# EXERCICES 04

1. Construire les matrices de la représentation [2] de $D_3$, qui agit sur $x$ et $y$, et vérifier le théorème fondamental d'orthogonalité pour les matrices.
2. Lemmes de Schur.
   (a) Si $D(g)$ est une représentation du groupe $G$, montrer que les matrices $D^*(g)$ forment aussi une représentation.
   (b) Si les deux représentations sont équivalentes, c.à.d. $D^*(g) = C^{-1}D(g)C$, et si $D$ est irréductible, montrer que $CC^* = \lambda I$.
   (c) Si en plus $D$ est unitaire, montrer que $CC^\dagger = \mu I$.
   (d) Montrer que $C$ peut être redéfinie tel que $\mu = 1$ et qu'alors $C$ est soit symétrique, soit anti-symétrique.
3. Montrer que la matrice

$$B_i^\nu \ := \ \sum_{g \in K_i} D^{(\nu)}(g),$$

   c.à.d. la somme des matrices d'une représentation irréductible de dimension $n_\nu$ correspondant aux éléments d'une classe de conjugaison $K_i$, est un multiple de l'identité, $B_i^\nu = \lambda_i^\nu I$. Le coefficient $\lambda_i^\nu$ est appelé *caractère de Dirac* de la classe $K_i$. Prendre les traces dans cette équation, relier le caractère de Dirac aux caractères ordinaires $\chi_i^\nu$ et obtenir ainsi la dimension $n_\nu$ en termes de $|G|$, $k_j = |K_j|$ et $\lambda_j^\nu$.
4. Soit $D$ une représentation générale d'un groupe fini $G$ avec caractères $\chi_i$. En considérant sa décomposition en représentations irréductibles, montrer que

$$\sum_i k_i |\chi_i|^2 \ = \ |G| \sum_\mu a_\mu^2$$

   et donc qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'irréductibilité de $D$ est $\sum_i k_i |\chi_i|^2 = |G|$.
5. En se rappelant de l'exercice 3.3, on voit que l'on peut obtenir les caractères du groupe $G$ à partir de ceux du groupe quotient $G/N$,

$$\chi^G(g) \ = \ \chi^{G/N}(gN).$$

   Considérons le cas de $D_6$. Il a un sousgroupe normal $C_2$ (le centre) généré par $c^3$, et la structure du groupe facteur $D_6/C_2$ est $D_3$. Montrer que les caractères des représentations irréductibles $A_1$, $A_2$, $E_2$ donnés ci-dessous peuvent être relevés de ceux de $D_3$.

| $D_6$ | $E$ | $2C_6$ | $2C_6^2$ | $C_6^3$ | $3C_2$ | $3C_2'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $A_2$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| $B_1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| $B_2$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $E_1$ | 2 | 1 | $-1$ | $-2$ | 0 | 0 |
| $E_2$ | 2 | $-1$ | $-1$ | 2 | 0 | 0 |