Chapitre 3

Propriétés des représentations irréductibles

Questions:

1. Comment peut-on savoir si une rep. est irréductible?

2. Combien d'irreps non-équivalentes d'un groupe (fini) G y a-t-il?

3.1 Lemmes de Schur

Lemme 3.1 (Schur 1)**.** *Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dim. finie, (V, D) une irrep d'un groupe G et $L : V \to V$ un opérateur linéaire avec*

$$[L, D(g)] = 0 \quad \forall g \in G\,.$$

Dans ce cas: L est proportionnel à l'identité I sur V.

Preuve.
1. $L = 0$: trivial.
2. $L \neq 0$:
Idée: Montrer que

a) L possède au moins une valeur propre $\lambda \neq 0$.

b) Les vecteurs propres forment un espace invariant U par rapport à D.

c) D irréductible $\Rightarrow$ L'espace invariant $U = V$ et $\forall \vec{x} \in V : L\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Ad a): Nous représentons L par une (n,n)-matrice A.
Valeurs propres:
$\rightsquigarrow \det(A - \lambda I_{n\times n}) = 0$
$\rightsquigarrow$ Polynôme caractéristique:

$$P_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0\,,\ \alpha_i \in \mathbf{C}\,.$$

Léquation $P_A(\lambda) = 0$ est une équation algébrique du degré n.
$\Rightarrow \exists!\ n$ racines/solutions.
$\Rightarrow$ Chaque opérateur linéaire sur un **C**-espace vectoriel de dim. finie possède au moins une valeur propre $\lambda \neq 0$ avec valeur propre $\vec{x} \neq \vec{0}$: $L\vec{x} = \lambda\vec{x}$. [Si $\forall i : \lambda_i = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow L = 0$.]

Ad b):

$$L(D(g)\vec{x}) = D(g)L\vec{x} = D(g)(\lambda\vec{x}) = \lambda(D(g)\vec{x})\,.$$

$D(g)\vec{x}$ est donc un vecteur propre de L pour la même valeur propre $\lambda \neq 0$.
$\Rightarrow U := \{\vec{x} | L\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$ est un sous-espace invariant par rapport à D.

Ad c): D irréductible $\Rightarrow U = \emptyset \vee U = V$. $\vec{x} \neq 0 \Rightarrow U = V$ et $\forall \vec{x} \in V : L\vec{x} = \lambda\vec{x}$.
$\Rightarrow L = \lambda I$. □

Remarques. La constante de proportionnalité dépend de la représentation irréductible.

Lemme 3.2 (Schur 2). *Soient V_1 et V_2 deux **K**-espaces vectoriels, (V_1, D_1) et (V_2, D_2) deux reps. d'un groupe G. Soit $L : V_1 \to V_2$ un opérateur linéaire avec*

$$LD_1(g) = D_2(g)L\ \forall g \in G\,.$$

Dans ce cas: $L = 0$ ou L inversible avec $D_2(g) = LD_1(g)L^{-1}$, c.à.d., $D_1 \sim D_2$.

Notamment: $\dim(V_1) \neq \dim(V_2) \Rightarrow L = 0$.

Preuve.
1. $L = 0$: trivial.
2. $L \neq 0$: À montrer: L bijectif
Idée: Montrer que

a) $\mathrm{Ker}(L) \subseteq V_1$ est un sous-espace invariant par rapport à D_1.
   D_1 irréductible $\Rightarrow \mathrm{Ker}(L) = \{\vec{0}\}$ et L injectif.

b) $\mathrm{Im}(L) \subseteq V_2$ est un sous-espace invariant par rapport à D_2.
   D_2 irréductible $\Rightarrow \mathrm{Im}(L) = V_2$ et L surjectif.

Ad a): Soit $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(L)$ (c.à.d., $L\vec{x} = \vec{0}$):

$$\forall g \in G : 0 = D_2(g)(L\vec{x}) = L(D_1(g)\vec{x}) \Rightarrow D_1(g)\vec{x} \in \mathrm{Ker}(L)\,.$$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(L) \subseteq V_1$ est un sous-espace invariant par rapport à D_1.
D_1 irréductible $\Rightarrow \mathrm{Ker}(L) = \{\vec{0}\} \vee \mathrm{Ker}(L) = V_1$.
$L \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}(L) = \{\vec{0}\} \Rightarrow L$ injectif. [Si $\mathrm{Ker}(L) = V_1 \Rightarrow \forall \vec{x} \in V_1 : L\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow L = 0$.]

Ad b): Soit $\vec{0} \neq \vec{y} \in \mathrm{Im}(L) \Rightarrow \exists \vec{0} \neq \vec{x} \in V_1$ avec $\vec{y} = L\vec{x}$:

$$\forall g \in G : D_2(g)\vec{y} = D_2(g)L\vec{x} = LD_1(g)\vec{x} \in \mathrm{Im}(L)\,.$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(L) \subseteq V_2$ est un sous-espace invariant par rapport à D_2.
D_2 irréductible $\Rightarrow \mathrm{Im}(L) = \{\vec{0}\} \vee \mathrm{Im}(L) = V_2$.
$\mathrm{Im}(L) \neq \{\vec{0}\}$ car L injectif $\Rightarrow \mathrm{Im}(L) = V_2 \Rightarrow L$ surjectif.

a) + b) $\Rightarrow L$ bijectif $\Rightarrow L$ inversible. $\square$

3.2 Le théorème fondamental d'orthogonalité

On discute dans ce paragraphe le théorème fondamental d'orthogonalité qui est de très grande importance pour les applications de la théorie des groupes en physique!

Théorème 3.3 (Théorème fondamental d'orthogonalité).
Soient V_μ et V_ν des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension n_μ et n_ν respectivement.
Soient $(V_\mu, D^{(\mu)})$ et $(V_\nu, D^{(\nu)})$ des irreps non-équivalentes d'un groupe fini G.

Les deux irreps satisfont:

$$\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g) D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1}) = \frac{|G|}{n_\mu}\delta^{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{rs}\,.$$

Si, en surcroît, $D^{(\mu)}$ et $D^{(\nu)}$ unitaires, on obtient

$$\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g)(D^{(\nu)}_{js}(g))^\star = \frac{|G|}{n_\mu}\delta^{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{rs}\,.$$

Remarques 3.1.

1. Le théoreme d'orthogonalité fournit des résultats pour:
   - deux irreps identiques ($\mu = \nu, \delta^{\mu\nu} = 1$).
   - deux irreps inéquivalentes ($\mu \neq \nu, \delta^{\mu\nu} = 0$).
2. Le cas de deux représentations équivalentes, non-identiques n'est pas specifié. (On pourrait dire $\delta^{\mu\nu}$ = indéterminé.)

La preuve utilise les deux lemmes de Schur.

Preuve. (Esquisse)
Étape 1: Soit $A : V_\nu \to V_\mu$ un opérateur linéaire quelconque.
On définit l'opérateur $B : V_\nu \to V_\mu$:

$$B := \sum_g D^{(\mu)}(g) A D^{(\nu)}(g^{-1})\,.$$

$\Rightarrow \forall h \in G : D^{(\mu)}(h)B = BD^{(\nu)}(h)$.
$\rightsquigarrow$ Schur:

1. $\mu \neq \nu$: $D^{(\mu)}$ et $D^{(\nu)}$ non-équivalentes $\Rightarrow B = 0$. (Schur 2)
2. $\mu = \nu$: $D^{(\mu)} \equiv D^{(\nu)} \Rightarrow B = \lambda I$. (Schur 1)

En résumé:

$$B^{\mu\nu} := B = \sum_g D^{(\mu)}(g) A D^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_A^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} I\,.$$

Étape 2: Choix de A:
$A_{rs} = 1$, $A_{ij} = 0$ sinon, c.à.d. $A_{lm} = \delta_{lr}\delta_{ms}$. $\lambda_A^{(\mu)} \equiv \lambda_{rs}^{(\mu)}$.

$$B_{ij}^{\mu\nu} = \sum_g D_{il}^{(\mu)}(g) A_{lm} D_{mj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{sj}^{(\nu)}(g^{-1}) = \lambda_{rs}^{(\mu)} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij}\,.$$

Étape 3: Déterminer $\lambda_{rs}^{(\mu)}$:
Poser $\mu = \nu$, contraction avec δ^{ij}:

$$\delta^{ij} B_{ij}^{\mu\mu} = \sum_g [D^{(\mu)}(g^{-1}) D^{(\mu)}(g)]_{sr} = |G|\delta_{rs} = \lambda_{rs}^{(\mu)} n_\mu \quad \Rightarrow \quad \lambda_{rs}^{(\mu)} = \frac{|G|}{n_\mu}\delta_{rs}\,.$$

$\square$

Discussion.

(i) Soit $|G|$=fini, V un espace vectoriel avec produit scalaire.
$\Rightarrow$ chaque rep. $(V, D) \sim (V, D')$ avec D' unitaire.
Sans restriction: $D^{(\mu)}$, $D^{(\nu)}$ unitaires et

$$\sum_g D_{ir}^{(\mu)}(g) (D_{js}^{(\nu)}(g))^\star = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}\,. \quad (*)$$

(ii) Posons $\mu = \nu$:
Pour ir fixe, $\vec{v}_{ir} := \{D_{ir}^{(\mu)}(g_1), \ldots, D_{ir}^{(\mu)}(g_{|G|})\}$ est un vecteur colonne de dim. $|G|$.
$\Rightarrow$ Le côté gauche de $(*)$ est un produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v}_{ir}$ et $\vec{v}_{js}$:

$$\langle \vec{v}_{ir}, \vec{v}_{js} \rangle = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs} \quad , \quad i, r, j, s = 1, \ldots, n_\mu = \dim(V_\mu)\,.$$

$\Rightarrow \exists n_\mu^2$ vecteurs $\vec{v}_{ir}$ mutuellement orthogonaux.

(iii) De même pour une autre irrep μ'.
$(*) \Rightarrow$ les vecteurs $\vec{v}_{ir}$ de différentes reps. sont orthogonaux: $\vec{v}_{ir}^{(\mu)} \perp \vec{v}_{jl}^{(\mu')}$.
Au total: On a $\sum_\mu n_\mu^2$ vecteurs $\vec{v}_{ir}^{(\mu)}$ mutuellement orthogonaux.
Par contre, il y a maximalement $|G|$ vecteurs dans un espace de dimension $|G|$ qui sont linéairement indépendants, c.à.d.:

$$\sum_\mu n_\mu^2 \leq |G| \quad \text{avec} \quad n_\mu \geq 1 \quad \forall \mu\,.$$

$\Rightarrow$ Le nombre d'irreps est donc limité!

(iv) En fait (2ème théorème de Burnside):

$$\sum_\mu n_\mu^2 = |G|\,.$$

Nous allons prouver ce résultat plus tard en utilisant la rep. regulière.

3.3 Orthogonalité de caractères

Définition 3.1 (Caractère)**.** Le **caractère** d'une représentation D d'un groupe G est l'ensemble $\chi = \{\chi(g)|g \in G\}$ où $\chi(g) = \mathrm{Tr}[D(g)]$ est le **caractère de l'élément** $g \in G$.

Remarques 3.2.

(i) Les éléments d'une classe de conjugaison ont le même caractère:

$$\mathrm{Tr}[D(gbg^{-1})] = \mathrm{Tr}[D(g)D(b)D(g^{-1})] = \mathrm{Tr}[D(b)D(g^{-1})D(g)] = \mathrm{Tr}[D(b)]\,.$$

(ii) Deux reps. équivalentes ont le même caractère.
$D^{(1)} \sim D^{(2)} \Leftrightarrow \exists S : D^{(1)} = SD^{(2)}(g)S^{-1}$. Par conséquent:

$$\mathrm{Tr}[D^{(1)}(g)] = \mathrm{Tr}[SD^{(2)}(g)S^{-1}] = \mathrm{Tr}[D^{(2)}(g)S^{-1}S] = \mathrm{Tr}[D^{(2)}(g)]\,.$$

(iii) D unitaire, c.à.d. $D^{-1} = D^\dagger = (D^\star)^T$
$\Rightarrow \chi(g^{-1}) = \mathrm{Tr}[D(g)^{-1}] = \mathrm{Tr}[D(g)^\dagger] = \mathrm{Tr}[(D(g)^\star)^T] = \mathrm{Tr}[D(g)^\star] = \chi^\star(g)$.
En fait, c'est *toujours* vrai pour les groupes finis/compacts parce qu'ils sont équivalents à une représentation unitaire.

Proposition 3.4 (Orthogonalité de caractères d'irreps inéquivalentes)**.**
Prémisses comme dans le Théoreme fondamental d'orthogonalité 3.3.
Les caractères satisfont:

$$\frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g^{-1}) = \delta^{\mu\nu}\,.$$

Si, en surcroît, les reps. sont unitaires, on obtient

$$\frac{1}{|G|}\sum_g \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g)^\star = \delta^{\mu\nu}\,.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sum_g D^{(\mu)}_{ir}(g)D^{(\nu)}_{sj}(g^{-1}) &= \frac{|G|}{n_\mu}\delta^{\mu\nu}\delta_{ij}\delta_{rs} \quad : \quad \text{Contraction avec } \delta_{ir}\delta sj \\
\sum_g \mathrm{Tr}[D^{(\mu)}(g)]\mathrm{Tr}[D^{(\nu)}(g^{-1})] &= \frac{|G|}{n_\mu}\delta^{\mu\nu}\delta_{rj}\delta_{jr} \\
\sum_g \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g^{-1}) &= \frac{|G|}{n_\mu}\delta^{\mu\nu}n_\mu = |G|\delta^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Pour une rep. unitaire $\chi^{(\nu)}(g^{-1}) = \chi^\nu(g)^\star$.

□

Remarques 3.3.

- Le côté gauche est un produit scalaire pour les caractères:

$$\langle\phi,\chi\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_g \phi(g)\chi(g^{-1}) = \langle\chi,\phi\rangle\,.$$

- Les caractères d'irreps inéquivalentes sont orthonormaux:

$$\langle\chi^{(\mu)},\chi^{(\nu)}\rangle = \delta^{\mu\nu}\,.$$

Corollaire. *Le nombre r d'irreps inéquivalentes $\leq$ Le nombre k de classes de conjugaison.*

Preuve.
Soient K_i, $i = 1, \dots, k$ les classes de conjugaison.
Soient $k_i = |K_i|$ le nombre d'éléments dans la classe K_i.
Les k_i éléments d'une classe ont le même caractère:

$$\forall g \in K_i : \chi(g) \equiv \chi_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{g \in K_i} \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g)^\star = k_i \chi_i^{(\mu)} (\chi_i^{(\nu)})^\star \,.$$

Les classes K_i partitionnent le groupe G: $\sum_{g\in G} = \sum_{i=1}^k \sum_{g \in K_i}$.

$$\Rightarrow \sum_g \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g)^\star = \sum_{i=1}^k k_i \chi_i^{(\mu)} (\chi_i^{(\nu)})^\star \,.$$

Le produit scalaire dans l'espace de dim. $|G|$ correspond à un produit scalaire dans un espace de dim. k ($i = 1, \dots, k$):

$$\langle \chi^{(\mu)}, \chi^{(\nu)} \rangle = \delta^{\mu\nu} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^k k_i \chi_i^{(\mu)} (\chi_i^{(\nu)})^\star =: \langle \tilde{\chi}^{(\mu)}, \tilde{\chi}^{(\nu)} \rangle$$

avec $\tilde{\chi}_i^{(\mu)} := \sqrt{k_i}\chi_i^{(\mu)}$, c.à.d., $\tilde{\chi}^{(\mu)} = \{\tilde{\chi}_1^{(\mu)}, \dots, \tilde{\chi}_k^{(\mu)}\}$ (pour les r irreps $\mu = 1, \dots, r$).

$\Rightarrow$ On a donc r vecteurs orthogonaux dans un espace k-dimensionnel.
$\Rightarrow r \leq k$. □

Remarques 3.4. En fait, $\boxed{r = k}$ parce que les caractères sont aussi orthonormaux par rapport à l'index i:

$$\frac{1}{|G|} \sum_\mu k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_j^{(\mu)\star} = \delta_{ij} \qquad \text{(1er théorème de Burnside)}$$

Attention: $\mu = \nu$ et on somme sur les irreps μ.
On peut ainsi définir k vecteurs orthogonaux d'un espace de dim. r:

$$\tilde{\chi}_i = \{\tilde{\chi}_i^{(\mu_1)}, \dots, \tilde{\chi}_i^{(\mu_r)}\} \quad , \quad (i = 1, \dots, k) \,.$$

$\Rightarrow k \leq r$.

Preuve (du 1er théorème de Burnside) voir M. Hamermesh, Group theory, Chap. 3-17.

Bilan:

- $r = k$ (Burnside 1)
- $\sum_{\mu=1}^{r} n_\mu^2 = |G|$ (Burnside 2)

3.3.1 La décomposition d'une représentation réductible

Soit G un groupe fini/compact. On a vu (voir théorème de Maschke) qu'une représentation réductible est entièrement réductible en une somme directe d'irreps:

$$D = \oplus_{\nu=1}^{k} a_\nu D^{(\nu)}\,,\; a_\nu \in \mathbf{N}_0$$

où $D^{(\nu)}$ sont des irreps de G. La même irrep peut apparaître plusieurs fois, c.à.d., $a_\nu > 1$ est possible.

Question: Comment determiner a_ν?

Théorème 3.5.

$$a_\nu = \langle \chi, \chi^{(\nu)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi(g)\chi^{(\nu)}(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} k_i \chi(g_i) {\chi^{(\nu)}}^*(g_i)$$

Preuve. $D = \oplus a_\mu D^{(\mu)} \overset{\text{Trace}}{\Rightarrow} \chi = \sum a_\mu \chi^{(\mu)} \overset{\text{Orthog.}}{\Rightarrow} a_\nu = \langle \chi, \chi^{(\nu)} \rangle = \langle \chi^{(\nu)}, \chi \rangle$. □

Remarques 3.5.

- Le caractère $\chi^{(\nu)}$ d'une irrep est appelé **caractère simple**.
- Sinon, on parle d'un **caractère composé**.

3.3.2 La représentation régulière

Soit G un groupe fini de l'ordre $|G| = n$: $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$. On peut considérer G comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel V_G de dimension $|G| = n$ avec base $\{|g_1\rangle, \ldots, |g_n\rangle\}$. On peut représenter G sur cet espace:

$$D : G \to GL(V_G, \mathbf{R})\,,\; D(g)(\sum_{i=1}^{n} a_i\, |g_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, |gg_i\rangle\;,$$

où $gg_i \in G$. Cette représentation (V_G, D) est appelée **représentation regulière**.

Remarques 3.6.

- D est un homomorphisme de groupes:

$$\forall \left|g_i\right\rangle \in V_G : D(gg')\left|g_i\right\rangle = \left|(gg')g_i\right\rangle = \left|g(g'g_i)\right\rangle = D(g)\left|g'g_i\right\rangle = D(g)D(g')\left|g_i\right\rangle$$
$$\Rightarrow D(gg') = D(g)D(g')$$

- La multiplication à gauche gg_i $(i = 1, \ldots, n)$ correspond à une permutation des n éléments de G: $gg_i = g_{\pi^g(i)}$ avec la permutation $\pi^g \in S_n$. $\Rightarrow \left|g_i\right\rangle \mapsto \left|gg_i\right\rangle = \left|g_{\pi^g(i)}\right\rangle$. (Voir discussion du théorème de Cayley et la table de multiplication).

- En tant que matrices: $D(g)\left|g_i\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} D(g)_{ji}\left|g_j\right\rangle = \left|gg_i\right\rangle = \left|g_{\pi^g(i)}\right\rangle \Rightarrow$

$$D(g)_{ji} = \begin{cases} 1 & j = \pi^g(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

  c.à.d., chaque colonne et chaque ligne de la matrice contient exactement une 1 et 0 sinon. Par conséquent, $\det(D(g)) = \pm 1$.

- $D(e) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n=|G|}) \Rightarrow \mathrm{Tr}(D(e)) = |G| = \chi(e)$.

- $g \neq e : D(g)_{ii} = 0$ $(i = 1, \ldots, n) \Rightarrow \mathrm{Tr}(D(g)) = 0 = \chi(g)$.

- La représentation regulière peut être considéré comme un "regard dans le miroir" car le groupe est représenté sur soi-même. (C'est similaire à la représentation adjointe d'une algèbre de Lie. (Voir chap. 5.))

Exemple 3.1. $C_3 = \{e, c, c^2\}, c^3 = e, |C_3| = 3$.
V_G: base $\{\left|e\right\rangle, \left|c\right\rangle, \left|c^2\right\rangle\} = \{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$.

$$D(c)\left|e\right\rangle = \left|ce\right\rangle = \left|c\right\rangle,\ D(c)\left|c\right\rangle = \left|cc\right\rangle = \left|c^2\right\rangle,\ D(c)\left|c^2\right\rangle = \left|c^3\right\rangle = \left|e\right\rangle$$
$$\Rightarrow D(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ D(c^2) = D(c)D(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous n'en avons pas besoin dans cet exemple, mais pour être complet:

$$\pi^c(1) = 2, \pi^c(2) = 3, \pi^c(3) = 1, \Rightarrow \pi^c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.3 Décomposition de la représentation régulière

$|G| = \text{fini} \Rightarrow D = \oplus_\nu a_\nu D^{(\nu)}$.
Coefficients: $a_\mu = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi(g)\chi^{(\mu)}(g^{-1})$ avec $\chi(e) = |G|, \chi(g \neq e) = 0$ pour la représentation régulière.

$\Rightarrow \boxed{a_\mu = \frac{1}{|G|}|G|\chi^{(\mu)}(e) = \chi^{(\mu)}(e) = n_\mu \Rightarrow \chi(g) = \sum_\nu n_\nu \chi^{(\nu)}(g)}$.

- Pour $g = e$: $\Rightarrow \chi(e) = |G| = \sum_\nu n_\nu^2$ car $\chi^{(\nu)}(e) = n_\nu$. $\Rightarrow \boxed{|G| = \sum_\nu n_\nu^2}$.
  On vient de montrer le 2ème théorème de Burnside.

- Pour $g \neq e$: $\chi(g) = 0 = \sum_\nu n_\nu \chi^{(\nu)}(g) = \sum_\nu \chi^{(\nu)}(e)\chi^{(\nu)}(g)$ car $n_\nu = \chi^{(\nu)}(e)$.

- Ensemble:

$$\frac{1}{|G|}\sum_\nu \chi^{(\nu)}(e)\chi^{(\nu)}(g) = \begin{cases} 0 & g \neq e \\ 1 & g = e \end{cases}.$$

  C'est un cas particulier du 1er théorème de Burnside qui correspond au produit scalaire de la colonne 'i' avec la colonne 'j' de la table des caractères:

$$\frac{1}{|G|}\sum_\nu k_i \chi_i^{(\nu)} \chi_j^{(\nu)*} = \delta_{ij} \qquad \text{(Burnside 1)},$$

  car pour $\chi_e^{(\nu)}$ on a $k_e = 1$ (car la multiplicité de la classe de conjugaison de l'élément neutre $[e] = \{e\}$ est 1).
  Le cas particulier que nous avons démontré correspond au produit scalaire avec la première colonne.

3.3.4 Critère de Frobenius pour irréductibilité

Proposition 3.6 (Frobenius)**.** *Soit G un groupe fini. D une représentation de dimension finie avec caractère χ. Dans ce cas: D irréductible $\Leftrightarrow \langle\chi, \chi\rangle = 1$*

Preuve.

"$\Rightarrow$": Trivial avec l'orthogonalité des caractères simples: $\langle\chi^{(\mu)}, \chi^{(\nu)}\rangle = \delta^{\mu\nu}$.

"$\Leftarrow$": $D = \oplus_\mu a_\mu D^{(\mu)} \Rightarrow \chi(g) = \sum_\mu a_\mu \chi^{(\mu)}(g)$
$\Rightarrow \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{\mu,\nu} a_\mu{}^* a_\nu \langle \chi^{(\mu)}, \chi^{(\nu)} \rangle = \sum_\mu |a_\mu|^2 = 1.$
$\forall \mu : a_\mu \in \mathbf{N}_0 \Rightarrow \exists \bar{\mu} : a_{\bar{\mu}} = 1$ et $a_\mu = 0$ sinon. $\Rightarrow D = D^{(\bar{\mu})}$ irréductible. □

3.4 Construction d'une table de caractères

Soit G un groupe fini de l'ordre $|G|$. On a la décomposition $D = \oplus_\nu a_\nu D^{(\nu)}, \chi = \sum_\nu a_\nu \chi^{(\nu)}$. Il faut alors connaître les caractères simples $\chi^{(\nu)}$ du groupe.

Outils: pour construire $\chi^{(\nu)}$

(1) # irreps = # classes de conjugaison: $r = k$ (Burnside 1)

(2) $\sum_\mu n_\mu^2 = |G|$ (Burnside 2)

(3) $\langle \tilde{\chi}^{(\mu)}, \tilde{\chi}^{(\nu)} \rangle = \delta^{\mu\nu} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{k} k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*}$ (Orthogonalité lignes)

(4) $\frac{1}{|G|} \sum_{\mu=1}^{5} k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_j^{(\mu)*} = \delta_{ij}$ (Orthogonalité colonnes)

(5) Toute autre information utile.

- Par exemple, pour les groupes abéliens, toutes les irreps sont 1-dimensionelles: $\forall \mu : n_\mu = 1$. (Démonstration en bas.)
- $n_\mu = 1 \Rightarrow \chi^{(\mu)}(g) = D^{(\mu)}(g) \Rightarrow \chi^{(\mu)}(gg') = \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\mu)}(g')$
- **Toujours** $\chi^{(\mu)}(e) = n_\mu$.
- $D^{(1)}$ est **toujours** la représentation triviale: $n_1 = 1$, $\chi^{(1)}(g) = 1 \quad \forall g \in G$.

Démonstration que les groupes abéliens ont des irreps de dimension 1.
C'est une conséquence du lemme de Schur. Soit D une irrep de G de dimension n et supposons que $n > 1$. G abélien $\Rightarrow \forall g, g' \in G : [D(g'), D(g)] = 0 \overset{\text{Schur 1}}{\Rightarrow} \forall g \in G : D(g) \propto \hat{I}_n$ où $\hat{I}_n$ est la matrice d'unité en n dimensions. $\Rightarrow D$ est décomposable en contradiction avec la prémisse que D est irréductible. Alors, $n = 1$. □

Exemple 3.2 (Table de caractères de C_3).

- C_3 abélien $\Rightarrow r = k = |C_3| = 3$, $n_\mu = 1$ pour $\mu = 1, 2, 3$.
- Les $k = 3$ classes de conjugaison: $[e] = \{e\}$, $[c] = \{c\}$, $[c^2] = \{c^2\}$.

C_3	$[e]$	$[c]$	$[c^2]$
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1		
$D^{(3)}$	1		

- $n_\mu = 1 \Rightarrow \chi^{(\mu)}(gg') = \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\mu)}(g')$ (en supprimant l'index 'μ'):
  $\chi(c^2) = \chi(c)^2$ et $\chi(c^3) = \chi(c)^3 = \chi(e) = 1 \Rightarrow \chi(c) \in \{1, e^{2\pi i/3} =: \omega, \omega^2\}$.
  Choix: $\chi^{(2)}(c) = \omega \Rightarrow \chi^{(2)}(c) = \omega^2$. Il reste $\chi^{(3)}(c) = \omega^2 \Rightarrow \chi^{(3)}(c^2) = \omega^4 = \omega$.

C_3	$[e]$	$[c]$	$[c^2]$
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	ω	ω^2
$D^{(3)}$	1	ω^2	ω

  - $D^{(1)}$ est la représentation triviale. En cristallographie $D^{(1)} \equiv A$.
  - $D^{(3)} = D^{(2)*}$. Ils ont souvent les mêmes niveaux d'énergie (lorsqu'on ne peut pas distinguer i et $-i$). Par conséquent, ils sont souvent considérés comme une représentation 2-dimensionelle, appelée E.

- $D^{(i)} : C_3 \to \mathrm{GL}(1, \mathbf{C})$ fidèle $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(D^{(i)}) = \{e\}$.
  Le noyau est toujours un sous-groupe normal $\Rightarrow \mathrm{Ker}(D^{(i)}) \lhd C_3$. Par contre, C_3 n'a pas de sous-groupes propres $\Rightarrow \mathrm{Ker}(D^{(i)}) = \{e\}$ ou $\mathrm{Ker}(D^{(i)}) = C_3$.
  - Évidemment $\mathrm{Ker}(D^{(1)}) = C_3$.
  - $\mathrm{Ker}(D^{(2)}) = \mathrm{Ker}(D^{(3)}) = \{e\}$ car $\chi^{(i)}(c) = D^{(i)}(c) \neq 1 \Rightarrow c \neq \mathrm{Ker}(D^{(i)})$, $(i = 1, 2)$. $D^{(2)}$ et $D^{(3)}$ sont alors fidèles.

- Vérifier l'orthonormalité des lignes:

$$\begin{aligned}
\langle \chi^{(1)}, \chi^{(2)} \rangle &= \frac{1}{|C_3|} \sum_g \chi^{(1)}(g) \chi^{(2)}(g)^* = \frac{1}{3}(1 * 1^* + 1 * \omega^* + 1 * \omega^{2*}) \\
&= \frac{1}{3}(1 + \omega^2 + \omega) = 0 \\
\text{car} \quad 0 &= \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2), \omega \neq 1 \Rightarrow 1 + \omega + \omega^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

  De même: $\langle \chi^{(1)}, \chi^{(3)} \rangle = \langle \chi^{(2)}, \chi^{(3)} \rangle = 0$, $\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \langle \chi^{(3)}, \chi^{(3)} \rangle = 1$.

- Orthonormalité des colonnes automatique car la table des caractères de C_3 est symétrique par rapport à la diagonale ($\leftrightarrow$ groupe abélien).

- Décomposition de la représentation vectorielle $D^{(V)} = a_1 D^{(1)} \oplus a_2 D^{(2)} \oplus a_3 D^{(3)}$: $D^{(V)} : C_3 \to \mathrm{GL}(3, \mathbf{C})$ est la restriction de la représentation vectorielle de SO(3) au sous-groupe $C_3 < \mathrm{SO}(3)$.

$$D^{(V)}(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D^{(V)}(c) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D^{(V)}(c^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices correspondent à des matrices de rotation autour de l'axe z:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(3)$$

par des angles $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$.
Le caractère (rappel: $\chi^{(V)}(g) = \mathrm{Tr}[D^{(V)}(g)]$):

$$\chi^{(V)} = \{\chi^{(V)}(e), \chi^{(V)}(c), \chi^{(V)}(c^2)\} = \{3, 0, 0\} \stackrel{!}{=} a_1\chi^{(1)} + a_2\chi^{(2)} + a_3\chi^{(3)}, \; (a_\nu \in \mathbf{N}_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 1\,.$$

Alternativement, on peut utiliser le produit scalaire pour trouver les coefficients de la décomposition: $a_\nu = \langle \chi^{(V)}, \chi^{(\nu)} \rangle = \frac{1}{3}(3\chi^{(\nu)}(e)) = 1$.

$\Rightarrow \boxed{D^{(V)} = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)}}$.

  - Test: a_1, a_2, a_3 sont bien des nombres entiers $(0, 1, 2, 3, \ldots)$.
  - Test: $\dim D^{(V)} = 3 = \dim D^{(1)} + \dim D^{(2)} + \dim D^{(3)} = 1 + 1 + 1$.

- Sous-espaces invariants:

  - $\forall D^{(V)}(g) : z \mapsto z \Rightarrow$ La restriction de $D^{(V)}$ sur z (où plutôt $z\vec{e}_z$) est l'identité, c.à.d., la représentation triviale $D^{(1)}$.

– TD 3.1 (avec $e^{i\theta} = \omega$ et $e^{-i\theta} = \omega^2$):

$$D^{(V)}(c)(x+iy) = \omega(x+iy)\,,\ D^{(V)}(c^2)(x+iy) = \omega^2(x+iy)\ \Rightarrow D^{(V)}_{|(x+iy)} = D^{(2)}\,,$$
$$D^{(V)}(c)(x-iy) = \omega^2(x-iy)\,,\ D^{(V)}(c^2)(x-iy) = \omega(x-iy)\ \Rightarrow D^{(V)}_{|(x-iy)} = D^{(3)}\,.$$

- Résumé:

	C_3	$[e]$	$[c]$	$[c^2]$	
A	$D^{(1)}$	1	1	1	z
E	$D^{(2)}$	1	ω	ω^2	$x+iy$
	$D^{(3)}$	1	ω^2	ω	$x-iy$

Exemple 3.3 (Table de caractères de D_3)**.**

- $|D_3| = 6$ et il y a $k = 3$ classes de conjugaison: $K_1 = \{e\}$, $K_2 = \{c, c^2\}$, $K_3 = \{b, bc, bc^2\}$.
- Il y a $r = k = 3$ irreps.
- $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 6$ avec $n_1 = 1$ (toujours, car $D^{(1)}$ est la représentation triviale).
$\Rightarrow n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 2$
- $\chi^{(\mu)}(e) = n_\mu \Rightarrow$ 1ère colonne. $\chi^{(1)}(g) = 1\,\forall g \in D_3 \Rightarrow$ 1ère ligne:

D_3	K_1	K_2	K_3
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1		
$D^{(3)}$	2		

- $n_i = 1$ pour $i = 1, 2 \Rightarrow \chi^{(i)}(g) = D^{(i)}(g)$, $\chi^{(i)}(g_1 g_2) = \chi^{(i)}(g_1)\chi^{(i)}(g_2)$ et aussi $\chi^{(i)}(g) \neq 0$ (sinon $\chi^{(i)}(gg^{-1}) = \chi^{(i)}(g)\chi^{(i)}(g^{-1}) = 1$ serait impossible). Cela implique (sachant que les caractères des représentants d'une classe sont identiques):
  - $\chi_3^{(i)} = \chi^{(i)}(b) = \chi^{(i)}(bc) = \chi^{(i)}(b)\chi^{(i)}(c) \Rightarrow \chi^{(i)}(c) = \chi_2^{(i)} = 1$ $(i = 1, 2)$.
  - $[\chi^{(i)}(b)]^2 = \chi^{(i)}(b^2) = \chi^{(i)}(e) = 1 \Rightarrow \chi_3^{(i)} = \pm 1$.
  $\chi_3^{(1)} = +1$ (repr. triviale) et, par conséquent, $\chi_3^{(2)} = -1$. ($\chi_3^{(2)} = 1$ n'est pas possible car sinon $\chi^{(1)} = \chi^{(2)}$ en contradiction avec l'orthogonalité des caractères simples.)

D_3	K_1	K_2	K_3
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1
$D^{(3)}$	2	α	β

- On peut déterminer α et β en utilisant l'orthonormalité des caractère simples (lignes et/ou colonnes):

$$\langle\chi^{(1)},\chi^{(3)}\rangle = 0 = \frac{1}{6}[1\cdot 1\cdot 2^* + 2\cdot 1\cdot \alpha^* + 3\cdot 1\cdot \beta^*]\,,$$
$$\langle\chi^{(2)},\chi^{(3)}\rangle = 0 = \frac{1}{6}[1\cdot 1\cdot 2^* + 2\cdot 1\cdot \alpha^* - 3\cdot 1\cdot \beta^*]\,.$$

  Ici, le premier facteur dans les trois expressions entre les crochets est la mulitplicité des classes K_1, K_2 et K_3!
  La solution est: $\alpha^* = -1 = \alpha$ et $\beta^* = 0 = \beta$.

D_3	K_1	K_2	K_3
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	1	-1
$D^{(3)}$	2	-1	0

- Notations:

  - $K_1 \equiv E$, $K_2 \equiv 2C_3$ (car $C_3 =< c >$, $C_3 =< c^2 >$), $K_3 = 3C_2$ (car $C_2 =< b >=< bc >=< bc^2 >$).
  - Cristallographie: $D^{(1)} \equiv A_1$, $D^{(2)} \equiv A_2$, $D^{(3)} \equiv E$.
    (Les irreps avec dim = 1 sont nommeés 'A', celles avec dim = 2 'E'; celles avec dim = 3 'T'.)

- Décomposition de la représentation vectorielle $D^{(V)} = a_1D^{(1)} \oplus a_2D^{(2)} \oplus a_3D^{(3)}$:
  $D^{(V)}(e)$ et $D^{(V)}(c)$ sont comme dans l'exemple précédent. Sans restriction, on peut considérer 'b' comme une rotation (de π) autour de l'axe x:

$$D^{(V)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

$$\Rightarrow \quad \chi^{(V)} = \{\chi^{(V)}(e), \chi^{(V)}(c), \chi^{(V)}(b)\} = \{3, 0, -1\} = a_1\chi^{(1)} + a_2\chi^{(2)} + a_3\chi^{(3)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1\,.$$

Alternativement:

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle\chi^{(V)}, \chi^{(1)}\rangle = \frac{1}{6}[1 \cdot 3 \cdot 1^* + 2 \cdot 0 \cdot 1^* + 3 \cdot (-1) \cdot 1^*] = 0\,, \\ a_2 &= \langle\chi^{(V)}, \chi^{(2)}\rangle = \frac{1}{6}[1 \cdot 3 \cdot 1^* + 2 \cdot 0 \cdot 1^* + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)^*] = 1\,, \\ a_3 &= \langle\chi^{(V)}, \chi^{(3)}\rangle = \frac{1}{6}[1 \cdot 3 \cdot 2^* + 2 \cdot 0 \cdot (-1)^* + 3 \cdot (-1) \cdot 0] = 1\,. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{D^{(V)} = D^{(2)} \oplus D^{(3)} = A_2 \oplus E}.$$

- Sous-espaces invariants:
  - $D^{(V)}(c) : z \mapsto z$, $D^{(V)}(b) : z \mapsto -z \Rightarrow D^{(V)}_{|z} = D^{(2)}$, c.à.d. z une base de $D^{(2)} \equiv A_2$.
  - Par conséquent x, y une base de $D^{(3)} \equiv E$.
- <u>Résumé:</u>

	D_3	E	$2C_3$	$3C_2$	
A_1	$D^{(1)}$	1	1	1	
A_2	$D^{(2)}$	1	1	-1	z
E	$D^{(3)}$	2	-1	0	x, y

3.5 Décomposition Clebsch-Gordan

Soit G un groupe fini. $(V_\mu, D^{(\mu)})$, $(V_\nu, D^{(\nu)})$ des irreps de G.

On avait introduit le produit tensoriel intérieur en Déf. 2.11 comme restriction de $(V_\mu \otimes V_\nu, D^{(\mu)} \otimes D^{\nu)})$ sur le sous-groupe groupe diagonal $G' = \{(g, g)|g \in G\} < G \times G$:

$$D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)} \equiv D^{(\mu\times\nu)}\,,\; D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)}(g) = D^{(\mu)}(g) \otimes D^{(\nu)}(g)\,.$$

On a:

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \mathrm{Tr}(A) \cdot \mathrm{Tr}(B) \Rightarrow \chi^{(\mu\times\nu)}(g) = \chi^{(\mu)}(g)\chi^{(\nu)}(g)\,.$$

En général, le produit tensoriel *intérieur* est une représentation réductible du groupe $G \simeq G'$ et sa réduction en représentations irréductibles de G s'appelle **décomposition Clebsch-Gordan**:

$$\boxed{D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)}(g,g) = \oplus a_\sigma D^{(\sigma)}(g) \text{ avec } a_\sigma = \langle \chi^{(\mu\times\nu)}, \chi^{(\sigma)} \rangle = \langle \chi^{(\mu)}\chi^{(\nu)}, \chi^{(\sigma)} \rangle}\,.$$

Exemple 3.4. Groupe D_3. Produit tensoriel intérieur $E \otimes E$.

$E \equiv D^{(3)}$ est une irrep. 2-dimensionelle de D_3 (voir Exemple 3.3).

$$\begin{aligned} D^{(3\times3)} &= D^{(3)} \otimes D^{(3)} = a_1 D^{(1)} + a_2 D^{(2)} + a_3 D^{(3)}\,, \\ \chi^{(1)} &= \{1,1,1\}\,,\ \chi^{(2)} = \{1,1,-1\}\,,\ \chi^{(3)} = \{2,-1,0\}\,, \\ \chi^{(3\times3)} &= \chi^{(3)}\chi^{(3)} = \{4,1,0\}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle \chi^{(3\times3)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{6}[1\cdot4\cdot1 + 3\cdot1\cdot1 + 3\cdot0\cdot1] = 1 \\ a_2 &= \langle \chi^{(3\times3)}, \chi^{(2)} \rangle = \ldots = 1 \\ a_3 &= \langle \chi^{(3\times3)}, \chi^{(3)} \rangle = \ldots = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^{(3)} \otimes D^{(3)} = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)}\,,\ \text{ou}\ E \otimes E = A_1 \oplus A_2 \oplus E\,.$$