PHY4123 Théorie des Groupes et Symétries en Physique I. Schienbein (C et TD)

EXAMEN 2014/2015

---

1. **Permutations.**

   Soient

   $$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 4 & 6 & 7 & 2 & 3 & 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \; p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 8 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

   deux permutations.

   (a) Déterminez les produits $p_1 \cdot p_2$, $p_2 \cdot p_1$ et les symétriques p_1^{-1} et p_2^{-1}.

   (b) Écrivez p_1 et p_2 en notation cyclique.

   (c) Quel est l'ordre de p_1 et p_2 ?

2. **Le groupe D_3.**

   (a) Donnez la définition du groupe D_3. Quel est son ordre ? Interprétez les éléments du groupe comme transformations d'un triangle régulier non-orienté.

   (b) Spécifiez les classes de conjugaison.

   (c) Construisez la table de caractères. (Justifiez toutes les entrées dans la table.)

   (d) Calculez la décomposition Clebsch-Gordan pour la représentation $D^{(V)} \otimes D^{(V)}$ où $D^{(V)}$ est la représentation vectorielle (3-dimensionelle).

3. **Coefficients Clebsch-Gordan.**

   En utilisant les expressions pour les matrices $d^{1/2}_{m'm}(\theta)$ et $d^{1}_{m'm}(\theta)$ dérivez les fonctions $d^{3/2}_{3/2,3/2}(\theta)$, $d^{3/2}_{3/2,1/2}(\theta)$ et $d^{3/2}_{1/2,1/2}(\theta)$.

   Les identités trigonométriques suivantes peuvent être utiles :

   $$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\,, \; \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,, \; \cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\,.$$

4. **Le groupe symplectique.**

   Le groupe symplectique est défini par $\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{R}) := \{A \in \mathrm{GL}(2m,\mathbf{R}) | A^\dagger J A = J\}$ avec

   $$J := \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}\,.$$

   (a) Quelle est la dimension réelle du groupe général linéaire $\mathrm{GL}(2m,\mathbf{R})$, $\dim_{\mathbf{R}}\{\mathrm{GL}(2m,\mathbf{R})\}$?

   (b) Déterminez le nombre de contraintes à cause de la relation $A^\dagger J A = J$.
   Piste : Écrivez

   $$A = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$$

   avec des matrices réelles $m \times m$ C, D, E, F.

   (c) Déterminez alors la dimension du groupe symplectique, $\dim_{\mathbf{R}}\{\mathrm{Sp}(2m,\mathbf{R})\}$.

Bon courage !

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

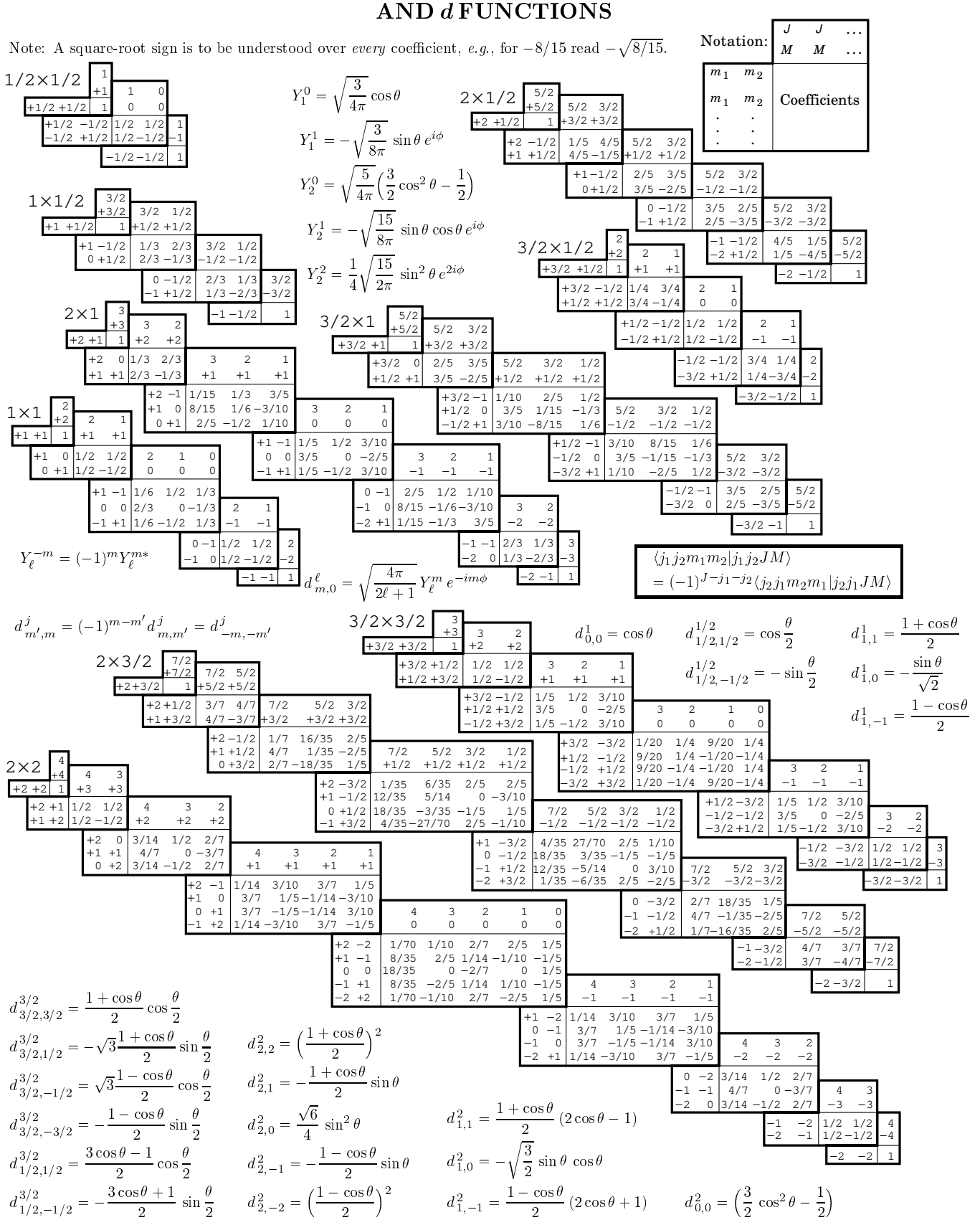

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.