 10

Estimation de la masse du neutron ⋆⋆

Une particule P_1 de masse m_1 et de vitesse V_1 heurte une particule au repos P_2 de masse m_2. La collision est élastique. P_2 est projetée dans une direction qui fait un angle θ avec la trajectoire initiale de P_1. Pour quelle valeur de θ la vitesse V_2' de P_2 est-elle maximum ?

Application : Des neutrons de masse m_n sont émis avec une vitesse V_n par une cible de béryllium frappée par des particules α. On bombarde avec ces neutrons des cibles contenant des atomes d'hydrogène ou d'azote au repos, et l'on mesure les vitesses maximales V'_{proton} et V'_{noyau} des protons et des noyaux d'azote éjectés. On connaît $m_{noyau}/m_{proton} = 14$ et on mesure $V'_{proton}/V'_{noyau} = 7,5$. En supposant les collisions élastiques, montrer que l'on peut en déduire une valeur approchée de la masse m_n du neutron.

Exercice n° 11

Échange entre deux wagons ⋆⋆

Deux wagons sont lancés sur deux voies parallèles. Leurs vitesses initiales sont respectivement V_1 et V_2, leurs masses totales M_1 et M_2. Au moment où ils sont face à face, un sac de masse m est lancé du premier wagon vers le second, et vice versa. Les frottements sont suffisants pour qu'après un temps très court, les sacs se trouvent immobiles dans leurs wagons destinataires respectifs.

1. Calculer les vitesses des wagons après réceptions des sacs.
2. Calculer V_2 en fonction de V_1, M_2 et m pour que l'on ait $V'_2 = 0$.

A.N. $M_2 = 1000$ kg ; $m = 100$ kg ; $V_1 = 9$ m/s.

Exercice n° 12

Remplissage d'un wagon ⋆⋆

On se propose de remplir un wagon avec du charbon pendant que le train roule avec une vitesse V_0. Pour cela une trémie laisse tomber verticalement dans le wagon une masse de charbon $\frac{dm}{dt}$ par seconde.

1. Quelle doit être la force de traction appliquée au wagon pour maintenir sa vitesse constante ? On négligera les forces de frottement du wagon sur les rails et dans l'air.
2. Calculer l'énergie cinétique acquise par le charbon chargé pendant un temps T. Calculer le travail des forces de traction pendant ce même temps, comparer ces deux énergies et conclure.

A.N. $\frac{dm}{dt} = 4000$ kg/s, $V_0 = 5$ m/s, $T = 5$ s.

Quelques résultats :

Ex.2 : $V_f = -\frac{m'}{m} V_h$.

Ex.4 : $F = Rh\nu/c$, $T = 0,035$ s.

Ex.5 : $E_{c1} = E_c \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2$.

Ex.6 : $(1-\cos\theta) = \frac{m^2 v^2}{2lg(M+m)^2}$.

Ex.7 : $\sin\theta_{max} = \frac{m_2}{m_1}$.

Ex.8 : Temps : 72 s.

Ex.9 : $E_c(Po) = \frac{m_{He}}{m_{Po}} E_c(He)$.

Ex.10 : $\frac{V'_{proton}}{V'_{noyau}} = \frac{m_n + m_{noyau}}{m_n + m_{proton}}$.

Ex.11 : $V'_1 = \frac{M_1 V_1 + m(V_2 - V_1)}{M_1}$ et $V'_2 = \frac{M_2 V_2 + m(V_1 - V_2)}{M_2}$.

Ex.12 : $F = V_0 \frac{dm}{dt}$.

CINÉMATIQUE

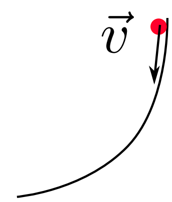
Exercices prioritaires :

Exercice n° 1

Vrai ou faux ? ⋆

Justifiez vos réponses.

1. L'accélération d'un point matériel dont la vitesse est constante (50 km/h) est systématiquement nulle.
2. Une balle glisse sans frottement dans une pente incurvée. Ce faisant :
   (a) Sa vitesse augmente et son accélération diminue
   (b) Sa vitesse diminue et son accélération augmente
   (c) Les deux augmentent
   (d) Les deux sont constantes
   (e) Les deux diminuent



3. Un film montre la chute d'un objet (qui a donc une accélération dirigée vers le bas). Si on projette le film à l'envers (de la fin, vers le début), l'accélération sera-t-elle dirigée :
   (a) vers le bas ?
   (b) vers le haut ?

Exercice n° 2

Mouvement avec accélération constante ⋆⋆

Quelle est la trajectoire d'un point subissant une accélération vectorielle constante ?

1. Montrer que le mouvement correspondant n'est en général pas uniformément varié.
2. A quelle condition cette trajectoire est-elle rectiligne ?
3. Dans quel cas particulier le mouvement est-il uniformément varié ?

Exercice n° 3

Avion de chasse ⋆

Un avion de chasse vole à 1800 km/h suivant une trajectoire circulaire (looping) située dans un plan vertical.

1. Calculer la position, la vitesse et l'accélération du pilote en coordonnées cartésiennes et polaires.
2. Sachant qu'un pilote entraîné supporte au total $6g$ ($5g$ plus l'accélération de pesanteur g), quel est le rayon minimum qu'il peut donner à la trajectoire ?

Exercice n° 4

Détermination d'un mouvement polaire ⋆⋆ ☺

Un mobile ponctuel M a une vitesse $\vec{v}(t) = ae^{-\lambda t}\vec{u}_\theta$ en coordonnées polaires. La position initiale du mobile est donnée par $\theta(t=0) = 0$ et $r(t=0) = r_0$. On se propose d'étudier le mouvement de M.

1. Quelle est la dimension de a et $1/\lambda$? Que représentent-ils physiquement ?
2. Exprimer les équations temporelles du mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$.
3. Quelle est la trajectoire de M ? Faire un dessin.
4. Calculer le vecteur accélération de M en coordonnées polaires.
5. Le mouvement est-il uniforme, accéléré, uniformément accéléré, autre ?
6. La connaissance du vecteur vitesse est elle suffisante pour répondre à la question 2 ? à la question 4 ? Expliquer.

Exercice n° 5

Détermination d'un mouvement cylindrique ⋆⋆

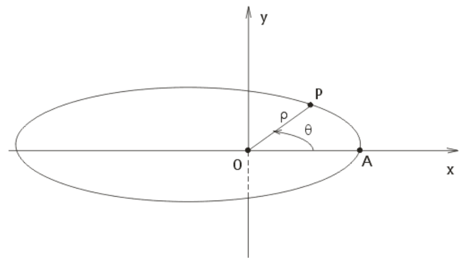
Un mouvement est représenté en coordonnées cylindriques par $r = a$, $\theta = 3bt^2$ et $z = 4abt^2$.

1. Quelles sont les dimensions des deux constantes a et b ?
2. Quelle est la trajectoire ?
3. Calculer à l'instant t la distance parcourue par le mobile (on pourra s'aider en se représentant la trajectoire sur le cylindre déroulé).
4. Calculer son vecteur vitesse et son accélération (en coordonnées cylindriques).
5. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}_t$ tangent à la trajectoire. Quel est l'angle α du vecteur vitesse avec le plan horizontal (calculer $\vec{u}_t \cdot \vec{u}_\theta$) ?

Exercices supplémentaires :

Exercice n° 6

Mouvement elliptique ⋆⋆



Un satellite décrit une trajectoire elliptique (voir Figure) dont l'équation en coordonnées polaires (avec l'origine au foyer) est :

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$

ou p et $0 < e < 1$ sont deux paramètres constants, respectivement le paramètre et l'excentricité de l'ellipse). On sait par ailleurs que la conservation du moment cinétique implique :

$$\rho^2\dot{\theta} = \mathrm{C^{te}}$$

1. Déterminer la vitesse du satellite en un point quelconque, en coordonnées polaires .
2. En déduire le vecteur accélération et montrer que celle-ci est centrale. Pourquoi n'est-elle pas constante ?
3. En quels points la vitesse et l'accélération sont-elles minimales ou maximales ? Représenter les vecteurs correspondants sur la trajectoire.

Les expressions peuvent être factorisées en faisant apparaître $\rho^2\dot{\theta}$

Exercice n° 7

Mouvement circulaire accéléré ⋆

Un mobile subit un mouvement circulaire de rayon R_0 et d'équation $\theta = at^2$ où $a = \mathrm{C^{te}}$. Trouver sa vitesse et son accélération.

Exercice n° 8

Trajectoire d'une roue ⋆⋆

On considère une roue de rayon R, de centre O', roulant sans glisser sur le sol avec une vitesse angulaire ω. On s'intéresse à la trajectoire d'un point A, situé à la périphérie de la roue et dont la position en $t = 0$ se trouve à l'origine du repère (O, x, y) lié au sol.

1. Déterminer les coordonnées (x, y) de A en fonction de t et tracer sa trajectoire.
2. Calculer le vecteur vitesse et étudier les variations de son module au cours du temps.
3. Représenter dans un espace vectoriel l'évolution du vecteur accélération au cours du temps.
4. Mêmes questions pour la trajectoire vue par un observateur positionné au centre de la roue, sans tourner avec celle-ci.

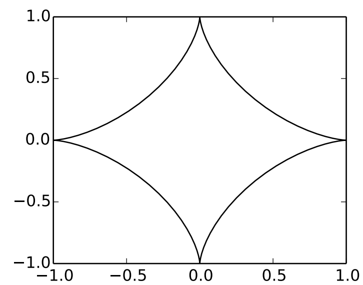
Exercice n° 9

Longueur de l'astroïde ⋆⋆⋆

Une particule se déplace selon une trajectoire décrite par les équations paramétriques suivantes :

$$x(t) = x_0 \cos^3(\omega_0 t)$$
$$y(t) = y_0 \sin^3(\omega_0 t)$$

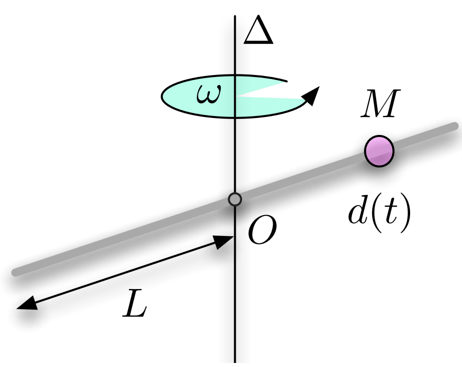
Déterminer la longueur de la trajectoire. On prendra : $x_0 = y_0 = 1$ m et $\omega_0 = 1$ rad/s.



Exercice n° 10

Tube tournant ⋆⋆⋆

Un tube rectiligne tourne dans un plan horizontal à la vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical Δ passant par son centre (figure ci-contre). A l'instant $t = 0$ on lâche un point matériel de masse M à la distance d_0 de l'axe, ce point glisse sans frottement à l'intérieur du tube. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On utilisera dans cet exercice les fonctions hyperboliques (cosh et sinh). En préparation, révisez leurs propriétés.



1. Exprimer $d(t)$, la distance entre le point et l'axe au cours du temps.
2. Exprimer la réaction du tube, en module et direction.
3. Montrer que l'angle de sortie est indépendant de ω.
4. Représenter la trajectoire du point une fois éjecté du tube de longueur $2L$.

Quelques résultats :

Ex.3 : L'accélération est maximale au bas de la boucle, avec une accélération supplémentaire (par rapport à la pesanteur) de 50 m/s^2. On trouve un rayon de 5 km.

Ex.5 : La trajectoire est hélicoïdale, d'axe Oz, de rayon a et de pas $p = \frac{8}{3}\pi a$

Ex.6 : $\vec{v} = \rho^2\dot{\theta}\left(\frac{e\sin\theta}{p}\overrightarrow{u_r} + \frac{1+e\cos\theta}{p}\overrightarrow{u_\theta}\right)$

Ex.7 : $\vec{v} = 2atR_0\overrightarrow{u_\theta}$ $\qquad$ $\vec{\gamma} = -4a^2t^2R_0\overrightarrow{u_r} + 2aR_0\overrightarrow{u_\theta}$

Ex.8 : $\vec{v} = R\omega\left[(1-\cos\omega t)\vec{\imath} + \sin\omega t\,\vec{\jmath}\right]$

Ex.9 : $L = 6$ m.

Ex.10 : $r(t) = d_0\cosh\omega t$ $\qquad$ et $\qquad$ $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{d_0}{L}\right)^2}}$.

OSCILLATEUR HARMONIQUE

Exercices prioritaires :

Exercice n° 1

Deux ressorts accrochés ⋆

Deux ressorts sans masse de longueurs l_1 et l_2 au repos et de raideurs k_1 et k_2 sont accrochés bout à bout et tendus horizontalement entre deux murs distants de $D > l_1 + l_2$. Le dispositif est immobile.

1. Calculer l'allongement de chacun des ressorts.
2. Calculer pour chaque ressort la force qu'il exerce sur le mur auquel il est fixé. Comparer.
3. Calculer la force qui agit sur le point commun aux deux ressorts, lorsque les ressorts sont écartés de x par rapport à la position d'équilibre.
4. En supposant que ce point commun a une masse m, écrire l'équation qui régit le mouvement de m. Pour cela on repérera la masse sur un axe horizontal par sa position x ($x = 0$ quand le système est immobile).
5. Déterminer complètement $x(t)$ en supposant qu'à $t = 0$ la masse est lâchée depuis x_0 sans vitesse.

Exercice n° 2

Ressort et gravité ⋆

Une masse m est pendue à un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0. On repérera la position de la masse m par sa coordonnée z sur un axe vertical.

1. Déterminer la longueur l'_0 du ressort lorsque m est à l'équilibre.
2. On écarte la masse vers le bas d'une distance Δz par rapport à sa position d'équilibre. Choisir avec astuce l'origine des "z", écrire l'équation du mouvement qui régit l'évolution de z.
3. Résoudre cette équation en supposant qu'à $t = 0$ on a lâché la masse sans vitesse initiale.
4. Reprendre le problème en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

Exercice n° 3

Le pendule simple ⋆⋆ ☺

Un pendule, constitué d'une boule de masse m attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, est suspendu à un point fixe O. On met le pendule en mouvement, par exemple en l'écartant d'un angle θ_0 à la verticale, le fil étant tendu, puis en le lâchant sans vitesse initiale. On néglige tous les frottements. L'objectif est de faire le tour du problème, lequel a de nombreuses applications :

- Établir l'équation différentielle du mouvement de la boule. Cette équation différentielle générale n'a pas de solution analytique en termes d'équation du mouvement (expression des coordonnées en fonction du temps), c'est-à-dire que l'on ne sait pas la résoudre avec un crayon et un papier, sauf dans le cas de *l'approximation des petites oscillations*. Hormis quelques cas particuliers, seuls des calculs approchés (effectués par ordinateur) permettent de s'en sortir.
- Résoudre l'équation différentielle dans le cas de *l'approximation des petites oscillations* et en déduire dans ce cas l'équation temporelle du mouvement.
- Il est cependant possible de calculer analytiquement la vitesse en fonction de la position de la boule **dans le cas général**.
- L'expression de la vitesse permet de connaître la tension du fil en fonction de la position de la boule.

Résolution du problème général :

Pour ceux qui veulent se débrouiller tout seul, traiter les différentes étapes ci-dessus.

Résolution guidée :

Soit un repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$, O étant le point où est fixé le fil du pendule, O_x l'axe vertical dirigé vers le bas et O_y l'axe horizontal dirigé vers la droite. Soit θ l'angle polaire entre O_x et le fil du pendule compté positivement dans le sens direct.

1. Équation différentielle du mouvement :
   (a) Que peut on dire sur le mouvement de la boule ? en déduire l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération en fonction de θ, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.
   (b) Transcrire les conditions initiales pour θ et $\frac{d\theta}{dt}$.
   (c) Faire le bilan des forces extérieures exercées sur la boule.
   (d) Écrire le principe fondamental de la dynamique. Projeter l'équation vectorielle obtenue dans les directions de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.
   (e) En déduire l'équation différentielle du mouvement.
2. Approximation des petites oscillations :
   Calculer l'angle θ (en degrés) tel que l'erreur relative faite en écrivant $\sin(\theta) = \theta$ est égale à 5%. Réécrire l'équation différentielle en faisant l'hypothèse que θ reste suffisamment petit pour que $sin(\theta) \simeq \theta$. Résoudre cette nouvelle équation différentielle pour établir l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

3. Vitesse en fonction de la position :
   Il est tout à fait possible (et c'est souvent le cas) d'exprimer la vitesse en fonction de la position, alors que la vitesse ou la position en fonction du temps ne trouvent pas de solution. Voici la séquence à suivre :
   (a) reprendre l'équation différentielle du mouvement sans faire d'approximation.
   (b) pour éviter la dérivée seconde, réécrire l'équation en posant $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$.
   (c) faire passer dt au numérateur.
   (d) on se retrouve avec d'un côté $d\omega$ qui serait facile à intégrer, et de l'autre $\sin\theta\, dt$ qui ne s'intègre pas, mais qui serait facile à intégrer si on avait $\sin\theta\, d\theta$.
   (e) remplacer donc $\sin\theta\, dt$ par $\sin\theta\, d\theta\, \frac{dt}{d\theta}$, puis $\frac{dt}{d\theta}$ par $\frac{1}{\omega}$.
   (f) intégrer séparément les différentielles sur ω et sur θ, pour obtenir l'expression finale $\omega(\theta)$.
4. Tension du fil :
   Reprendre l'équation obtenue par la projection du PFD suivant $\vec{u}_r$ et en déduire l'expression du module de la force de tension du fil en fonction de θ.

Application :
Un enfant un peu trop grand se balance de bon cœur sur une balançoire dont les cordes sont usées. En quel point de la trajectoire le risque de rupture des cordes est-il le plus grand ?

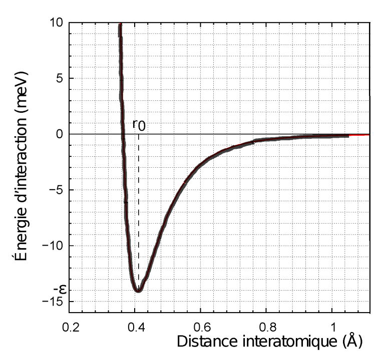
Exercices supplémentaires :

Exercice n° 4

Molécule diatomique**

Une molécule de diazote (N_2) peut être vue comme un système de deux masses m liées. On associe à la liaison une énergie potentielle caractérisant la cohésion de la molécule.

Cette énergie est une fonction $E_p(r)$ où r est la distance séparant les deux atomes. $E_p(r)$ est caractérisée par :
- $E_p(r) \to 0$ lorsque $r \to +\infty$ (l'énergie d'interaction est nulle lorsque les deux atomes sont éloignés)
- $E_p(r) \to +\infty$ lorsque $r \to 0$ (il est impossible de superposer les deux atomes)
- $E_p(r)$ passe par un minimum $E_0 < 0$ en $r = r_0$ (en r_0 la liaison est à son point d'équilibre)



1. En raisonnant sur la forme mathématique de $E_p(r)$, montrer qu'il existe une zone autour de r_0 dans laquelle la liaison chimique peut être modélisée par un ressort.
2. Donner l'expression de la constante de raideur k en fonction de $\frac{d^2E_p}{dr^2}(r_0)$

Exercice n° 5

Ressort et frottement visqueux : analogie électrocinétique**

Une masse m est accrochée à un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0. Le système est posé sur un support horizontal n'exerçant aucun frottement sur la masse. On repérera la position de la masse m par sa coordonnée x sur un axe horizontal ($x = -l_0$ repère le point fixe du ressort et $x = 0$ repère le point d'équilibre de la masse). L'air (le fluide dans lequel se déplace la masse) exerce une force de frottement visqueux qui s'exprime $\vec{f} = -\eta\vec{v}$ où η est un coefficient positif dépendant de la viscosité du fluide et de la forme de la masse (aérodynamique).

1. Établir l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse.
2. Comparer cette équation à celle qui régit la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série.
3. Mettre cette équation sous la forme :
$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
où τ est le temps d'amortissement et $\omega_0 = 2\pi/T_0$ la pulsation propre de l'oscillateur (T_0 est la période propre).
4. Discuter des différents régimes que l'on obtient pour le mouvement en fonction de l'importance relative des deux paramètres τ et T_0.

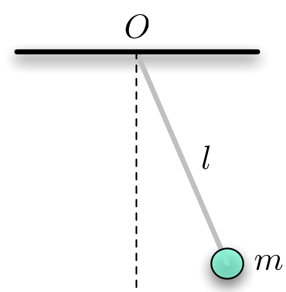
Exercice n° 6

Pendule simple et énergie **

On considère une masse ponctuelle m fixée au bout d'une tige rigide, de longueur l, pouvant tourner librement dans un plan vertical autour de l'autre extrémité O.

1. Définir une coordonnée représentant de manière commode la position de la masse m.

2. Écrire son énergie cinétique E_c et son énergie potentielle E_p en fonction de cette coordonnée et en donner une représentation graphique
3. Discuter qualitativement le mouvement de la masse m, selon la valeur de son énergie mécanique totale.
4. On suppose que la masse m reste au voisinage de sa position d'équilibre. Écrire une expression du développement limité de E_p autour de cette position d'équilibre. En déduire l'équation du mouvement. A quel autre système connu est-on ramené ?



Exercice n° 7

Oscillations d'un cube dans l'eau ⋆⋆⋆

Un cube de côté a, de masse volumique ρ_c, flotte en équilibre dans un liquide de masse volumique ρ_L ($\rho_L > \rho_c$). Les conditions sont telles que le cube ne bascule pas, gardant toujours sa face inférieure horizontale. On ne prend pas en compte la pression de l'air, ni les frottements visqueux avec le fluide. On choisit un repère dont l'origine se situe au niveau de la base du cube lorsqu'il est à l'équilibre dans le fluide. A l'instant $t = 0$ on enfonce le cube dans le fluide (hauteur de cube immergée h_0) et on le lâche sans vitesse initiale.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas où $h_0 < a$.
2. En déduire l'équation du mouvement du cube en fonction du temps. Préciser la période des oscillations.
3. Quelle doit être la valeur de h_0 pour que le cube puisse bondir hors du liquide ?

Exercice n° 8

Ressort et frottement solide ⋆⋆⋆

Une masse m est accrochée à un ressort sans masse de raideur k et de longueur à vide l_0. Le système est posé sur un support horizontal exerçant un frottement solide sur la masse caractérisé par ses coefficients statique k_s et dynamique k_d ($k_s > k_d$ et on prendra ici $k_s = \frac{5}{4} k_d$). On repérera la position de la masse m par sa coordonnée x sur un axe horizontal ($x = -l_0$ repère le point fixe du ressort et $x = 0$ repère le point d'équilibre de la masse lorsqu'il n'y a pas de frottement).

> Il est rappelé que le frottement solide devra être pris en compte de la manière suivante : Le support exerce sur la masse une réaction compensant le poids (sur l'axe Oz) et une force de frottement (sur l'axe Ox)
> – Tant que la masse est immobile la force de frottement compense la force de rappel si celle ci est moins intense que $k_s mg$.
> – Dès que la masse bouge la force de frottement est constante, s'oppose au mouvement et a pour intensité $k_d mg$.

1. Déterminer quelle est la valeur maximale d'étirement $x = x_L > 0$ (ou contraction $x = -x_L$) du ressort en dessous de laquelle la masse reste immobile si lâchée en cette position.
2. À $t = 0$ on écarte la masse d'une valeur $x_0 > x_L$. Écrire l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse en définissant clairement quand cette équation est applicable.
3. Montrer que le mouvement de la masse est bien une oscillation de même période que s'il n'y avait pas de frottement mais que le centre d'oscillation est déplacé : le déterminer.
4. Expliquer ce que l'on doit faire pour décrire la suite du mouvement lorsque la masse s'arrête pour changer de sens.
5. En supposant que $x_0 = \frac{13 k_d mg}{2k}$ décrire le mouvement complet : à quel instant t_F et en quel point x_F la masse s'arrête t'elle définitivement ?

Quelques résultats :

Ex.1 : allongement du ressort 1 $= k_2 \frac{D-l_1-l_2}{k_1+k_2}$.

Ex.2 : $z = \Delta z \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$ (Oz orienté vers le bas et O est le point d'équilibre de la masse)

Ex.4 : $k = \frac{d^2 E_p}{dr^2}(r_0)$

Ex.5 : $m\ddot{x} + \eta\dot{x} + kx = 0$ à comparer à $LC\ddot{V}_C + RC\dot{V}_C + V_C = 0$

Ex.6 : $E_p = E_0 + mgl\sin\theta$ et $E_c = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

Ex.7 : $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_C}{\rho_L}\frac{a}{g_0}}$.

Ex.8 : $x_F = \frac{k_d mg}{2k}$ et $t_F = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

MOMENT D'UNE FORCE ET MOMENT CINÉTIQUE

Exercices prioritaires :

Exercice n° 1

Le treuil ⋆

Un treuil est constitué d'un cylindre de diamètre d et d'axe horizontal, sur lequel s'enroule une corde. Une manivelle de longueur L est utilisée pour faire tourner le cylindre autour de son axe. Le treuil est utilisé pour remonter d'un puits une personne de masse M.

1. Faire un schéma simple du système dans un plan bien choisi.
2. Quel est, par rapport à l'axe du cylindre, le moment de la force que doit exercer l'opérateur sur le cylindre du treuil pour maintenir la personne à une altitude constante ?
3. Quelle force doit-il appliquer pour cela sur la manivelle ?
4. A.N. : $d = 10$ cm ; $L = 50$ cm ; $M = 80$ kg.

Exercice n° 2

Le pendule pesant ⋆⋆☺

On considère un pendule simple de masse m dont le fil coulisse au point d'attache dans un anneau, de telle sorte que l'on puisse changer la longueur du pendule au cours du mouvement.

1. On lâche la masse avec une vitesse nulle. Le fil, tendu, fait un angle θ_1 avec la verticale. On maintient d'abord la longueur du fil constante et égale à l_1. En employant le théorème du moment cinétique, calculer la vitesse v_1 de la masse quand le fil passe à la verticale.
2. Quand le fil passe à la verticale, on raccourcit le fil en un temps que l'on supposera suffisamment bref pour qu'il reste vertical. Rappeler quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse. Calculer leur moment par rapport au point d'attache O durant le raccourcissement du fil. Quelle est la loi de conservation qui en résulte ?
3. Juste après l'opération, le fil étant encore vertical, la longueur est l_2 et la vitesse de la masse v_2. Calculer v_2 d'abord en fonction de v_1, l_1 et l_2, puis en fonction de l_1, l_2 et θ_1 et de l'accélération de la pesanteur g.
4. Calculer l'amplitude angulaire maximum θ_2 du pendule si l'on maintient la longueur égale à l_2 (calculer $\cos\theta_2$). Discuter de la validité de la formule (d'après celle ci $|\cos\theta_2|$ peut devenir supérieur à 1 ! qu'est ce qui ne va pas ?)

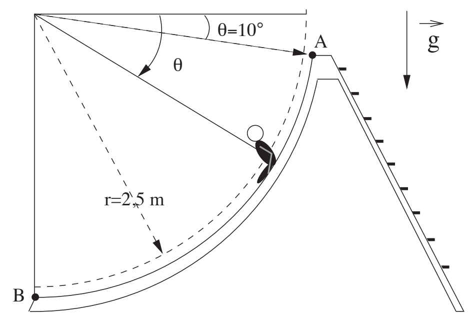
5. A.N. : $\theta_1 = 30$ degrés, $l_1 = 2$ m, $l_2 = 1.5$ m, calculer θ_2.
6. Pour le même θ_1, calculer $\cos\theta_2$ si $l_1 = 1\ m$ et $l_2 = 0.4\ m$. Interpréter.
7. A quel jeu ce système vous fait-il penser ?

Exercices supplémentaires :

Exercice n° 3

Le Toboggan ⋆⋆

Un enfant, que l'on assimilera a un point matériel M de masse $m = 40$ kg, glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2,5$ m. L'enfant, initialement en A, se laisse glisser (vitesse initiale nulle) et atteint le point B avec une vitesse v. On supposera le référentiel terrestre galiléen et les frottements négligeables.



1. A l'aide du théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
2. A partir de cette équation, exprimer la vitesse en fonction de θ. Calculez v en B.
3. Retrouver ce résultat par une méthode plus directe.

Exercice n° 4

Enroulement d'une ficelle autour d'un poteau ⋆⋆⋆

Une bille est lancée horizontalement à une vitesse V_0, elle est attachée à une ficelle de longueur L_0 qui s'enroule autour d'un poteau vertical de rayon a. On suppose la vitesse $V(t)$ suffisamment grande pour que l'on puisse négliger l'effet de la pesanteur. On notera $L(t)$ la longueur non enroulée de la ficelle.

1. Le moment cinétique de la bille par rapport à l'axe du poteau est-il conservé ?
2. Vous pouvez continuer le problème pour trouver $V(t)$ et $L(t)$ en prenant comme conditions initiales V_0 et L_0. Penser aux théorèmes faisant intervenir l'énergie.

Exercice n° 5

L'atome de Bohr ⋆⋆

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène est le suivant : un électron de masse m et de charge $q = -e$ décrit des orbites circulaires de rayon r autour d'un noyau supposé fixe placé en O de charge $Q = +e$.

1. Montrer que si l'on suppose que le module du moment cinétique de l'électron σ_0 par rapport à O, est de la forme $\sigma_0 = n\hbar$ où n est un entier et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite, on peut calculer pour chaque valeur de n, le rayon de l'orbite et l'énergie mécanique de l'électron.
2. Montrer en particulier que r est de la forme $r = n^2 r_0$; exprimer r_0 et calculer sa valeur numérique.

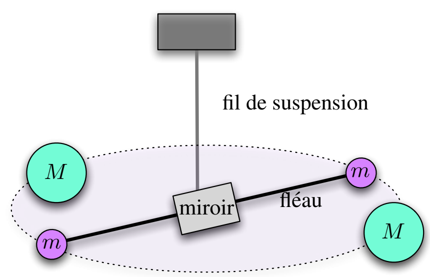
$m = 9,1096 \times 10^{-31}$ kg, $\epsilon_0 = 8,854188 \times 10^{-12}$ F/m, $e = 1,60219 \times 10^{-19}$ C, $h = 6,6262 \times 10^{-34}$ J s.

Exercice n° 6

L'expérience de Cavendish ★★

La première détermination de la constante $\mathscr{G}$ est due à Cavendish en 1798 par une expérience sommairement décrite ci-après (d'après Faroux et Renault).

Deux petites sphères de platine de masse m sont placées aux extrémités d'un fléau horizontal de longueur $2l$ suspendu à un fil dont la constante de torsion est C ; deux sphères de plomb de masse M ont leur centre dans le plan horizontal du fléau à une distance d du centre des petites sphères (figure ci-contre). Le dispositif expérimental est symétrique, les centres des sphères de plomb sont également espacés de $2l$ de telle façon que les 4 sphères sont toujours placées sur un cercle de rayon l ayant pour axe le fil de suspension.



Il est rappelé qu'un fil de torsion va créer un moment (couple) qui lui est parallèle et qui s'oppose à sa torsion. Si $\vec{u}_z$ donne la direction du fil et que θ est l'angle de torsion dans le plan perpendiculaire au fil et orienté par $\vec{u}_z$, on a :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{\text{fil}/\vec{u}_z}} = -C\theta\vec{u}_z$$

1. Lorsqu'on place les sphères de plomb dans une nouvelle position symétrique de la précédente le fléau tourne d'un angle 2α. Calculer $\mathscr{G}$ en fonction de m, M, l, d, α et C.
2. L'angle 2α dont a tourné le fléau est mesuré par la méthode de Pogendorf : un miroir placé sur le fléau renvoie un faisceau lumineux, le déplacement du spot lumineux observé à une distance de 5 ± 0.001 m du miroir est de 5.5 ± 0.05 cm. On a également mesuré :

$m = 50 \pm 0.001$ g, $M = 30 \pm 0.001$ kg, $l = 10 \pm 0.05$ cm, $d = 10 \pm 0.1$ cm et $C = (5 \pm 0,05) \times 10^{-7}$ Nm/rad.
Quelle est la valeur de $\mathscr{G}$ que l'on peut déduire de cette expérience ainsi que l'incertitude attachée à cette mesure ?

3. Peut-on négliger l'attraction entre une sphère de plomb et la sphère de platine la plus éloignée ?

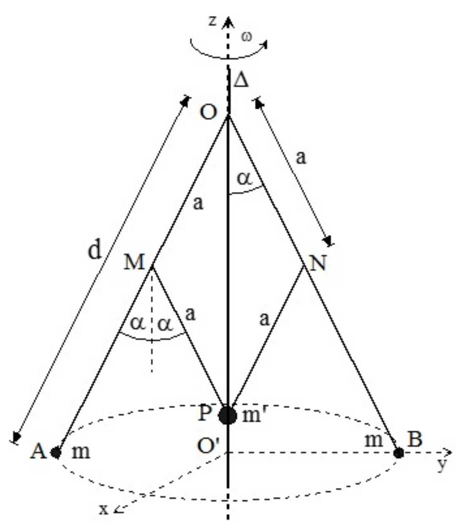
> Pour aider au tracé d'une figure à l'échelle on donne les masses volumiques du plomb et du platine respectivement 11,35 et 22,45 kg/dm^3.

Exercice n° 7

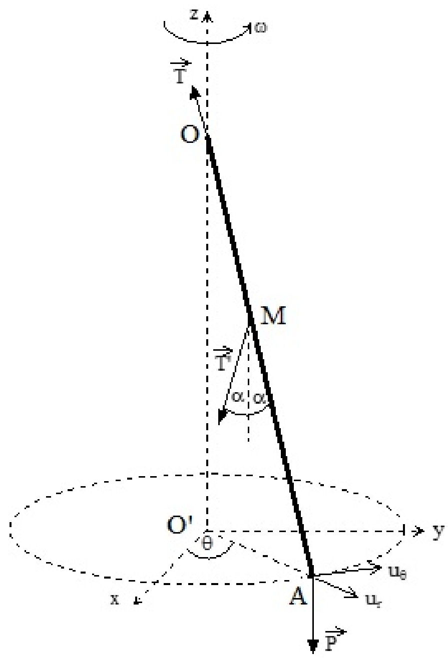
Le régulateur de Watt ⋆⋆

On se propose d'étudier le principe de fonctionnement du régulateur mécanique inventé en 1788 par le physicien anglais James Watt (dont on a donné le nom à l'unité de puissance).

Le régulateur est constitué de 2 barres rigides OA et OB de masses négligeables, de longueur d, tournant avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ constante autour de l'axe vertical Δ passant par le point O (par exemple solidaire de l'arbre d'une machine à vapeur). On note α le demi-angle au sommet O entre les barres OA et OB. Aux extrémités A et B de chacune des barres, sont fixées deux masses m identiques. Des points M et N situés sur chacune des barres OA et OB partent deux autres barres rigides, de masses négligeables, de longueur a, articulées au point P situé sur l'axe Δ. Les quatre côtés du losange $OMPNO$ ont une même longueur a.
Toutes les liaisons sont supposées sans frottement : on admettra que les forces de contact exercées sur les barres OA et OB au niveau de la liaison au point sont portées par la direction respective des barres OA et OB et de même pour les forces de liaisons exercées sur les barres MP et NP aux points M, N et P (voir schéma).



Le but de cet exercice est d'établir une relation entre l'angle α et la vitesse angulaire ω en écrivant les conditions d'équilibre mécanique des barres OA et OB avec leurs masses m fixées respectivement en A et B d'une part de la masse m' située au point P, d'autre part.



1. Le mouvement du point A (et du point B) est un mouvement circulaire uniforme. On utilise les coordonnées cylindriques $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.(figure ci-contre)

   Exprimez pour le point A dans ce repère le vecteur position $\overrightarrow{OA}$, la vitesse $\overrightarrow{v_A}$ et l'accélération $\overrightarrow{a_A}$.
2. Dans le même repère exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_{m/O}}$ de la masse m fixée en A par rapport au point O.
3. Dans le même repère exprimer les moments $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{P}/O}}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{T}/O}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\vec{T'}/O}}$ des forces $\vec{P}$, $\vec{T}$ et $\vec{T'}$ par rapport au point O.
4. En écrivant l'équilibre de la masse m' (PFD) montrer que l'intensité de la force exercée par chacune des barres PN et PM est donnée par :

$$T' = \frac{m'g}{2\cos\alpha}$$

5. En utilisant le théorème du moment cinétique et les résultats précédents déterminer l'expression de $\cos\alpha$ lorsque le régulateur est à l'équilibre (α reste constant)
6. Quelle(s) application(s) peut on imaginer pour ce système.

Quelques résultats :

Ex.1 : $F_0 = 80$ N.

Ex.2 : $v_2 = \frac{\sqrt{2g_0 l_1^3(1-\cos\theta_1)}}{l_2}$.

Ex.3 : $v_B = 6,36$ m/s.

Ex.4 : Le moment cinétique de la bille n'est pas conservé.

Ex.5 : $r = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$. Valeur numérique $r_0 = 5.292 \times 10^{-11}$ m.

Ex.6 : $\mathcal{G} = \frac{\alpha C}{2lmM} \frac{1}{\left(\frac{1}{d^2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{d}{2l}\right)^2 - \frac{d}{(4l^2-d^2)2l}}}$.

FORCES CENTRALES ET GRAVITATION

Exercices prioritaires :

Exercice n° 1

Poids et altitude ⋆

A la surface de la terre le « poids » d'un homme indiqué par un dynamomètre est de 80 kg. Quel sera le « poids » indiqué par le dynamomètre à une altitude de 8000 m ?

On donne $R_T = 6400$ km.

Exercice n° 2

Trajectoire d'une comète ⋆⋆ ☺

En 1997, la comète *Hale-Bopp* est passée relativement près de la Terre et a traversé notre ciel. Cette comète possède une orbite elliptique autour du Soleil avec une excentricité $e = 0,995$. A son périhélie, le 1^{er} avril 1997, sa distance au Soleil était $r_P = 1,35 \times 10^8$ km et en ce point sa vitesse valait $v_P = 45$ km/s.

1. La conservation de quelle quantité permet d'expliquer que la trajectoire de la comète est plane ? Pourquoi cette quantité est-elle conservée tout au long du mouvement ?
2. Calculer le paramètre q de cette orbite. En déduire la distance r_A de la comète à l'aphélie. Quelle est la vitesse v_A correspondante ? Justifier la démarche suivie pour obtenir cette vitesse particulière.
3. Que vaut le demi-grand axe a de l'orbite ?
4. Montrer que $q = a(1 - e^2)$.
5. Sachant que T désigne la période orbitale et que le rapport T^2/a^3 est constant en vertu de la loi des aires, prédire en quelle année la comète reviendra à son périhélie nous rendre visite.
6. On sait que l'énergie mécanique de la comète vaut $E = -4,49 \times 10^{23}$ J (l'énergie potentielle étant définie comme nulle à l'infini). Déterminer sa masse m. Étant donné que la masse volumique des roches cométaire est très voisine de celle de l'eau, quel est le rayon moyen R de cette comète (en faisant l'approximation d'une comète sphérique).
7. Démontrer, en justifiant chaque étape qui le nécessite, que l'on a la relation :

$$\frac{1}{2}(v_P + v_A)^2 = \mathcal{G}\frac{2M_{soleil}}{q}$$

8. Quelques années après son dernier passage la comète passe relativement près d'une planète géante du système solaire. Cette dernière perturbe gravitationnellement la comète et donc sa trajectoire. Après cette perturbation, les nouvelles caractéristiques orbitales sont $e' = 0,70$ et $a' = 1,5 \times 10^{10}$ km.
   – Quelle est la valeur du paramètre q' de cette nouvelle trajectoire elliptique ?
   – Que deviennent alors les distances r'_P et r'_A, respectivement au périhélie et à l'aphélie ?
   – Déterminer aussi les nouvelles vitesses correspondantes v'_P et v'_A.

Exercice n° 3

Satellite géostationnaire *

Déterminer le rayon de l'orbite circulaire d'un satellite géostationnaire.

Exercices supplémentaires :

Exercice n° 4

Poids à l'intérieur et à l'extérieur de la Terre :Théorème de Gauss **

Le théorème de Gauss, dans le cas gravitationnel, peut s'écrire :

$$\iint_S \vec{g} \cdot \vec{dS} = -4\pi \mathcal{G} M_S$$

où M_S est la masse qui se trouve à l'intérieur de la surface fermée S.

En utilisant le théorème de Gauss, et en supposant la Terre est une sphère homogène de rayon R, calculer la force de gravitation exercée par la Terre sur une masse ponctuelle m placée à une distance r du centre de la Terre :

1. dans le cas $r > R$
2. dans le cas $r < R$

Exercice n° 5

Pesanteur à la surface du soleil *

Sachant que le rayon du Soleil est 110 fois celui de la Terre, et sa masse 330 000 fois celle de la Terre, déterminer l'accélération de la pesanteur à la surface du Soleil.

Exercice n° 6

Orbite d'un satellite ⋆⋆

Un satellite artificiel gravite sur une orbite dont le périgée est à 640 km et l'apogée à 4000 km de la surface de la Terre. Calculer le demi-grand axe a de l'orbite, son excentricité e, son équation, sa période, sa vitesse au périgée et à l'apogée, et son énergie totale si sa masse est de 100 kg.

Exercice n° 7

Sonde interplanétaire ⋆⋆

On désire envoyer une sonde interplanétaire à partir de la Terre vers la planète Jupiter. On supposera que les orbites de ces deux planètes sont des cercles coplanaires de rayons R_T et R_J centrés sur le Soleil et qu'elles sont décrites dans le même sens.

1. Déterminer la vitesse V_T de la Terre sur son orbite en fonction de R_T et de la période T de son mouvement autour du Soleil. En déduire la masse M_S du Soleil.
   A.N. $R_T = 1,5 \times 10^{11}$ m ; $T = 3,16 \times 10^7$ s ; $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}$ S.I.
2. On désire que la sonde, une fois libérée de l'attraction terrestre, décrive une orbite elliptique tangente en son périhélie à l'orbite de la Terre ($r_1 = R_T$) et en son aphélie à celle de Jupiter ($r_2 = R_J$). Calculer les vitesses v_1 et v_2 correspondantes et en déduire le supplément de vitesse $v_1 - V_T$ à fournir à la sonde supposée libérée de l'attraction terrestre. On donne $R_J = 7,78 \times 10^{11}$ m.

Quelques résultats :

Ex.1 : 79,8 kg.

Ex.2 : $r_A = 5,38 \times 10^{13}$ m, $v_A r_A = v_P r_P$ donne $v_A = v_P \frac{1-e}{1+e} = 113$ m/s.

Ex.3 : $R = \sqrt[3]{g_0 \frac{R_T^2}{\omega^2}}$.

Ex.4 : à l'intérieur de la Terre $F(r) = m g_0 \frac{r}{R}$.

Ex.6 : $v_A = \frac{abR_T}{r_A}\sqrt{\frac{g_0}{a^3}} = 5,58 \times 10^3$ m/s, $v_P = \frac{abR_T}{r_P}\sqrt{\frac{g_0}{a^3}} = 8,25 \times 10^3$ m/s.

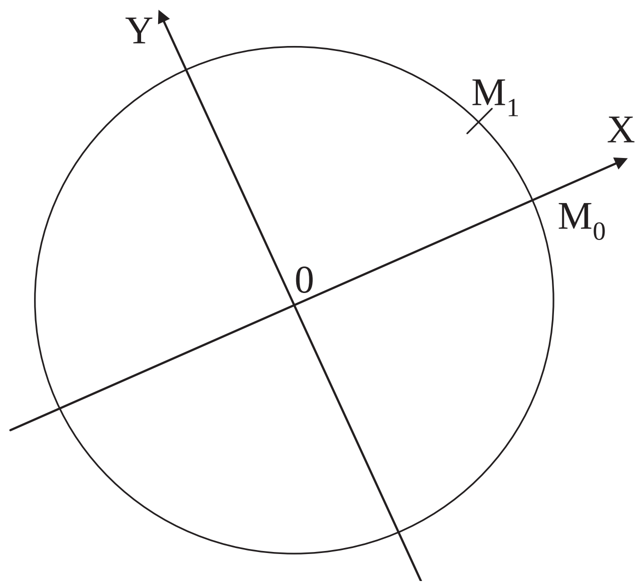
Ex.7 : $v_2 = \sqrt{\frac{-R_J K}{\left(\frac{R_T+R_J}{2}\right) R_T}} = 38,6$ km/s.

ATELIER 1 : CINÉMATIQUE

Partie 1

Approche numérique de la vitesse et de l'accélération
Le bus qui tourne dans un rond point

La vitesse et l'accélération sont abordées **de manière numérique**, en partant de leur définition, sans faire appel aux notions analytiques de différentielle ou de dérivée. Ces calculs numériques ne sont en aucun cas des démonstrations des relations générales qui lient la position, la vitesse et l'accélération. Nous nous plaçons ici dans un cas particulier, pour montrer pas à pas ce que « cachent » les dérivées.



Conseils :

⚠ Quand le nombre π intervient, laissez le sous la forme littérale π, il se simplifiera.
⚠ Utilisez un maximum de chiffres significatifs, notamment quand vous faites la différence entre deux chiffres proches (utilisez les mémoires de votre calculatrice).
⚠ N'oubliez pas les unités !

Problème :

Un bus décrit, à vitesse constante, un cercle de centre O et de rayon 100 m. Le temps mis pour effectuer le tour du rond point (période) est de 10π secondes.

Au temps $t_0 = 0$, le bus est au point M_0 défini par $X_0 = 100$, $Y_0 = 0$. Au temps $t_i = t_0 + \Delta t_i$, il est au point M_i sur le cercle de rayon 100 m.

1. **Calcul des composantes de la vitesse.**

   (a) Rappel : définition de la vitesse : $\overrightarrow{V_i} = (\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OM_0})/\Delta t_i$ lorsque $\Delta t_i \to 0$.
   Conseil : faire figurer les vecteurs $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{OM_i}$ sur le dessin.

(b) Exemple de calcul de la vitesse $\overrightarrow{V_1}$ pour $\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 0,01$ seconde pendant lequel le bus a tourné d'un angle $2\pi/(10\pi) \times 0,01 = 0,002$ rad.

On calcule les coordonnées M_1 du bus à l'instant t_1, puis les coordonnées du vecteur vitesse que l'on reporte dans le tableau ci-dessous

$\Delta t_1 = 10^{-2}$ s	$\overrightarrow{OM_0}$ (m)	$\overrightarrow{OM_1}$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0}\right)$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_0}\right)/\Delta t_1$ (m.s^{-1})
composante X	100	$100\cos(0,002)$	-0,0002000	-0,02000
composante Y	0	$100\sin(0,002)$	0,2000	20,00

(c) Effectuer le même travail successivement pour des valeurs de Δt de 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5} et 10^{-6} seconde.

$\Delta t_2 = 10^{-3}$ s	$\overrightarrow{OM_0}$ (m)	$\overrightarrow{OM_2}$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_0}\right)$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_0}\right)/\Delta t_2$ (m.s^{-1})
composante X	100			
composante Y	0			

$\Delta t_2 = 10^{-4}$ s	$\overrightarrow{OM_0}$ (m)	$\overrightarrow{OM_3}$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_0}\right)$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_0}\right)/\Delta t_3$ (m.s^{-1})
composante X	100			
composante Y	0			

$\Delta t_4 = 10^{-5}$ s	$\overrightarrow{OM_0}$ (m)	$\overrightarrow{OM_4}$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_0}\right)$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_4} - \overrightarrow{OM_0}\right)/\Delta t_4$ (m.s^{-1})
composante X	100			
composante Y	0			

$\Delta t_5 = 10^{-6}$ s	$\overrightarrow{OM_0}$ (m)	$\overrightarrow{OM_5}$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_0}\right)$ (m)	$\left(\overrightarrow{OM_5} - \overrightarrow{OM_0}\right)/\Delta t_5$ (m.s^{-1})
composante X	100			
composante Y	0			

Comparer les composantes de la vitesse des différents tableaux.

(d) Interprétation des résultats :
- Conclusions sur le vecteur vitesse (direction, sens, module)
- Vérifier la cohérence de ces conclusions avec les résultats obtenus à partir du formalisme mathématique d'un mouvement circulaire uniforme.
- Déterminer la vitesse indiquée par le compteur du bus ?

2. **Calcul des composantes de l'accélération.**

On procède de la même manière pour déterminer le vecteur accélération en partant des vecteurs vitesses issus du calcul (et non des tableaux précédents).

(a) Quelle est la définition de l'accélération ?

(b) Remplir les tableaux de calcul de l'accélération pour les différents Δt_i.

$\Delta t_1 = 10^{-2}$ s	$\overrightarrow{V_0}$ (m.s^{-1})	$\overrightarrow{V_1}$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_0}\right)$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_1} - \overrightarrow{V_0}\right) / \Delta t_1$ (m.s^{-2})
composante X				
composante Y				

$\Delta t_2 = 10^{-3}$ s	$\overrightarrow{V_0}$ (m.s^{-1})	$\overrightarrow{V_2}$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_0}\right)$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_0}\right) / \Delta t_2$ (m.s^{-2})
composante X				
composante Y				

$\Delta t_3 = 10^{-4}$ s	$\overrightarrow{V_0}$ (m.s^{-1})	$\overrightarrow{V_3}$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_3} - \overrightarrow{V_0}\right)$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_3} - \overrightarrow{V_0}\right) / \Delta t_3$ (m.s^{-2})
composante X				
composante Y				

$\Delta t_4 = 10^{-5}$ s	$\overrightarrow{V_0}$ (m.s^{-1})	$\overrightarrow{V_4}$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_4} - \overrightarrow{V_0}\right)$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_4} - \overrightarrow{V_0}\right) / \Delta t_4$ (m.s^{-2})
composante X				
composante Y				

$\Delta t_5 = 10^{-6}$ s	$\overrightarrow{V_0}$ (m.s^{-1})	$\overrightarrow{V_5}$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_5} - \overrightarrow{V_0}\right)$ (m.s^{-1})	$\left(\overrightarrow{V_5} - \overrightarrow{V_0}\right) / \Delta t_5$ (m.s^{-2})
composante X				
composante Y				

(c) Comparer les composantes de l'accélération des tableaux lorsque l'intervalle de temps diminue.

(d) Conclusion sur le vecteur accélération (direction, sens, module).

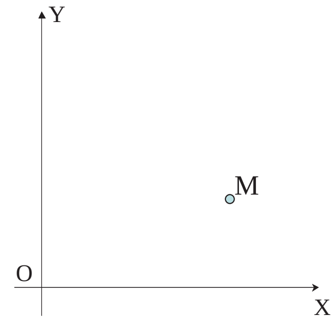
(e) Retrouver la valeur de l'accélération à partir du formalisme mathématique d'un mouvement circulaire uniforme.

(f) Comment un étudiant debout dans le bus se penche-t-il pour « s'équilibrer » (sans les mains) ?

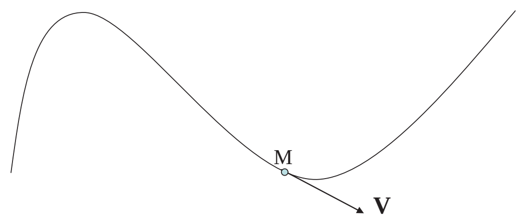
Partie 2

Bases et systèmes de coordonnées

1. **Vecteurs de bases associés à des systèmes de coordonnées.**
   (a) Tracer les vecteurs de la base polaire au point M.
   (b) Tracer les vecteurs de la base de Frenet au point M.

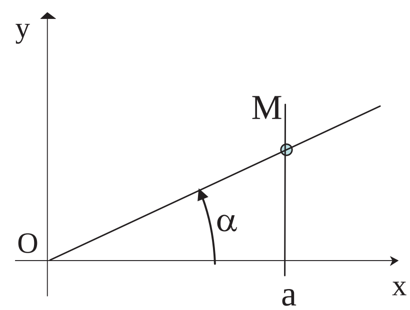


2. **Vecteurs de bases sur une trajectoire.**
   (a) Tracer les vecteurs de la base polaire au point M.
   (b) Tracer les vecteurs de la base de Frenet au point M.



3. **Système bidon.**
   Soit le système de coordonnées bidon défini dans un plan $0xy$: $M(a;\alpha)$, où a est l'abscisse de M sur l'axe Ox et α l'angle $\alpha = (\widehat{Ox, OM})$.

   (a) Construction des lignes de coordonnées. La ligne de coordonnées en a, au point M, est la courbe passant par $M(a,\alpha)$, obtenue en faisant varier a tout en gardant constantes toutes les autres coordonnées (ici α). Tracer au point M, la ligne de coordonnée en a. Puis tracer au point M, la ligne de coordonnées en α.



   (b) Construction des vecteurs unitaires de la base locale associée.
   Le vecteur unitaire $\vec{u}_a$ (resp $\vec{u}_\alpha$) au point M, associé à la coordonnée a (resp α), est :
   – tangent à la ligne de coordonnées en a (resp α) au point M.
   – orienté dans le sens des a (resp α) croissants.
   Construire les vecteurs unitaires $\vec{u}_a$ et $\vec{u}_\alpha$ au point M.

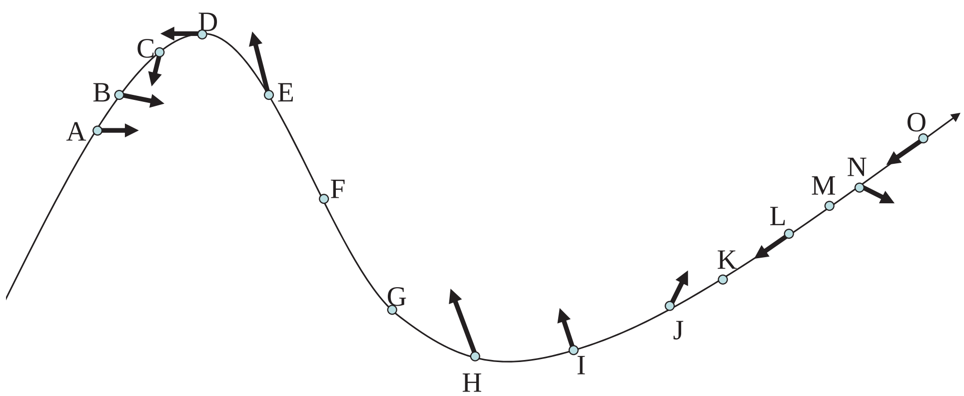
   (c) Écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans le système de coordonnées bidon (c'est a dire uniquement en fonction de a, α, $\vec{u}_a$ et $\vec{u}_\alpha$).

(d) Calculer les différentielles et les dérivées par rapport au temps des vecteurs $\vec{u}_a$ et $\vec{u}_\alpha$.

(e) Critiquer ce système de coordonnées, et montrer qu'il mérite son nom.

Partie 3 — Trajectoires et accélérations

1. **Accélération sur une trajectoire.**



Un mobile ponctuel se déplace le long de la trajectoire dessinée. Le vecteur accélération a été tracé pour les positions successives indiquées (A à O). Aux points F, G, K et M l'accélération est nulle.

En chacune de ces positions, indiquer d'abord si le vecteur accélération est compatible avec la trajectoire et, si oui, préciser le rythme du mouvement (uniforme, accéléré, décéléré, etc...).

2. **Un petit exercice tout simple ...**

Soit un point matériel se déplaçant en ligne droite suivant l'axe Ox, avec une accélération : $\gamma = ax + b$, où $a = 4$ SI et $b = 2$ SI.

De plus, la vitesse est mesurée en $x = 0$: $v(x = 0) = v_0 = 10$ m/s.

Trouver l'expression de $v(x)$.

ATELIER 2 : MODÈLE, APPROXIMATIONS ET ORDRES DE GRANDEUR

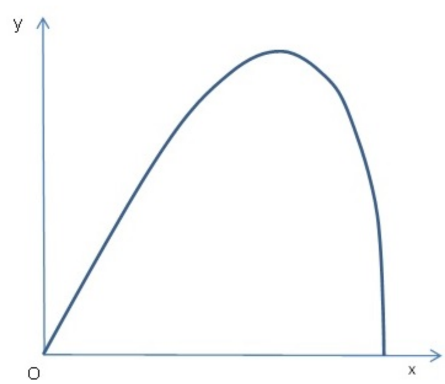
Partie 1
Mouvement d'un projectile soumis à une force de frottement fluide

Un projectile ponctuel de masse m est lancé à partir du point O avec une vitesse initiale de module v_0 dont la direction fait un angle θ avec l'horizontale. Il est soumis à une force de résistance de l'air $\vec{F} = -k\vec{v}$. On utilisera un repère cartésien d'origine O, on notera x l'axe horizontal et y l'axe vertical.

1. S'agit-il de frottement de type laminaire ou turbulent ? Régime faible ou forte vitesse ?
2. Faire un schéma résumant le problème puis faire le bilan des forces appliquées au mobile. En déduire deux équations différentielles : l'une reliant $\frac{dv_x}{dt}$ à v_x (équation 1), l'autre reliant $\frac{dv_y}{dt}$ à v_y (équation 2).
3. Commencer par résoudre l'équation 1 : trouver l'expression de $v_x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
4. Résoudre alors l'équation 2 : trouver l'expression de $v_y(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
5. Mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite v_{lim} et donner son expression.
6. Par intégration des expressions de $v_x(t)$ et $v_y(t)$ trouvées précédemment, démontrer que les équations du mouvement du mobile s'écrivent :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{m}{k} v_0 \cos\theta \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ y(t) &= \frac{m}{k} \left[\left(v_0 \sin\theta + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - gt\right] \end{aligned}$$

7. Justifier qualitativement le fait que la trajectoire a l'allure ci-contre :
   Quelle aurait été l'allure de la trajectoire en l'absence de frottements ?



Partie 2

Modélisation du mouvement d'une bulle d'air dans l'eau

Vous avez déjà remarqué qu'une bulle d'air sous l'eau remonte assez rapidement à la surface. Le but de cet exercice est de modéliser son mouvement, en testant pas à pas différentes approximations, dont on discutera la validité par une analyse des ordres de grandeur.

1. Faire le bilan des forces qui s'appliquent à une bulle d'air de volume 1 mm^3, de masse m, totalement immergée dans l'eau (vous ferez apparaître a priori 3 forces différentes). On appellera M la masse d'eau contenue dans un même volume de 1 mm^3.
2. Par un calcul numérique, montrer que l'une des 3 forces envisagées est négligeable (dire laquelle et devant quoi elle est négligeable). On la négligera pas la suite dans tout l'exercice.
3. Le résultat précédent est-il valable dans le cas d'une bulle de gaz carbonique dans une flûte de champagne ? (justifier)
4. Appliquer le PDF à la bulle d'air. L'une des 2 forces restantes (à vous de dire laquelle) est difficile à estimer (il nous manque un paramètre) et complique la résolution du problème. Nous proposons de la négliger aussi (reste donc 1 seule force). En déduire que l'accélération de la bulle s'écrit dans ce modèle $\overrightarrow{\Gamma} = -\frac{M}{m}\overrightarrow{g}$.
5. Si la bulle est lâchée sans vitesse initiale d'une altitude $z = 0$, en déduire le temps $t$mis pour atteindre l'altitude $z = 1$ m et la vitesse v atteinte à cette altitude. Faire l'application numérique : l'ordre de grandeur vous parait-il raisonnable ? Qu'en déduisez-vous ?
6. En réalité, le problème est plus compliqué que ce que l'on a écrit ci-dessus : on ne peut pas appliquer le PFD à la bulle d'air seule, il faut tenir compte du fait que quand la bulle d'air monte, un volume équivalent d'eau descend ! On admet qu'on arrive alors à un système équivalent à la machine d'Atwood pour lequel l'accélération s'écrit $\overrightarrow{\Gamma} = -\frac{M-m}{M+m}\overrightarrow{g}$. Simplifier cette expression en faisant l'approximation qui s'impose d'après les ordres de grandeur (comme à la question 2). Refaire alors les calculs de la question 5 et commenter les nouveaux résultats.
7. Que proposez-vous pour améliorer le modèle ? Écrire le nouveau PFD avec l'amélioration envisagée (ne pas résoudre).

Partie 3

Résolution de l'équation du mouvement d'une bulle d'air dans l'eau

On considère que le mouvement d'une bulle d'air dans l'eau peut être modélisé par l'équation suivante (on ne demande pas de justification précise de cette relation, issue du PFD) :

$$(M+m)\overrightarrow{\Gamma} = -M\overrightarrow{g} + m\overrightarrow{g} - 6\eta R\overrightarrow{v} \qquad (1)$$

où Γ est l'accélération de la bulle d'air, v sa vitesse, m sa masse, R son rayon, M la masse d'eau contenue dans un volume équivalent à celle de la bulle et η la viscosité de l'eau.

1. Dire quelle est l'origine des 3 termes du membre de droite de l'équation (1).
2. Trouver la valeur numérique du coefficient η.
3. Estimer l'ordre de grandeur du rapport m/M puis réécrire l'équation (1) avec les approximations qui s'imposent.
4. A l'instant $t = 0$ la bulle est en $z = 0$ avec une vitesse initiale nulle. Quelle est alors la valeur de l'accélération ? Comment varie alors la vitesse en fonction du temps, aux temps courts ?
5. Au bout d'un temps assez long, la vitesse tend vers une valeur limite v_{lim} constante. Que devient alors l'équation (1) ? En déduire l'expression de v_{lim} et calculer sa valeur pour une bulle de volume 1 mm^3.
6. Montrer que l'équation (1) peut s'écrire sous la forme $d\vec{v}/dt + 6\eta \frac{R}{M}\vec{v} = -\vec{g}$. Résoudre en tenant compte des conditions initiales pour trouver $v(t)$. Écrire la solution sous la forme $v(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. En déduire l'expression du temps caractéristique τ au bout duquel la bulle atteint une vitesse proche de v_{lim}. Calculer τ.
7. Représenter $v(t)$ sur un graphique en précisant les valeurs numériques connues.

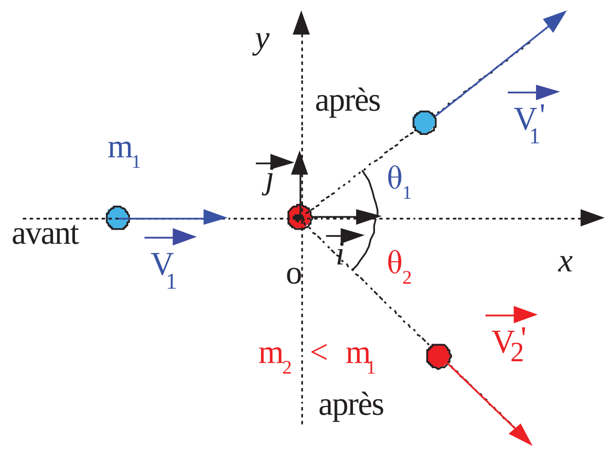
QUELQUES CORRIGÉS

Corrigé 1

Angle maximum de déflexion ⋆⋆⋆ ☺

Une particule de masse m_1 et de vitesse V_1 heurte une particule de masse m_2 et de vitesse nulle. La collision est supposée élastique.

En supposant $m_1 > m_2$, calculer l'angle maximum de déflexion θ_1^{max} de la particule 1.



Intuitivement puisque $m_1 > m_2$, on perçoit que m_1 ne pourra pas rebondir sur m_2. Son angle de déflexion maximal devrait rester inférieur à $\pi / 2$.

Deux possibilités pour traiter ce problème :

1. Dans le référentiel du centre de masse :

La vitesse du centre de masse est donnée par :

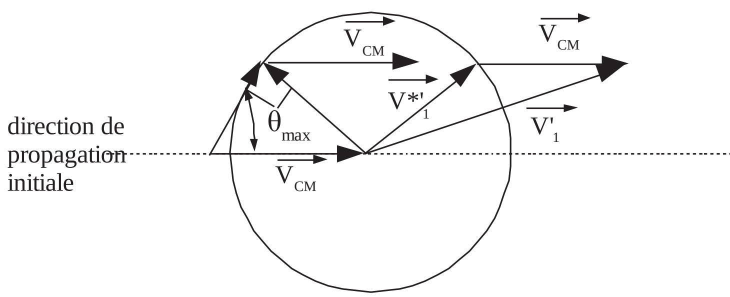
$$(m_1+m_2)\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \frac{m_1}{(m_1+m_2)}\vec{V}_1 .$$

Dans le référentiel du centre de masse, les vitesses des deux masses s'expriment par :

$$\vec{V}^*{}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_{CM} = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_1 \;;\; \vec{V}^*{}_2 = \vec{0} - \vec{V}_{CM} = \frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_1 .$$

Notez que puisque $m_1 > m_2$ alors $V_{CM} > V_1^*$.

Dans le référentiel du centre de masse, une collision élastique entre particules de masses constantes se caractérise par le fait que les modules des vitesses de ces particules se conservent. La figure ci-dessous dressée dans le référentiel du centre de masse permet de comprendre la situation qui correspond à l'angle de déflexion maximal dans le référentiel du laboratoire.



Nous avons donc : $V_1^{*'} = V_1^*$, quel que soit l'angle de déflexion final dans le CM.

L'angle de déflexion maximal est alors donné par la relation suivante :

$$\sin\theta_{max} = \frac{V_1^*}{V_{CM}} = \frac{\dfrac{m_2}{m_1+m_2}V_1}{\dfrac{m_1}{m_1+m_2}V_1} = \frac{m_2}{m_1} .$$

A.N. pour $m_1 = 4m_2$, on trouve $\theta_1^{max} = 14{,}5^o$ et $\theta_2 = 37{,}8^o$.

2. Dans le référentiel du laboratoire :
   En exploitant la conservation de la quantité de mouvement, on exprimera V_1' et V_2' en fonction de V_1, θ_1 et θ_2. En reportant ces valeurs dans l'équation de l'énergie, on en déduira θ_1 en fonction de θ_2, m_1 et m_2.

Il s'agit d'une collision élastique dans laquelle aucune force extérieure n'agit. La quantité de mouvement totale $\vec{p}_{tot}$ du système formé des deux particules ainsi que son énergie cinétique totale E_{tot} restent inchangés. Ceci se traduit par les équations suivantes :

$$(1) \quad \vec{p}_{tot}(avant) = m_1\vec{V}_1 = \vec{p}_{tot}(après) = m_1\vec{V}_1^{'} + m_2\vec{V}_2^{'}$$

$$(2) \quad E_{tot}(avant) = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 = E_{tot}(après) = \frac{1}{2}m_1\left(V_1^{'}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(V_2^{'}\right)^2$$

soit encore après projection sur les axes (O,x) et (O,y) :

$$(1.1) \quad sur\,(O,x) \quad m_1V_1 = m_1V_1^{'}\cos\theta_1 + m_2V_2^{'}\cos\theta_2$$

$$(1.2) \quad sur\,(O,y) \quad m_1V_1^{'}\sin\theta_1 = m_2V_2^{'}\sin\theta_2$$

Tirer $V_2^{'}$ de (1.1) et le reporter dans (1.2) pour obtenir :

$$m_1V_1 = m_1V_1^{'}\cos\theta_1 + m_2\cos\theta_2\,\frac{m_1V_1^{'}\sin\theta_1}{m_2\sin\theta_2},$$

qui s'écrit :

$$V_1^{'} = V_1\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2} \qquad (3)$$

[remarque : $\dfrac{V_1^{'}}{V_1} = \dfrac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$]

et à partir de (1.2) et (3)

$$V_2^{'} = \frac{m_1}{m_2}V_1\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2} \qquad (4)$$

[remarque : $\dfrac{V_2^{'}}{V_1} = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$]

On peut alors porter ces valeurs de $V_1^{'}$ et $V_2^{'}$ dans la conservation de l'énergie cinétique (2) :

$$m_1V_1^2 = m_1\left(\frac{V_1\sin\theta_2}{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}\right)^2 + m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}\left(\frac{V_1\sin\theta_1}{\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}\right)^2.$$

La vitesse V_1 disparaît, et l'équation se réécrit :

$$m_2(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)^2 = m_2\sin^2\theta_2 + m_1\sin^2\theta_1.$$

Elle devient après développement du carré, et regroupement des termes en $\sin^2\theta_2$:

$$m_2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + 2m_2\sin\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_1\sin\theta_2 = m_2\sin^2\theta_2(1-\cos^2\theta_1) + m_1\sin^2\theta_1.$$

Avec $(1-\cos^2\theta_1) = \sin^2\theta_1$, l'équation se simplifie par $\sin\theta_1$ (si $\theta_1 \neq 0$), et compte tenu de :

$\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_2 = \cos 2\theta_2$ et $2\sin\theta_2\cos\theta_2 = \sin 2\theta_2$, il vient : $\boxed{tg\theta_1 = \dfrac{\sin 2\theta_2}{\dfrac{m_1}{m_2} - \cos 2\theta_2}}$.

Le maximum de θ_1 est alors obtenu lorsque : $\sin 2\theta_2 / (\frac{m_1}{m_2} - \cos 2\theta_2)$ est maximum.

La dérivée s'annule pour : $\boxed{\cos 2\theta_2 = \frac{m_2}{m_1}}$ ($m_2 < m_1$ garantit que $\cos 2\theta_2 < 1$).

En reportant dans l'expression de la tangente, avec $\sin 2\theta_2 = \sqrt{1-\cos^2 2\theta_2}$:

$$tg\theta_1^{\max} = \frac{m_2 / m_1}{\sqrt{1-(m_2/m_1)^2}}$$

soit, et c'est immédiat car $tg = sin/\ cos = sin/ \sqrt{1-sin^2}$: $\sin\theta_1^{max} = \frac{m_2}{m_1}$.

Corrigé 2

Détermination d'un mouvement polaire ⋆⋆ ☺

Un mobile ponctuel M a une vitesse $\vec{v}(t) = ae^{-\lambda t}\vec{u}_\theta$ en coordonnées polaires. La position initiale du mobile est donnée par $\theta(t=0) = 0$ et $r(t=0) = r_0$. On se propose d'étudier le mouvement de M.

1. Quelle est la dimension de a et $1/\lambda$? Que représentent-ils physiquement ?

a doit avoir la dimension d'une vitesse et $1/\lambda$ celle d'un temps (λt doit être sans dimension).
a représente l'amplitude de la vitesse à $t = 0$. $1/\lambda$ représente le temps caractéristique d'amortissement de la vitesse (pendant ce temps la vitesse est réduite d'un facteur $1/e$).

2. Exprimer les équations temporelles du mouvement $r(t)$ et $\theta(t)$.

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dot{r} = 0 & \text{et} & r(0) = r_0 \\ r\dot{\theta} = ae^{-\lambda t} & \text{et} & \theta(0) = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} r = & r_0 \\ \theta = & \frac{a}{-\lambda r_0} e^{-\lambda t} + c \end{array} \right.$$

On détermine la constante c avec la condition initiale $\theta(0) = 0$, soit $c = \frac{a}{\lambda r_0}$. La trajectoire est donc définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} r(t) = & r_0 \\ \theta(t) = & \frac{a}{\lambda r_0}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \end{array} \right.$$

3. Quelle est la trajectoire de M ? Faire un dessin.

$r(t)$ est une constante donc la trajectoire est sur un cercle de rayon r_0. La trajectoire est en fait un arc de cercle de longueur a/λ. En effet le mobile démarre en $\theta = 0$ et va tendre vers $\theta = \frac{a}{\lambda r_0}$ (il met un temps infini pour s'arrêter et atteindre sa position finale)

4. Calculer le vecteur accélération de M en coordonnées polaires.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OM(t)} & = & r\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v(t)} & = & \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{\gamma(t)} & = & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{ll} r(t) = r_0 & \theta(t) = \frac{a}{\lambda r_0}\left(1 - e^{-\lambda t}\right) \\ \dot{r}(t) = 0 & \dot{\theta}(t) = \frac{a}{r_0}e^{-\lambda t} \\ \ddot{r}(t) = 0 & \ddot{\theta}(t) = \frac{-a\lambda}{r_0}e^{-\lambda t} \end{array}\right.$$

Ceci nous amène a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{OM(t)} & = & r_0\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v(t)} & = & ae^{-\lambda t}\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{\gamma(t)} & = & -\frac{a^2}{r_0}e^{-2\lambda t}\overrightarrow{u_r} - a\lambda e^{-\lambda t}\overrightarrow{u_\theta} \end{array}\right.$$

5. Le mouvement est-il uniforme, accéléré, uniformément accéléré, autre ?

On peut calculer le module de l'accélération :

$$|\gamma| = \sqrt{|\gamma_r|^2 + |\gamma_\theta|^2} = ae^{-\lambda t}\sqrt{\lambda^2 + \frac{a^2}{{r_0}^2}e^{-2\lambda t}} \qquad (1)$$

Il s'agit donc d'un mouvement exponentiellement accéléré (de moins en moins accéléré car exponentielle négative). On peut remarquer que l'accélération tangentielle est négative révélant que le mobile « freine » sur l'arc de cercle. La trajectoire est maintenue circulaire grâce au fait que l'accélération radiale est aussi négative et varie comme le carré de la vitesse (on peut se souvenir que dans le mouvement circulaire uniforme l'accélération tangentielle est nulle alors que la radiale est négative (centripète) et de valeur v^2/r_0).

6. La connaissance du vecteur vitesse est elle suffisante pour répondre à la question 2 ? à la question 4 ? Expliquer.

On ne peut pas répondre complètement à la question 2 car la vitesse nous permet en intégrant d'avoir la forme générale de la trajectoire. Mais si l'on ne connaît pas les conditions initiales (en fait un point de la trajectoire) il est impossible de donner une trajectoire précise.

La détermination de l'accélération se fait par dérivation et est donc possible connaissant la vitesse.

Corrigé 3

Le pendule simple⋆⋆ ☺

Un pendule, constitué d'une boule de masse m attachée à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, est suspendu à un point fixe O. On met le pendule en mouvement, par exemple en l'écartant d'un angle θ_0 à la verticale, le fil étant tendu, puis en le lâchant sans vitesse initiale. On néglige tous les frottements. L'objectif est de faire le tour du problème, lequel a de nombreuses applications :

- Etablir l'équation différentielle du mouvement de la boule. Cette équation différentielle générale n'a pas de solution analytique en termes d'équation du mouvement (expression des coordonnées en fonction du temps), c'est-à-dire que l'on ne sait pas la résoudre avec un crayon et un papier, sauf dans le cas de *l'approximation des petites oscillations*. Hormis quelques cas particuliers, seuls des calculs approchés (effectués par ordinateur) permettent de s'en sortir.
- Résoudre l'équation différentielle dans le cas de *l'approximation des petites oscillations* et en déduire dans ce cas l'équation temporelle du mouvement.
- Il est cependant possible de calculer analytiquement la vitesse en fonction de la position de la boule **dans le cas général**.
- L'expression de la vitesse permet de connaître la tension du fil en fonction de la position de la boule.

Résolution du problème général :

Pour ceux qui veulent se débrouiller tout seul, traiter les différentes étapes ci-dessus.

Résolution guidée :

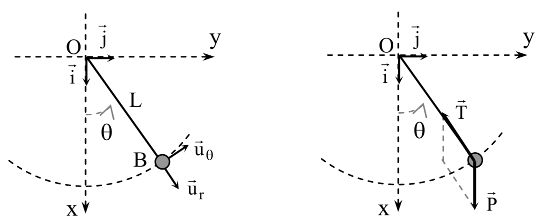
Soit un repère $R(O,\vec{i},\vec{j})$, O étant le point où est fixé le fil du pendule, O_x l'axe vertical dirigé vers le bas et O_y l'axe horizontal dirigé vers la droite. Soit θ l'angle polaire entre O_x et le fil du pendule compté positivement dans le sens direct.

1. Equation différentielle du mouvement :
   (a) Que peut on dire sur le mouvement de la boule ? en déduire l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération en fonction de θ, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d^2\theta}{dt^2}$.
   (b) Transcrire les conditions initiales pour θ et $\frac{d\theta}{dt}$.
   (c) Faire le bilan des forces extérieures exercées sur la boule.
   (d) Ecrire le principe fondamental de la dynamique. Projeter l'équation vectorielle obtenue dans les directions de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

(e) En déduire l'équation différentielle du mouvement.

Référentiel : terrestre supposé galiléen.
Système : la boule B de masse m constante.
Repère : R(O,$\vec{i}$,$\vec{j}$)

Remarques sur le mouvement : tant que la corde est tendue, le mouvement de la boule est circulaire de rayon L (longueur de la corde) et de centre O (point d'attache du pendule) : il est donc commode de choisir un repère centré en O, et des coordonnées polaires. L'expérience montre que si l'on écarte le pendule d'un angle θ par rapport à la verticale, le pendule oscille autour de la verticale. Il est donc assez naturel et commode de choisir l'axe Ox vertical vers le bas ; l'axe Oy sera donc choisi horizontal vers la droite pour garder le repère direct.



Mouvement du centre d'inertie de B :
Mouvement circulaire de centre O et de rayon L
$\overrightarrow{OB} = L\vec{u}_r$
$\vec{v}_B = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} = L\frac{d\vec{u}_r}{dt} = L\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + L\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + L\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - L\dot{\theta}^2\vec{u}_r$
La seule inconnue du mouvement est θ (et ses dérivées temporelles).

Forces extérieures :
Forces à distance : poids de la boule : $\vec{P} = mg\vec{i} = mg(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$
Forces de contact : tension du fil : $\vec{T} = -||\vec{T}||\vec{u}_r$
On néglige tout frottement.
La seule inconnue (du point de vue des forces) est la norme de la tension $||\vec{T}||$.

PFD :
Dans un repère galiléen et pour un système de masse constante, il s'écrit : $\sum\vec{F}_{ext.} = m_{syst.}\vec{a}_{syst.}$
Avec ce que nous avons écrit précédemment : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}_B$, c'est à dire :

$$mg(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta) - ||\vec{T}||\vec{u}_r = mL\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - mL\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

Projection sur $\vec{u}_r$: $mg\cos\theta - ||\vec{T}|| = -mL\dot{\theta}^2$ (1)
Projection sur $\vec{u}_\theta$: $-mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$ (2)
L'équation (2) ne dépend que de θ, c'est l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Remarque :
Cette équation différentielle générale n'a pas de solution analytique en terme d'équation du mouvement (expression des coordonnées en fonction du temps), c'est à dire que l'on ne sait pas la résoudre avec un crayon et un papier, sauf dans le cas de "l'approximation des petites oscillations". Hormis quelques cas particuliers, seuls des calculs approchés (effectués par ordinateur de nos jours) permettent de s'en sortir.

2. Approximation des petites oscillations :
Calculer l'angle θ (en degrés) tel que l'erreur relative faite en écrivant $\sin(\theta) = \theta$ est égale à 5%. Réécrire l'équation différentielle en faisant l'hypothèse que θ reste suffisamment petit pour que $sin(\theta) \simeq \theta$. Résoudre cette nouvelle équation différentielle pour établir l'équation horaire du mouvement $\theta(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

On fait l'hypothèse que θ est toujours suffisamment petit pour que $\sin\theta \sim \theta$ (développement limité à l'ordre 1). L'équation différentielle du mouvement devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Soit la constante positive $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$. L'équation s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Solution générale :
(i.e. l'ensemble de toutes les solutions possibles)

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

où A et ϕ sont des constantes d'intégration.
Elle s'écrit également sous d'autres formes équivalentes, telle que $B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)$.
Essayer de le démontrer en trouvant les relations entre (A, ϕ) et (B, C).

Solution de ce problème particulier :
Les conditions initiales, en donnant la valeur de θ et de la norme de la vitesse à l'instant initial $t = 0$, caractérisent le problème particulier qui nous intéresse : elles permettent de déterminer **la** solution, donc la valeur de chacune des deux constantes d'intégration.

Conditions initiales : on écarte le pendule d'un angle θ_0 par rapport à la verticale, le fil étant tendu, et on le lâche sans vitesse initiale. Traduction : $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\vec{v}_B(t = 0) = \vec{0}$.

Nous avons écrit précédemment : $\vec{v}_B = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, donc la condition sur la vitesse initiale devient : $\dot{\theta}(t = 0) = 0$.
Or : $\dot{\theta}(t) = \frac{d(A\cos(\omega_0 t+\phi))}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$
Les conditions initiales s'écrivent donc :
$\theta(t = 0) = A\cos(\phi) = \theta_0$ (1)
$\dot{\theta}(t = 0) = -A\omega_0 \sin(\phi) = 0$ (2)

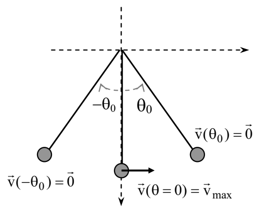
La constante A n'est pas nulle, car sinon $\theta(t) = 0$, $\forall t$ (il n'y aurait pas de mouvement).
Donc (2) implique que $\sin(\phi) = 0$, donc $\phi = 0$ (ou $\phi = \pi$).
Puis (1) donne alors $A = \theta_0$.

La solution s'écrit :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

Remarque : si on choisit la solution $\phi = \pi$, on trouve $A = -\theta_0$, et on obtient une solution strictement équivalente à celle ci-dessus.

Analyse du résultat :
- le mouvement est harmonique (c'est à dire de rythme sinusoïdal), de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.
- l'angle θ ne dépasse jamais la valeur θ_0. L'approximation des petites oscillations sera donc valable si θ_0 est petit : tel que $|(\sin\theta_0 - \theta_0)/\theta_0| < \epsilon$, si l'on travaille avec une précision relative de ϵ %. Par exemple, si l'on travaille avec une précision de 4 à 5 %, l'approximation sera valable jusqu'à des angles d'environ 30°.
- La vitesse angulaire $\dot{\theta}(t) = -\theta_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ est maximale lorsque le sinus est maximal, donc le cosinus minimal, c'est à dire en $\theta = 0$, la position basse du pendule. Inversement, la vitesse angulaire est nulle (minimale) lorsque θ est maximal, c'est à dire en $\theta = \theta_0$. On peut dire la même chose du module de la vitesse puisque $v_B = L\dot{\theta}$.



3. Vitesse en fonction de la position :
   Il est tout à fait possible (et c'est souvent le cas) d'exprimer la vitesse en fonction de la position, alors que la vitesse ou la position en fonction du temps ne trouvent pas de solution. Voici la séquence à suivre :
   (a) reprendre l'équation différentielle du mouvement sans faire d'approximation.
   (b) pour éviter la dérivée seconde, réécrire l'équation en posant $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, donc $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$.
   (c) faire passer dt au numérateur.
   (d) on se retrouve avec d'un côté $d\omega$ qui serait facile à intégrer, et de l'autre $\sin\theta\, dt$ qui ne s'intègre pas, mais qui serait facile à intégrer si on avait $\sin\theta\, d\theta$.
   (e) remplacer donc $\sin\theta\, dt$ par $\sin\theta\, d\theta\, \frac{dt}{d\theta}$, puis $\frac{dt}{d\theta}$ par $\frac{1}{\omega}$.
   (f) intégrer séparément les différentielles sur ω et sur θ, pour obtenir l'expression finale $\omega(\theta)$.

On ne fait plus d'approximation, on reprend donc l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

On pose $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, donc $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$.
En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$d\omega = -\frac{g}{L}\sin\theta\, dt$$

$$d\omega = -\frac{g}{L}\sin\theta\, d\theta\, \frac{dt}{d\theta}$$

$$\omega d\omega = -\frac{g}{L}\sin\theta\, d\theta$$

On intègre membre à membre : $\int \omega d\omega = -\frac{g}{L}\int \sin\theta\, d\theta$

Ce qui donne : $\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{g}{L}\cos\theta + C$
où C est une constante d'intégration que l'on détermine par les conditions initiales :
$\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$, donc $\omega(\theta_0) = 0$,
ce qui donne $0 = \frac{g}{L}\cos\theta_0 + C$, donc $C = -\frac{g}{L}\cos\theta_0$,
et enfin $|\omega(\theta)| = \sqrt{2\frac{g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$.
On obtient ainsi la vitesse linéaire $v_B = L\dot{\theta} = L\omega$:

$$|v_B(\theta)| = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Analyse du résultat :
- La vitesse est nulle pour $\theta = \theta_0$ et maximale en $\theta = 0$: $|v_B(0)| = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$
- Les conditions initiales posées ici ne permettent pas d'examiner le cas où le pendule "fait le tour", car il ne suffit pas de le lâcher d'une position θ_0, il faut le lancer avec une vitesse initiale non-nulle.
- Exercice : établir l'expression du module de la vitesse en fonction de la position θ, à partir de nouvelles conditions initiales $|v_B(\theta_0)| = v_0$. Quelle vitesse minimale faut-il donner, en $\theta = 0$, pour que B "fasse le tour" ?

4. Tension du fil :
Reprendre l'équation obtenue par la projection du PFD suivant $\vec{u}_r$ et en déduire l'expression du module de la force de tension du fil en fonction de θ.

On se place hors approximation.
On avait écrit l'équation (1) qui fait intervenir la tension du fil : $mg\cos\theta - ||\vec{T}|| = -mL\dot{\theta}^2$
Nous avons montré précédemment que $\dot{\theta} = \frac{v_B}{L}$ et que $|v_B(\theta)| = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$
On obtient donc :

$$||\vec{T}|| = mL\left(\frac{v_B}{L}\right)^2 + mg\cos\theta = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) + mg\cos\theta$$

$$||\vec{T}|| = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

Analyse du résultat :
- La tension du fil n'est jamais nulle, elle est maximale au point bas $\theta = 0$ et minimale au point le plus haut $\theta = \theta_0$.
- Pour $\theta = 0$: $||\vec{T}|| = mg(3 - 2\cos\theta_0)$

- Pour $\theta = \theta_0$: $||\vec{T}|| = mg(\cos\theta_0)$
- Exercice : examiner la tension du fil lorsque le pendule “fait le tour”.

Application :
Un enfant un peu trop grand se balance de bon coeur sur une balançoire dont les cordes sont usées. En quel point de la trajectoire le risque de rupture des cordes est-il le plus grand ?

On assimile la balançoire à un pendule simple et on reprend les résultats précédents. Le risque de rupture de la corde est le plus grand lorsque la tension de la corde est la plus grande, c’est-à-dire au point le plus bas de la trajectoire ($\theta = 0$). En ce point la vitesse est horizontale et de module maximal : l’enfant va partir en “vol plané” avec une vitesse horizontale importante. Conclusion : si les cordes sont usées, ça vaut la peine de les changer !

Remarque : si la chute avait lieu au point le plus haut ($\theta = \theta_0$), ce qui est le cas le moins probable en matière de rupture de corde, la vitesse de l’enfant serait nulle : l’enfant ne ferait que tomber sur ses fesses ou sur ses pieds, de la hauteur initiale de la balançoire, en $\theta = \theta_0$.

Corrigé 4

Le pendule pesant ⋆⋆ ☺

On considère un pendule simple de masse m dont le fil coulisse au point d’attache dans un anneau, de telle sorte que l’on puisse changer la longueur du pendule au cours du mouvement.

1. On lâche la masse avec une vitesse nulle. Le fil, tendu, fait un angle θ_1 avec la verticale. On maintient d’abord la longueur du fil constante et égale à l_1. En employant le théorème du moment cinétique, calculer la vitesse v_1 de la masse quand le fil passe à la verticale.

Référentiel : le référentiel terrestre pourra être assimilé à un référentiel galiléen.
Système : masse m du pendule
Repère : R(O,$\vec{u}_\rho$,$\vec{u}_\theta$,$\vec{k}$).
Forces extérieures : la tension du fil $\vec{T}$ et le poids $\vec{P}$ de la masse m.
On applique le théorème du moment cinétique à la masse m. On a alors $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \overrightarrow{m}_{F_{ext}}$.
Et $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = l_1 \vec{u}_\rho \wedge m l_1 \dot{\theta} \vec{u}_\theta = m l_1^2 \dot{\theta} \vec{k}$ et $\frac{d\vec{L}}{dt} = m l_1^2 \ddot{\theta} \vec{k}$
On calcule maintenant les moments des forces :
$\overrightarrow{m}_T = l_1 \vec{u}_\rho \wedge \vec{T} = 0$ ($\vec{T}$ est selon $\vec{u}_\rho$)
$\overrightarrow{m}_P = l_1 \vec{u}_\rho \wedge \vec{P} = l_1 \vec{u}_\rho \wedge m\vec{g} = -mgl_1 \sin\theta \vec{k}$.
On en déduit que : $m l_1^2 \ddot{\theta} = -mgl_1 \sin\theta$ ou encore $\ddot{\theta} + \frac{g}{l_1} \sin\theta = 0$ ou encore $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ +

$\frac{g}{l_1}\sin\theta = 0$.
On s'est maintenant ramené à l'exercice 3.1. On avait alors remarqué que $v = l_1\dot{\theta} = l_1\frac{d\theta}{dt}$ et donc que $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l_1}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{l_1}\frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{l_1^2}\frac{dv}{d\theta}$.
L'équation différentielle précédente devient donc $\frac{v}{l_1^2}\frac{dv}{d\theta} + \frac{g}{l_1}\sin\theta = 0$. En séparant les variables de cette équation, on obtient $v dv = -g l_1 \sin\theta d\theta$. θ varie de θ_1 à 0 alors que v varie de 0 à v_1 à la verticale. On en déduit que : $\int_0^v v dv = \int_{\theta_1}^0 g l_1 \sin\theta d\theta$ et donc que $v_1 = \sqrt{2gl_1(1-\cos\theta_1)}$.

Remarque : solution utilisant la conservation de l'énergie mécanique
La solution naturelle pour résoudre ce problème est d'utiliser que pour le système du pendule, la seule force qui travaille est la force de pesanteur. En effet, la tension du fil est toujours perpendiculaire à la trajectoire et ne travaille donc pas. Le système du pendule est donc un système conservatif et l'énergie mécanique est conservée. $E_M = E_c + E_p$. On prendra pour origine de l'énergie potentielle la position où le pendule est vertical. On a alors $E_p = mgl(1-\cos\theta)$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. A l'état initial, la vitesse est nulle et donc $E_M = E_p = mgl(1-\cos\theta_1)$. Quand le pendule est à la verticale, l'énergie potentielle est nulle, la vitesse est maximale et $E_M = \frac{1}{2}mv_1^2$. On en déduit que $v_1 = \sqrt{2gl_1(1-\cos\theta_1)}$. On retrouve bien évidemment le résultat précédent mais de manière beaucoup plus élégante...

2. Quand le fil passe à la verticale, on raccourcit le fil en un temps que l'on supposera suffisamment bref pour qu'il reste vertical. Rappeler quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse. Calculer leur moment par rapport au point d'attache O durant le raccourcissement du fil. Quelle est la loi de conservation qui en résulte ?

Le moment du poids est nul lorsque le fil passe à la verticale. Le moment de la tension $\vec{T}$ est toujours nul donc le moment des forces par rapport au point de suspension O est nul. On en déduit que le moment cinétique de M par rapport à O **est conservé** pendant la transformation, le raccourcissement du fil ayant lieu pendant le bref instant où le fil est vertical. Calculons ce moment cinétique : $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ avec $\vec{OM} = l\vec{u}_\rho$ et $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta = v\vec{u}_\theta$. On déduit que $\vec{L} = mlv\vec{k}$.

Les moment cinétiques juste avant et juste après le raccourcissement s'écrivent simplement $ml_1v_1 = ml_2v_2$ et donc $v_2 = \frac{l_1 v_1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2}\sqrt{2gl_1(1-\cos\theta_1)}$.

3. Juste après l'opération, le fil étant encore vertical, la longueur est l_2 et la vitesse de la masse v_2. Calculer v_2 d'abord en fonction de v_1, l_1 et l_2, puis en fonction de l_1, l_2 et θ_1 et de l'accélération de la pesanteur g.

Les moment cinétiques juste avant et juste après le raccourcissement s'écrivent simplement $ml_1 v_1 = ml_2 v_2$ et donc $v_2 = \frac{l_1 v_1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2}\sqrt{2gl_1(1-\cos\theta_1)}$.

4. Calculer l'amplitude angulaire maximum θ_2 du pendule si l'on maintient la longueur égale à l_2 (calculer $\cos\theta_2$).

v_2 est lié à θ_2 de la même manière que v_1 était lié à θ_1. On a $v_2 = \sqrt{2gl_2(1-\cos\theta_2)}$ et donc $\cos\theta_2 = 1 - \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 (1-\cos\theta_1)$

5. A.N. : $\theta_1 = 30$ degrés, $l_1 = 2$ m, $l_2 = 1.5$ m, calculer θ_2.

Pour $\theta_1 = 30^\circ$, l_1=2 m, l_2=1,5 m, on trouve $\theta_2 = 47^\circ$.

6. Pour le même θ_1, calculer $\cos\theta_2$ si $l_1 = 1\ m$ et $l_2 = 0.4\ m$. Interpréter.

Pour $\theta_1 = 30^\circ$, l_1=1 m, l_2=0,4 m, on obtient $\cos\theta_2 = -1,093$. . Il y a donc un problème, il faudrait calculer proprement le domaine de validité de l'équation liant la vitesse au passage à la verticale à l'angle maximal.

7. A quel jeu ce système vous fait-il penser ?

C'est ce que l'on fait sur une balançoire (appelée aussi escarpolette) en changeant par nos mouvements notre centre de masse. Cela est un peu plus compliqué du fait que les cordes sont souples et qu'elles plient au niveau des mains.

Corrigé 5

Trajectoire d'une comète ** ☺

En 1997, la comète *Hale-Bopp* est passée relativement près de la Terre et a traversé notre ciel. Cette comète possède une orbite elliptique autour du Soleil avec une excentricité $e = 0,995$. A son périhélie, le 1^{er} avril 1997, sa distance au Soleil était $r_P = 1,35 \times 10^8$ km et en ce point sa vitesse valait $v_P = 45$ km/s.

1. La conservation de quelle quantité permet d'expliquer que la trajectoire de la comète est plane ? Pourquoi cette quantité est-elle conservée tout au long du mouvement ?

La conservation du **moment cinétique**. En effet le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan tangent à la trajectoire (défini par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}$). Si ce vecteur est fixe en direction (il n'est même pas nécessaire qu'il soit de norme constante) cela veut dire que le plan tangent est toujours le même et que donc la trajectoire est plane.

Dans le cas de la comète la seule force qui s'exerce sur celle-ci est celle d'attraction du soleil. C'est une force centrale et le moment qu'elle exerce sur la comète est nul en permanence. Le théorème du moment cinétique nous permet de dire que celui-ci est constant.

2. Calculer le paramètre q de cette orbite. En déduire la distance r_A de la comète à l'aphélie. Quelle est la vitesse v_A correspondante ? Justifier la démarche suivie pour obtenir cette vitesse particulière.

Connaissant r_P et e on a directement accès à r_A et q. En un deuxième temps on utilise la loi des aires pour trouver v_A

Constante des aires. $C = r_P.v_P = 6{,}075\,10^{15} m^2/s$

$$r_A = r_P \frac{1+e}{1-e} = 5{,}39\,10^{13} m \qquad q = r_P(1+e) = 2{,}69\,10^{11} m \qquad v_A = v_P \frac{r_P}{r_A} = v_P \frac{1-e}{1+e} = 113 m/s$$

3. Que vaut le demi-grand axe a de l'orbite ?

$$a = \frac{r_P + r_A}{2} = \frac{r_P}{1-e} = 2{,}70\,10^{13} m$$

4. Montrer que $q = a(1-e^2)$.

$$2a = r_P + r_A = \frac{q}{1+e} + \frac{q}{1-e} = \frac{2q}{1-e^2} \qquad q = a(1-e^2)$$

5. Sachant que T désigne la période orbitale et que le rapport T^2/a^3 est constant en vertu de la loi des aires, prédire en quelle année la comète reviendra à son périhélie nous rendre visite.

$$\Omega^2 a^3 = K_G(M_S + m) \cong K_G M_S \quad \Rightarrow \quad \Omega = 8{,}19\,10^{-11} rad/s \quad \Rightarrow \quad \mathrm{T} = 7{,}67\,10^{10} s \cong 2400 ans$$

Ou alors, on se sert de la Terre, satellite du soleil comme Hale Bopp, pour écrire en utilisant la troisième loi de Kepler:

$$\frac{T_{H.B}^2}{a_{H.B}^3} = \frac{T_{terre}^2}{a_{terre}^3} \qquad T_{H.B} = T_{terre}\left(\frac{a_{H.B}}{a_{terre}}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad T_{H.B.} = 1an\left[\frac{2{,}70\,10^{13}}{1{,}495\,10^{11}}\right]^{\frac{3}{2}} \cong 2400\ ans$$

On peut aussi exprimer directement Ω en fonction des données de départ:

$$\Omega\, r_P = v_P \frac{(1-e)^{3/2}}{(1+e)^{1/2}} \qquad \text{(A démonter en utilisant } C = r_P.v_P,\ S = \pi ab = \frac{C}{2}T,\ b = a\sqrt{1-e^2}\text{)}$$

$$\Omega = 8{,}343\,10^{-11} rad/s \Rightarrow \mathrm{T} = 7{,}53\,10^{10} s \cong 2400 ans$$

6. On sait que l'énergie mécanique de la comète vaut $E = -4{,}49 \times 10^{23}$ J (l'énergie potentielle étant définie comme nulle à l'infini). Déterminer sa masse m. Étant donné que la masse volumique des roches cométaire est très voisine de celle de l'eau, quel est le rayon moyen R de cette comète (en faisant l'approximation d'une comète sphérique).

Attention, lorsque l'excentricité est proche de 1, l'énergie mécanique est proche de zéro, les deux termes de E_M : $\frac{1}{2} m v_P^2$ *et* $K_G \frac{M_S m}{r_P}$ sont proches et il est délicat de calculer m par $m = E_M / (\frac{1}{2} v_P^2 - K_G \frac{M_S}{r_P})$. Il faut absolument faire intervenir directement les grandeurs à notre disposition. Comme nous connaissons les paramètres au périgée, plaçons nous en ce point:

$$C^2 = (r_P v_P)^2 \quad et \quad C^2 = K_G M_S q \quad \Rightarrow K_G M_S = \frac{(r_P v_P)^2}{q}$$

$$E_M = \tfrac{1}{2} m v_P^2 - K_G \frac{M_S m}{r_P} = m(\tfrac{1}{2} v_P^2 - \frac{r_P^2 v_P^2}{q r_P}) = \tfrac{1}{2} m v_P^2 (1 - \frac{2r_P}{q}) = \tfrac{1}{2} m v_P^2 (1 - \frac{2}{1+e}) = -\tfrac{1}{2} m v_P^2 (\frac{1-e}{1+e})$$

$$\boxed{E_M = -\tfrac{1}{2} m v_P^2 (\frac{1-e}{1+e})} \qquad \{\text{on aurait aussi } E_M = -\tfrac{1}{2} m v_A^2 (\frac{1+e}{1-e})\ \}$$

Connaissant E_M, v_P et e, nous en déduisons m et le rayon de la comète par $m = \rho.\frac{4}{3}\pi R^3$

$m = 1{,}77\,10^{17} kg \qquad R = 34{,}8 km$

NB: La relation $E_M = -\frac{1}{2} m v_P^2 (1-e)/(1+e)$ permet une discussion aisée du signe de l'énergie en fonction du type de trajectoire: ellipse (E_M<0) , parabole (E_M=0) ou hyperbole (E_M>0).

7. Démontrer, en justifiant chaque étape qui le nécessite, que l'on a la relation :

$$\frac{1}{2}(v_P + v_A)^2 = \mathcal{G}\frac{2M_{soleil}}{q}$$

$$v_P = \frac{C}{r_P} \qquad v_A = \frac{C}{r_A} \qquad v_P + v_A = C(\frac{1}{r_P} + \frac{1}{r_A}) = C\frac{r_P + r_A}{r_P r_A} = \frac{C}{q/2}$$

Avec: $q = \dfrac{C^2}{K_G.M_S}$ et en éliminant C: $\frac{1}{2}(v_P + v_A)^2 = 2\dfrac{K_G M_S}{q}$

8. Quelques années après son dernier passage la comète passe relativement près d'une planète géante du système solaire. Cette dernière perturbe gravitationnellement la comète et donc sa trajectoire. Après cette perturbation, les nouvelles caractéristiques orbitales sont $e' = 0,70$ et $a' = 1,5 \times 10^{10}$ km.
   - Quelle est la valeur du paramètre q' de cette nouvelle trajectoire elliptique ?
   - Que deviennent alors les distances r'_P et r'_A, respectivement au périhélie et à l'aphélie ?

$a' = 1,5 10^{10} km \qquad e' = 0,70$

$q' = a'(1-e'^2) = 0,765 10^{13} m$

$r'_P = \dfrac{q'}{1+e'} = a'(1-e') = 4,5 10^{12} m \qquad r'_A = \dfrac{q'}{1-e'} = a'(1+e') = 25,5 10^{12} m$

   - Déterminer aussi les nouvelles vitesses correspondantes v'_P et v'_A.

Plusieurs possibilités s'offrent alors pour calculer les vitesses, dont les deux suivantes :

a/ utiliser la question 7

$\frac{1}{2}(v'_P + v'_A)^2 = 2\dfrac{K_G M_S}{q}$

Or :

$r'_P v'_P = r'_A v'_A$

D'où

$v'_P = 2\dfrac{r'_A}{r'_A + r'_P}\sqrt{\dfrac{K_G M_S}{q'}} = 7100 m/s$ et $v'_A = \dfrac{r'_P v'_P}{r'_A} = 1250 m/s$

b/ Si on n'a pas répondu à la question 7, recalculer la constante des aires

Constante des aires: $q' = \dfrac{C'^2}{K_G.M_S} \Rightarrow C' = 3,19 10^{16} m^2/s$

$v'_P = \dfrac{C'}{r'_P} = 7100 m/s \qquad v'_A = \dfrac{C'}{r'_A} = 1250 m/s$