EXAMEN 2011/2012

1. **Le groupe** D_5

   Le groupe diédral $D_5 =< c, b >$ avec $c^5 = b^2 = (bc)^2 = e$ est le groupe de symétrie d'un pentagone régulier.

   (a) Décrivez les éléments c et b à l'aide d'une figure.

   (b) Identifiez tous les éléments du groupe. Combine d'éléments y a-t-il ?

   (c) Rappelez le théorème de Lagrange. Combien de sous-groupes propres de D_5 y-a-t-il ?

   (d) Determinez les classes de conjugaison du groupe D_5.

   (e) Combien de représentations irreductibles y a-t-il ?

   (f) Quelles sont les dimensions de ces représentations irreductibles ?

   (g) Construisez la table de caractères.
   Pistes :
   – Commencez avec la première ligne et la première colonne.
   – Pour la deuxième ligne utilisez le fait que la représentation est abélien.
   – Puis après on peut fixer la dernière colonne.
   – Finalement, determinez les caractères manquants dans les lignes ≥ 3.
   Application numérique : $2\cos(2\pi/5) \approx 0,618 = 1/G$, $2\cos(4\pi/5) \approx -1,618 = -G$ où $G = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

2. **Le groupe** D_6

   La table de caractères de D_6 est :

D_6	E	$2C_6$	$2\,C_6^2$	C_6^3	$3\,C_2$	$3\,C_2'$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	1	-1	-2	0	0
E_2	2	-1	-1	2	0	0

   (a) Utilisez cette table pour trouver la série de Clebsch-Gordan de la représentation $E_1 \otimes E_2$ de D_6.

   (b) Expliquez comment la triple dégénérescence d'un orbital atomique $l = 1$ est levée, si la symétrie SO(3) est réduite à D_6 par un environnement cristalline.

Bon courage !