EXERCICES 06

---

1. Le groupe O(2) ($\simeq$ $C_{\infty v}$) contient, en plus des rotations $R(\phi)$ autour de l'axe z, des réflexions σ_v dans un plan contenant l'axe z.
   – Si S est la réflexion dans le plan $x-z$, montrer que $SR(\phi)S^{-1} = R(-\phi)$, de sorte que le groupe n'est plus abélien.
   – Montrer que pour $m \neq 0$ il est nécessaire de combiner les irreps $D^{(m)}$ et $D^{(-m)}$ de SO(2) pour fournir une représentation irréductible du groupe élargi. Donner les caractères dans cette représentation.
   – Qu'est-ce qui se passe au cas où $m = 0$?
2. Une rotation générale est souvent décrite par les angles d'Euler :
   $$R(\phi, \theta, \psi) \;=\; e^{-iX_3''\psi} e^{-iX_2'\theta} e^{-iX_3\phi},$$
   c.à.d. par une rotation par ϕ autour de l'axe z, suivie d'une rotation par θ autour du nouvel axe y et d'une rotation par ψ autour du nouvel axe z (qui pointe dans la direction avec angles polaires (θ, ϕ). Montrer, en utilisant vos connaissances sur les conjugaisons, que $R(\phi, \theta, \psi)$ peut être exprimée en termes de rotations autour des axes fixes par
   $$R(\phi, \theta, \psi) \;=\; e^{-iX_3\phi} e^{-iX_2\theta} e^{-iX_3\phi}.$$
3. Montrer que
   $$d^{1/2}_{m'm}(\theta) \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix},$$
   sachant que le générateur X_2 des rotations autour de l'axe y est donné par la matrice de Pauli $\sigma_2/2$.
4. Construire, à partir de la représentation de produit $D^{(1/2)} \otimes D^{(1/2)}$, la matrice $d^1_{m'm}(\theta) \equiv D^1_{m'm}$ $(R_2(\theta))$ et vérifier que c'est vraiment la bonne matrice pour la représentation vectorielle par rapport à la base $-(x+iy)/\sqrt{2}$, z, et $(x-iy)/\sqrt{2}$.
5. Montrer que l'élément de matrice réduit $\langle j||\mathbf{J}||j\rangle$ apparaissant dans
   $$\langle jm'|J_M|jm\rangle \;=\; C(1jj; Mmm')\langle j||\mathbf{J}||j\rangle$$
   est donné par
   $$\langle j||\mathbf{J}||j\rangle \;=\; \hbar\sqrt{j(j+1)}.$$
   [NB : Prendre $m' = j$ et $M = 0$ (ou $M = 1$) dans la relation ci-dessus et trouver le coefficient de Clebsch-Gordan en construisant la combinaison $\alpha|j,j\rangle|1,0\rangle + \beta|j,j-1\rangle|1,1\rangle$, qui se transforme comme $|jj\rangle$.]
