MOMENT D'UNE FORCE ET MOMENT CINÉTIQUE : CORRECTIONS

Exercices prioritaires :

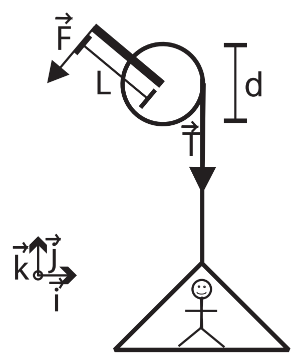
Exercice n° 1

Le treuil ⋆

Un treuil est constitué d'un cylindre de diamètre d et d'axe horizontal, sur lequel s'enroule une corde. Une manivelle de longueur L est utilisée pour faire tourner le cylindre autour de son axe. Le treuil est utilisé pour remonter d'un puits une personne de masse M.

1. Faire un schéma simple du système dans un plan bien choisi.

Référentiel : le référentiel terrestre pourra être assimilé à un référentiel galiléen.
Système : l'axe du treuil
Repère : R(O,$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$).
Forces extérieures : la tension du fil $\vec{T}$ qui transmet le poids $\vec{P}$ de l'ascenseur et la force $\vec{F}$ transmise par la manivelle sur l'axe du treuil.
Le système est immobile. On en déduit que le moment cinétique du cylindre par rapport à O, le centre du treuil, est nul. Il en est de même de sa dérivée et donc $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$.



2. Quel est, par rapport à l'axe du cylindre, le moment de la force que doit exercer l'opérateur sur le cylindre du treuil pour maintenir la personne à une altitude constante ?

Le théorème du moment cinétique nous dit que $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \overrightarrow{m}_{F_{ext}}$. Il faut donc que la somme des moments des forces appliquées au cylindre soit nulle, c'est à dire que le moment de la force exercée par l'opérateur doit être égal et opposé au moment du poids de la personne. Exprimons le moment de la force de tension (engendrée par le poids P) par rapport à O : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -d/2.M.g\vec{k}$.
Le moment de la force $\vec{F}$ doit donc compenser le moment de la force de tension et donc $\overrightarrow{m}_F = \frac{d.M.g}{2}$.

3. Quelle force doit-il appliquer pour cela sur la manivelle ?

Pour que la force exercée par l'opérateur soit minimale il faut que celle-ci soit perpendiculaire à la manivelle. Exprimons le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à O dans ce cas : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = L\vec{u}_\rho \wedge F\vec{u}_\theta = LF\vec{k}$. On en déduit que $F = \frac{dmg}{2L}$. Plus le bras de levier est long, plus la force nécessaire à maintenir l'ascenseur à niveau est faible.

4. A.N. : $d = 10$ cm ; $L = 50$ cm ; $M = 80$ kg.

$$F = \frac{0{,}1.80.10}{2.0{,}5} = 80\,\mathrm{N}$$

Exercice n° 2

Le pendule pesant ⋆⋆☺

Cet exercice est corrigé dans le polycopié

On considère un pendule simple de masse m dont le fil coulisse au point d'attache dans un anneau, de telle sorte que l'on puisse changer la longueur du pendule au cours du mouvement.

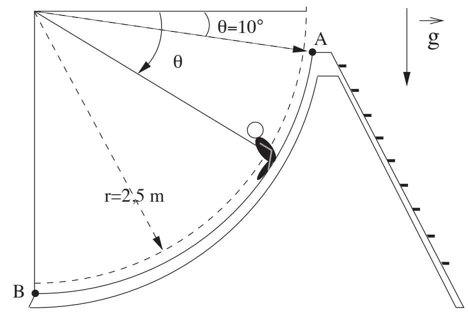
1. On lâche la masse avec une vitesse nulle. Le fil, tendu, fait un angle θ_1 avec la verticale. On maintient d'abord la longueur du fil constante et égale à l_1. En employant le théorème du moment cinétique, calculer la vitesse v_1 de la masse quand le fil passe à la verticale.
2. Quand le fil passe à la verticale, on raccourcit le fil en un temps que l'on supposera suffisamment bref pour qu'il reste vertical. Rappeler quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse. Calculer leur moment par rapport au point d'attache O durant le raccourcissement du fil. Quelle est la loi de conservation qui en résulte ?
3. Juste après l'opération, le fil étant encore vertical, la longueur est l_2 et la vitesse de la masse v_2. Calculer v_2 d'abord en fonction de v_1, l_1 et l_2, puis en fonction de l_1, l_2 et θ_1 et de l'accélération de la pesanteur g.
4. Calculer l'amplitude angulaire maximum θ_2 du pendule si l'on maintient la longueur égale à l_2 (calculer $\cos\theta_2$).
5. A.N. : $\theta_1 = 30$ degrés, $l_1 = 2$ m, $l_2 = 1.5$ m, calculer θ_2.
6. Pour le même θ_1, calculer $\cos\theta_2$ si $l_1 = 1\ m$ et $l_2 = 0.4\ m$. Interpréter.
7. A quel jeu ce système vous fait-il penser ?

Exercices supplémentaires :

Exercice n° 3

Le Toboggan ⋆⋆

Un enfant, que l'on assimilera a un point matériel M de masse m = 40 kg, glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon $r = 2,5$ m. L'enfant, initialement en A, se laisse glisser (vitesse initiale nulle) et atteint le point B avec une vitesse v. On supposera le référentiel terrestre galiléen et les frottements négligeables.



La géométrie du problème incite à l'utilisation de coordonnées polaires. On prêtera attention au fait que l'angle θ est défini positif dans le sens indirect ce qui conduit à un trièdre direct $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k})$ où $\overrightarrow{k}$ pointe vers l'arrière de la feuille.

1. A l'aide du théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Bilan des forces :
- Le poids : $\overrightarrow{P} = mg\sin\theta\overrightarrow{u_r} + mg\cos\theta\overrightarrow{u_\theta}$
- La réaction du toboggan : $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$. Le signe « - » est une anticipation du fait que la réaction sera vers l'intérieur. La composante sur $\overrightarrow{u_\theta}$ est nulle car on néglige les frottements.)

Moments des forces : le moment de la réaction du toboggan est nul ($\overrightarrow{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$). Le moment du poids s'écrit

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = (r\overrightarrow{u_r}) \wedge (mg\sin\theta\overrightarrow{u_r} + mg\cos\theta\overrightarrow{u_\theta}) = mgr\cos\theta\,\overrightarrow{k}$$

Moment cinétique : $\overrightarrow{L} = m\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v} = m(r\overrightarrow{u_r}) \wedge (r\dot\theta\overrightarrow{u_\theta}) = mr^2\dot\theta\,\overrightarrow{k}$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\overrightarrow{P}/O} \quad\Rightarrow\quad mr^2\ddot\theta\,\overrightarrow{k} = mgr\cos\theta\,\overrightarrow{k} \quad\Rightarrow\quad r\ddot\theta - g\cos\theta = 0$$

2. A partir de cette équation, exprimer la vitesse en fonction de θ. Calculez v en B.

En multipliant par $\dot{\theta}$ l'équation on obtient une équation intégrable :

$$r\dot{\theta}\ddot{\theta} - g\dot{\theta}\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r\dot{\theta}^2}{2} - g\sin\theta = C^{te} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2r} - g\sin\theta = -g\sin\theta_0$$

$$\Rightarrow \quad v(\theta) = \sqrt{2rg(\sin\theta - \sin\theta_0)} \quad \text{et} \quad v_B = \sqrt{2rg(1-\sin\theta_0)} = 6{,}36\,\mathrm{m/s}$$

3. Retrouver ce résultat par une méthode plus directe.

La forme intégrée de l'équation du mouvement n'est autre que la conservation de l'énergie mécanique.

La force de réaction ne travaille pas et le poids dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgh = -mgr\sin\theta$ (on a pris l'origine des énergies en $\theta = 0$ et le signe « - » exprime bien que l'énergie potentielle décroît lorsque θ augmente). La conservation de l'énergie mécanique totale s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgr\sin\theta = C^{te}$$

Exercice n° 4

Enroulement d'une ficelle autour d'un poteau ⋆⋆⋆

Une bille est lancée horizontalement à une vitesse V_0, elle est attachée à une ficelle de longueur L_0 qui s'enroule autour d'un poteau vertical de rayon a. On suppose la vitesse $V(t)$ suffisamment grande pour que l'on puisse négliger l'effet de la pesanteur. On notera $L(t)$ la longueur non enroulée de la ficelle.

1. Le moment cinétique de la bille par rapport à l'axe du poteau est-il conservé ?

Appelons O le point de l'axe du poteau dans le plan de la trajectoire de la bille. Le moment par rapport à O de la force appliquée par la ficelle sur la bille n'est pas nul, il est égal à $\vec{m}_T = Ta\vec{k}$ (la tension exercée par la ficelle multipliée par le rayon du poteau, la tension est suivant la ficelle qui est tangente au poteau. Le moment cinétique de la bille n'est donc pas conservé lors de ce mouvement.

2. Vous pouvez continuer le problème pour trouver $V(t)$ et $L(t)$ en prenant comme conditions initiales V_0 et L_0. Penser aux théorèmes faisant intervenir l'énergie.

Si nous voulons aller plus loin, il faut constater que la force exercée par la ficelle est toujours perpendiculaire à la vitesse et donc à la trajectoire.

En effet, utilisons un repère de coordonnées polaires centré sur l'axe du poteau et tel que le point de contact O' de la ficelle soit repéré par $\overrightarrow{OO'} = a\overrightarrow{u_r}$. La position de la bille s'écrit alors

$$\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{u_r} + L(t)\overrightarrow{u_\theta} = a\overrightarrow{u_r} + (L_0 - a\theta)\overrightarrow{u_\theta}$$

La vitesse de la bille est donc $\overrightarrow{v} = -\dot{\theta}(L_0 - a\theta)\overrightarrow{u_r}$ (les termes sur $\overrightarrow{u_\theta}$ s'annulent) et est bien perpendiculaire à la tension qui est portée par la ficelle et donc par $\overrightarrow{u_\theta}$.

On en déduit donc que cette force ne travaille pas. Cela signifie que l'énergie cinétique ne varie pas et donc que la vitesse est constante et que $V(t) = V_0$.

On peut, à partir de là, remonter à l'équation horaire de θ et donc à $L(t)$. En constatant que $\dot{\theta} > 0$

$$V_0 = \dot{\theta}(L_0 - a\theta) \quad \Rightarrow \quad V_0 t = L_0\theta - \frac{1}{2}a\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \theta^2 - \frac{2L_0}{a}\theta + \frac{2V_0 t}{a} = 0$$

Sur les deux solutions une seule est compatible avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta} > 0$. On a :

$$\theta(t) = \frac{L_0}{a} - \sqrt{\frac{L_0^2}{a^2} - \frac{2V_0 t}{a}} \quad \Rightarrow \quad L(t) = L_0 - a\theta(t) = L_0\sqrt{1 - \frac{2V_0 a t}{L_0^2}}$$

On peut souligner que :

– En $t = 0$ on a bien $\theta(0) = 0$ et $L(0) = L_0$
– En $t = t_f = \frac{L_0^2}{2V_0 a}$ on a $\theta(t_f) = \frac{L_0}{a}$ et $L(t_f) = 0$
– Au delà de t_f les formules ne sont plus valables (la ficelle est complètement enroulée)
– A partir du théorème du moment cinétique on montre que $T = -m\dot{\theta}V_0$ ce qui nous dit bien que $\overrightarrow{T}$ est dirigée de la bille vers le poteau et que son intensité augmente pour diverger en t_F (la ficelle doit casser avant que la bille atteigne le poteau).

Exercice n° 5

L'atome de Bohr ⋆⋆

Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène est le suivant : un électron de masse m et de charge $q = -e$ décrit des orbites circulaires de rayon r autour d'un noyau supposé fixe placé en O de charge $Q = +e$.

1. Montrer que si l'on suppose que le module du moment cinétique de l'électron σ_0 par rap-

port à O, est de la forme $\sigma_0 = n\hbar$ où n est un entier et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite, on peut calculer pour chaque valeur de n, le rayon de l'orbite et l'énergie mécanique de l'électron.

Système : électron
Repère : R(O,$\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$,$\vec{k}$).
Forces extérieures : $\vec{F}_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\vec{u}_r$. C'est la force électrique exercée par le proton (noyau d'H) sur l'électron
C'est un mouvement à force centrale, la force est selon $\vec{u}_r$, le moment par rapport au noyau (origine des axes O) de la force d'attraction qui attire l'électron est nul. Le moment cinétique orbital $\vec{\sigma}$ de l'électron est donc constant. Soit $\vec{\sigma}_0$ le moment cinétique de l'électron à un instant pris comme origine des temps, le mouvement se déroule dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}_0$ passant par O. Par ailleurs $= \vec{\sigma} = \vec{OM} \wedge \vec{p} = mr^2\dot{\theta}\vec{k}$.
La trajectoire étant circulaire, on en déduit que $\dot{\theta}$ =C^{te}.
Appliquons maintenant la relation fondamentale de la dynamique. Pour cela, calculons le vecteur accélération dans le cas des trajectoires circulaires (r =C^{te}). On a :

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -\frac{v^2}{r}\vec{u}_r \quad \text{et donc} \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \Rightarrow mrv = \sqrt{\frac{mre^2}{4\pi\epsilon_0}}$$

Utilisons maintenant la relation de quantification introduite par Bohr $\sigma = n\hbar = mrv$.

2. Montrer en particulier que r est de la forme $r = n^2 r_0$; exprimer r_0 et calculer sa valeur numérique.

On en déduit que $r = n^2 r_0$ avec $r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$.
Par ailleurs $E_m = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}$ (on choisit de prendre l'énergie potentielle nulle lorsque l'électron est à l'infini). Ensuite, en utilisant $r = n^2 r_0$, on obtient : $E_m = -\frac{E_0}{n^2}$ avec $E_0 = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0}$

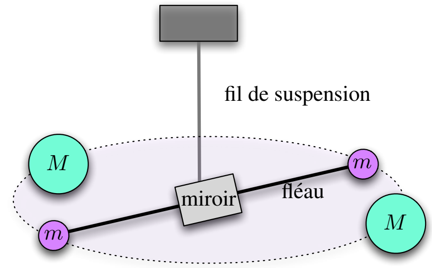
$m = 9,1096 \times 10^{-31}$ kg, $\epsilon_0 = 8,854188 \times 10^{-12}$ F/m, $e = 1,60219 \times 10^{-19}$ C, $h = 6,6262 \times 10^{-34}$ J s.

Exercice n° 6

L'expérience de Cavendish ⋆⋆

La première détermination de la constante $\mathcal{G}$ est due à Cavendish en 1798 par une expérience sommairement décrite ci-après (d'après Faroux et Renault).

Deux petites sphères de platine de masse m sont placées aux extrémités d'un fléau horizontal de longueur $2l$ suspendu à un fil dont la constante de torsion est C ; deux sphères de plomb de masse M ont leur centre dans le plan horizontal du fléau à une distance d du centre des petites sphères (figure ci-contre). Le dispositif expérimental est symétrique, les centres des sphères de plomb sont également espacés de $2l$ de telle façon que les 4 sphères sont toujours placées sur un cercle de rayon l ayant pour axe le fil de suspension.

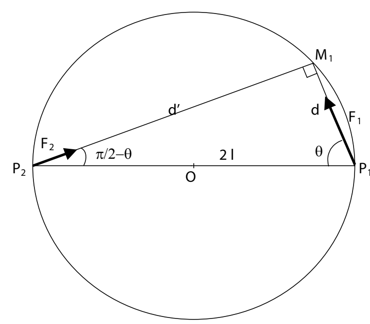


Il est rappelé qu'un fil de torsion va créer un moment (couple) qui lui est parallèle et qui s'oppose à sa torsion. Si $\vec{u}_z$ donne la direction du fil et que θ est l'angle de torsion dans le plan perpendiculaire au fil et orienté par $\vec{u}_z$, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{fil}/\vec{u}_z} = -C\theta\vec{u}_z$$

1. Lorsqu'on place les sphères de plomb dans une nouvelle position symétrique de la précédente le fléau tourne d'un angle 2α. Calculer $\mathcal{G}$ en fonction de m, M, l, d, α et C.

Calcul de la constante de gravitation
Référentiel : le référentiel terrestre pourra être assimilé à un référentiel galiléen.
Repère : R(O,$\vec{i}$,$\vec{j}$,$\vec{k}$).
A l'équilibre la somme des moments des forces appliquées est nulle, le moment dû aux forces de pesanteur est nul (symétrie du système), le moment dû à l'attraction des boules est égal et opposé au moment dû à la torsion du fil. On appellera O le centre du fléau, P_1 et P_2 les centres des sphères de platine m et m', M_1 et M_2 les centres des sphères de plomb, α l'angle de rotation du fléau par rapport à sa position de repos (définie en l'absence des boules de plomb).



Il faut calculer le moment par rapport à O des forces exercées sur les sphères de platine. Soit $\vec{\Gamma}_1$ le moment de la force exercée par la sphère de plomb placée en M_1 sur la sphère de centre P_1 et $\vec{\Gamma}_2$ le moment de la force exercée par la sphère de plomb placée en M_1 sur la sphère P_2. Nous avons :

$$\vec{\Gamma}_1 = \overrightarrow{OP}_1 \wedge \vec{F}_1 = \frac{l\mathcal{G}mM}{d^2}\sin\theta.\vec{k} \quad \text{avec} \quad \sin\theta = \frac{MP_2}{2l} = \frac{\sqrt{4l^2-d^2}}{2l} = \sqrt{1-\left(\frac{d}{2l}\right)^2}$$

On a donc : $\vec{\Gamma}_1 = \frac{l\mathscr{G}mM}{d^2}\sqrt{1-\left(\frac{d}{2l}\right)^2}.\vec{k}$.
De même, on calcule $\vec{\Gamma}_2 = \overrightarrow{OP}_2 \wedge \vec{F}_2$. Remarquons que ce moment est orienté selon $-\vec{k}$. On a alors $\vec{\Gamma}_2 = -\frac{l\mathscr{G}mM}{d'^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).\vec{k}$. On a $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta = \frac{d}{2l}$. On obtient donc : $\vec{\Gamma}_2 = -\frac{l\mathscr{G}Mm}{4l^2-d^2}\frac{d}{2l}\vec{k}$.
Pour la seconde boule de plomb le calcul est identique et le couple total résultant des interactions entre les boules, $2\left(\vec{\Gamma}_1+\vec{\Gamma}_2\right)$, est compensé par le moment dû au fil de torsion, $-C\alpha\vec{k}$. Nous avons donc l'équation finale liant $\mathscr{G}$ et α :

$$C\alpha = \vec{\Gamma}_{\text{Boules}} = 2\left(\vec{\Gamma}_1+\vec{\Gamma}_2\right) = 2l\mathscr{G}Mm\left(\frac{1}{d^2}\sqrt{1-\left(\frac{d}{2l}\right)^2} - \frac{d}{\left(4l^2-d^2\right)2l}\right)$$

$$\text{Et donc finalement} \quad \mathscr{G} = \frac{C\alpha}{2lMm\left(\frac{1}{d^2}\sqrt{1-\left(\frac{d}{2l}\right)^2} - \frac{d}{(4l^2-d^2)2l}\right)}$$

2. L'angle 2α dont a tourné le fléau est mesuré par la méthode de Pogendorf : un miroir placé sur le fléau renvoie un faisceau lumineux, le déplacement du spot lumineux observé à une distance de 5 ± 0.001 m du miroir est de 5.5 ± 0.05 cm. On a également mesuré : $m = 50\pm0.001$ g, $M = 30\pm0.001$ kg, $l = 10\pm0.05$ cm, $d = 10\pm0.1$ cm et $C = (5\pm0,05)\times10^{-7}$ Nm/rad.
Quelle est la valeur de $\mathscr{G}$ que l'on peut déduire de cette expérience ainsi que l'incertitude attachée à cette mesure ?

Détermination numérique de G
Entre les deux positions extrêmes le fléau a tourné de 2α, et le rayon lumineux a tourné de 4α d'où $\tan 2\alpha = 2\alpha = \frac{5,5}{2\times500}$ soit $\alpha = 0,0275$ rad.
On en déduit $\mathscr{G}$=6,55×10^{-11} **SI**.

3. Peut-on négliger l'attraction entre une sphère de plomb et la sphère de platine la plus éloignée ?

Incertitude sur G
Les deux termes de la parenthèse de l'équation finale représentent les contributions des sphères les plus proches et des sphères plus éloignée (F_1 et F_2), l'évaluation du premier terme donne 86,6 m^2 et 16,6 m^2 pour le second, il ne peut donc pas être négligé. Le rayon des sphères de plomb est de 86 mm, celui des sphères de platine

est de 8,1 mm. On évalue l'incertitude par la méthode de la sommation des incertitudes relatives en négligeant le terme correspondant à l'interaction des sphères éloignées ainsi que le terme sous le radical, on arrive à une incertitude de 4,5 % soit $6{,}26\times10^{-11} < G < 6,85\times10^{-11}$ **SI**. Les facteurs donnant les incertitudes les plus importantes sont d, le déplacement du spot lumineux et la valeur de la constante de torsion.

Pour aider au tracé d'une figure à l'échelle on donne les masses volumiques du plomb et du platine respectivement 11,35 et 22,45 kg/dm^3.