Preprint typeset in JHEP style - HYPER VERSION

Projets de simulation en C++
Licence 3 de Physique:
Mécanique Classique: Étude d'oscillations

P.A Harraud, J. Salort, I. Schienbein

E-mail: harraud@lpsc.in2p3.fr, julien.salort@grenoble.cnrs.fr, schien@lpsc.in2p3.fr

Abstract: Proposition des projets de simulation pour les TP de C++ en Licence 3 de Physique

Contents

1. Oscillation harmonique avec des frottements

1.1 Problème

Mouvement horizontal d'un point matériel sous l'influence d'une force d'un ressort et des frottements.

- Système: Point matériel, masse $M = 1\ kg$, mouvement 1-D
- Forces:
  - Ressort avec une raideur $A = 3N/m$: $F_1 = -Ax$
  - Frottement dynamique: $F_2 = -B\frac{dx/dt}{|dx/dt|}$, $B = 0.5\ N$ ($F_2 = 0$ si $dx/dt = 0$).
  - Frottement statique: $F_3 \leq C$, $C = 1\ N$ si le point ne bouge pas
- L'équation différentielle:

$$-M\ddot{x} - Ax - B\frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} + C\delta_{\dot{x}0} = 0, \quad \dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} \tag{1.1}$$

Quand $\dot{x} = 0$ il faut que $A|x| > C$, sinon le point matériel s'arrêt.

1.2 Méthode numerique

Transformation de l'équation différentielle:
L'équation de mouvement a la forme

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \tag{1.2}$$

c.a.d, il s'agit d'une équation différentielle du 2nd ordre à une dimension. Pour utiliser la méthode dÉuler on transforme (1.2) dans un système d'équations différentielles couplées de 1er ordre. En utilisant

$$y_1(t) := x(t)\,, \tag{1.3}$$
$$y_2(t) := \dot{x}(t) \tag{1.4}$$

on trouve

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2\,, \tag{1.5}$$
$$\frac{dy_2}{dt} = f(y_1, y_2, t)\,, \tag{1.6}$$

avec

$$f(y_1(t), y_2(t), t) = \begin{cases} 0 \,:\, y_2(t) = 0 \quad \text{et} \quad |y_1(t)| \leq \frac{C}{A} \\ -\frac{A}{M} y_1(t) - \frac{B}{M} \frac{y_2(t)}{|y_2(t)|} \;:\, \text{sinon} \end{cases} \tag{1.7}$$

Finalement, pour la méthode de Euler on fait l'identification:

$$f_1(y_1(t), y_2(t), t) = y_2(t)\,, \tag{1.8}$$
$$f_2(y_1(t), y_2(t), t) = f(y_1(t), y_2(t))\,. \tag{1.9}$$

1.3 Programmation

- Ajouter la méthode Euler à la classe DynamicalSystem

- Programmer la classe MonSystem

1.4 Exercices/Analyses

- Vérifier la stabilité de la méthode de solution en modifiant la largeur incrémentielle h. Dans quel domaine est-ce qu'on trouve une solution stable? Qu'est-ce qui se passe si on choisit h trop grand?

- Calculer $x(t)$ en fonction du temps pour des conditions initiales différentes. Graphes avec gnuplot et root!

- Déterminer la période T. Comparer avec la période sans frottements.

2. Oscillation anharmonique libre et forcée

2.1 Problème

Mouvement horizontal d'un point matériel dans un potentiel anharmonique $V(x)$ (sans frottements):

$$V(x) = A\frac{|x|^{B+1}}{B+1}\,. \tag{2.1}$$

- Système: Point matériel, masse $M = 1\ kg$, mouvement 1-D
- Forces:
  - $K(x) = -A|x|^B \frac{x}{|x|} = -\frac{d}{dx}V(x)$
  - Force extérieur harmonique: $C\cos\omega t$
- L'équation différentielle:

$$-M\ddot{x} - A|x|^B \frac{x}{|x|} + C\cos\omega t = 0 \tag{2.2}$$

Remarques:
Pour $B \to 0$ on a des plans penchés pour $x > 0$ ou bien $x < 0$. Avec $C = 0$ un traitement analytique est possible. $B = 1$ est le cas harmonique. Il est bien connu que pour $C = 0$ la période ne depend pas de l'amplitude. $B \gg 1$ is the case of hard reflecting walls. In this case the oscillation period is decreasing with increasing amplitude.

2.2 Méthode numerique

- La méthode de Euler améliorée (utile?)
- La méthode de Runge-Kutta

  Système de l'équations differentielles

$$f_1(y_1(t), y_2(t), t) = y_2(t)\,, \tag{2.3}$$

$$f_2(y_1(t), y_2(t), t) = -\frac{A}{M}|y_1(t)|^B \frac{y_1(t)}{|y_1(t)|} + \frac{C}{M}\cos\omega t \tag{2.4}$$

2.3 Programmation

- Ajouter la méthode euler2 (améliorée) à la classe DynamicalSystem
- Programmer la classe MonSystem

2.4 Exercices/Analyses

- Éprouver la précision de la méthode de Runge-Kutta pour le cas d'une oscillation harmonique et libre ($B = 1, C = 0$) et pour le cas d'une oscillation très anharmonique ($B = 5, C = 0$).
- Comparer les courbes de solution pour $B = 0.00001, 1, 2, 10$ (toujours $C = 0$).
- Activer la force extérieure ($C \neq 0$) et analyser les effets de résonance pour différentes valeurs de B.

3. Oscillations harmoniques couplées

3.1 Problème

L'oscillation harmonique couplée de deux points matériels (sans frottements).

- Système: Deux points matériels, masses: $M_1 = 1\ kg$, $M_2 = 1\ kg$, mouvement 1-D
- Forces:
  - 'Ressort 1': $-C_1 x_1$
  - 'Ressort 2': $-C_2 x_2$ (où x_1, x_2 sont relatifs à la position de repos)
  - Ressort de couplage entre les points matériels: Raideur C
- Les équations différentielles:

$$-M_1\ddot{x}_1 - C_1 x_1 + C(x_2 - x_1) = 0 \tag{3.1}$$
$$-M_2\ddot{x}_2 - C_2 x_2 + C(x_1 - x_2) = 0 \tag{3.2}$$

  Avec les définitions

$$A_{11} = -(C_1 + C)/M\,, \qquad A_{12} = C/M \tag{3.3}$$
$$A_{21} = C/M\,, \qquad A_{22} = -(C_2 + C)/M \tag{3.4}$$

  on trouve la forme générale

$$\ddot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2\,,\ \ddot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2\,. \tag{3.5}$$

Remarques:

- La généralisation à m points s'écrit:

$$\ddot{x}_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij}x_j\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,. \tag{3.6}$$

- Il est bien sûr possible d'inclure des forces de frottements et des forces motrices dans l'équation (3.6).

3.2 Méthode numerique

Transformation dans un système couplé des équations linéaires:
Avec l'affectation

$$y_i(t) = x_i(t)\,, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3.7}$$
$$y_{i+m}(t) = \dot{x}_i(t)\,, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3.8}$$

on obtient le système

$$\dot{y_i} = f_i(y_1(t), \ldots, y_{2m}(t), t)\,, \qquad i = 1, \ldots, 2m \tag{3.9}$$

avec

$$f_i = y_{i+m}(t)\,, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3.10}$$

$$f_{i+m} = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} y_j(t)\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,. \tag{3.11}$$

- Solution de (3.9) avec la méthode de Runge-Kutta

3.3 Programmation

Pour notre exemple (3.4), (3.5) les fonctions f_i sont données par

$$f_1 = y_3(t)\,, \tag{3.12}$$

$$f_2 = y_4(t)\,, \tag{3.13}$$

$$f_3 = -\left(\frac{C_1}{M} + \frac{C}{M}\right) y_1(t) + \frac{C}{M} y_2(t)\,, \tag{3.14}$$

$$f_4 = -\frac{C}{M} y_1(t) - \left(\frac{C_2}{M} + \frac{C}{M}\right) y_2(t)\,. \tag{3.15}$$

- Programmer la classe MonSystem

3.4 Exercices/Analyses

- Examiner le cas $C_1 = C_2$ pour une couplage faible $C = C_1/10$ et forte $C = 10C_1$.

- Examiner le cas $C_1 \neq C_2$ avec une couplage C moyenne. Étudier la transmission de l'énergie entre les deux points matériels. Est-ce qu'il y a des conditions initiales où il n'y a pas de transmission de l'énergie?