Chapitre 2

Représentations de groupes

2.1 Introduction

Rappel:

- Le groupe général linéaire: $\mathrm{GL}(V) = \{A|A$ opérateur bijectif et linéaire sur V$\}$:

  $$D(g) := V \to V, D(g)(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = aD(g)(\vec{v}_1) + bD(g)(\vec{v}_2)\ a, b \in \mathbf{K}\,.$$

  Pour un espace vectoriel n-dimensionnel $\mathrm{GL}(V)$ est l'ensemble des matrice $n \times n$ inversibles.

- Définition 1.5:
  Une **représentation linéaire du groupe** G **sur le K-espace vectoriel** V est un homomorphisme de groupe $D : G \to \mathrm{GL}(V, \mathbf{K})$:

  $$\forall g_1, g_2 \in G : D(g_1 g_2) = D(g_1)D(g_2)\,.$$

Notions:

- La représentation est l'homomorphisme D ou le couple (V, D).
  (On dit aussi incorrectement que l'espace vectoriel V est une représentation de G.)

- V est appelé **espace support** ou G**-module**.

- $\dim(V)$ est la **dimension** ou le **degré** de la représentation.

- Une représentation D est **fidèle** $:\Leftrightarrow$ D est injectif.

Exemple 2.1. Groupe: $C_3 = \{e, c, c^2\}, c^3 = e$. Espace vectoriel: $V = \mathbf{R}^2$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$). L'élément c correspond à une rotation par $\theta = \frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $\vec{e}_z$. En coordonnées polaires:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} c_\theta c_\phi - s_\theta s_\phi \\ s_\theta c_\phi + c_\theta s_\phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x' &= r(c_\theta x - s_\theta y)\,, \\ y' &= r(s_\theta x + c_\theta y)\,. \end{aligned}$$

Une rotation (active) par $\theta \in [0, 2\pi]$ autour de l'axe $\vec{e}_z$ est alors donnée par:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)\,.$$

L'action de $R(\theta)$ sur le $\mathbf{R}^2$ est donnée par $\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R(\theta)\,\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Pour $D : C_3 \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^2)$, $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$:

$$D(e) = R(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , D(c) = R(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} , D(c^2) = R(\frac{4\pi}{3}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Exercices:

- Vérifiez: $D(c^2) = (D(c))^2, D(c^3) = (D(c))^3 = D(e)$.

- Considérez les cas $V = \mathbf{R}^3$ et $V = \mathbf{R}$.

2.2 Représentations équivalentes

Définition 2.1. Deux reps. (V_1, D_1) et (V_2, D_2) d'un groupe G sont **équivalentes** $:\Leftrightarrow$ $\exists$ opérateur linéaire bijectif $S : V_1 \to V_2$ (un isomorphisme **K**-linéaire) tel que

$$\forall g \in G : SD_1(g)S^{-1} = D_2(g)\,.$$

Remarques 2.1.

1. S est indépendant de $g \in G$. La bijectivité de S implique $\dim V_1 = \dim V_2$.
2. Cette définition fournit une relation d'équivalence: $D_1 \sim D_2$ si $D_2 = SD_1S^{-1}$.
3. Classification de représentations:
   - Deux reps. équivalentes sont considérées comme essentiellement pareilles.
   - On compte les classes d'équivalence $\Rightarrow$ Partition de l'ensemble de reps.
   - La définition est consistante avec la propriété $D_i(gg') = D_i(g)D_i(g')$:

$$\begin{aligned} SD_1(gg')S^{-1} &= SD_1(g)D_1(g')S^{-1} = SD_1(g)S^{-1}SD_1(g')S^{-1} \\ &= D_2(g)D_2(g') = D_2(gg')\,. \end{aligned}$$

Exemple simple: $V_1 = V_2 = V$, chagement de base.

2.3 Représentations réductibles et irréductibles

Définition 2.2. Soit V un espace vectoriel. $T : V \to V$ un opérateur linéaire.
Un sous-espace $U \subset V$ est **invariant par rapport à** T $:\Leftrightarrow \forall u \in U : Tu \in U$.

Définition 2.3. Soit (V, D) une représentation linéaire.

- Un sous-espace $U \subset V$ est dit **invariant par rapport à** D $:\Leftrightarrow \forall g \in G : \forall u \in U : D(g)u \in U$.

- Une rep. (V, D) est **réductible** $:\Leftrightarrow$ $\exists$ sous-espace $U \subset V, U \neq \{0\}, U \neq V$: U invariant par rapport à D.

- Une rep. est dite **irréductible** si elle n'est pas réductible.

Remarques 2.2. But: trouver et classifier les reps. irréductibles (irreps) d'un groupe.

Proposition 2.1. *Soit (V, D) une rep. n-dim. d'un groupe G. Soit $U \subset V$ un sous-espace m-dim., invariant par rapport à D. Dans ce cas:*
D réductible $\Leftrightarrow$ $\exists$ base de V: $\forall g \in G : D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & \alpha(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$
avec

- *(U, D_1) une rep. m-dim.*

- *$(V \setminus U, D_2)$ une rep. $(n-m)$-dim.*

- *$\alpha(g) : V \setminus U \to U$ une matrice $m \times (n-m)$.*

Preuve.

"$\Rightarrow$": Choisissons une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V avec $\{e_1, \ldots, e_m\}$ une base de U.

$$\Rightarrow D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & \alpha(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} .$$

[Avec cette base $\vec{v} \in V, \vec{v} = (v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)^T = (\vec{u}, \vec{w})^T$.
En toute généralité, $D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & \alpha(g) \\ \beta(g) & D_2(g) \end{pmatrix}$. Le sous-espace U est invariant, c.à.d., $\forall \vec{u} \in U : D(g) \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(g)\vec{u} \\ \beta(g)\vec{u} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \vec{u}' \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ avec $\vec{u}' \in U$. Par conséquent $\beta(g) = 0$.]

$D(g)$ est une représentation:

$$\begin{aligned} D(g_1)D(g_2) &= \begin{pmatrix} D_1(g_1) & \alpha(g_1) \\ 0 & D_2(g_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1(g_2) & \alpha(g_2) \\ 0 & D_2(g_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1(g_1)D_1(g_2) & D_1(g_1)\alpha(g_2) + \alpha(g_1)D_2(g_2) \\ 0 & D_2(g_1)D_2(g_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \quad D(g_1g_2) = \begin{pmatrix} D_1(g_1g_2) & \alpha(g_1g_2) \\ 0 & D_2(g_1g_2) \end{pmatrix} .$$

$$\Rightarrow \quad D_1(g_1)D_1(g_2) = D_1(g_1g_2) \quad \text{représentation de dim. m}$$
$$D_2(g_1)D_2(g_2) = D_2(g_1g_2) \quad \text{représentation de dim. n-m}$$
$$\text{Mais: } \alpha(g_1g_2) \neq \alpha(g_1)\alpha(g_2)$$

"$\Leftarrow$": Soit $D(g)$ de la forme $D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & \alpha(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$. $\Rightarrow \{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T\} =: U$ est invariant par rapport à D. □

Remarques 2.3.

- Dans le cas $|G|$ =fini (ou G compact), on peut choisir $\alpha = 0$ (voir Théorème de Maschke plus tard).
  Dans ce cas D **entièrement réductible** ou **décomposable**
  $$D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} .$$
  (voir plus tard pour la somme directe de deux opérateurs)
- D_1, D_2 peuvent eux-mêmes être décomposables. On peut continuer la décomposition jusqu'au moment où on trouve des représentations irréductibles (irreps). Le processus aboutit à une décomposition en somme directe d'irreps.

2.4 La somme directe de représentations

Définition 2.4. Un espace vectoriel V est la **somme directe** de sous-espaces $V_1, \ldots, V_n$

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

si

1. $V = \{\vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n | \vec{v}_1 \in V_1, \ldots, \vec{v}_n \in V_n\}$
2. $\vec{v}_i \in V_i, \vec{v}_i \neq 0$ sont linéairement indépendants

Remarques 2.4. $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n \Rightarrow \vec{v} \in V$ a une decomposition *unique* comme $\vec{v} = \vec{v}_1 + \ldots + \vec{v}_n\,, \vec{v}_i \in V_i$.

Exemple 2.2. La somme directe de deux représentations
Soit $V = V_1 \oplus V_2$ et $T_i : V_i \to V_i$ $(i = 1, 2)$ des opérateurs linéaires.
On définit $T \equiv T_1 \oplus T_2 : V \to V$, avec $T\vec{v} = T(\underbrace{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}_{\text{unique}}) := T_1\vec{v}_1 + T_2\vec{v}_2,\ \vec{v} \in V, \vec{v}_i \in V_i$.

Soient (V_i, D_i) deux représentations d'un groupe G.
$\Rightarrow D = D_1 \oplus D_2 = \{D(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) | g \in G\}$ est une représentation sur $V = V_1 \oplus V_2$:

$$\begin{aligned} D(g_1)D(g_2)\vec{v} &= D(g_1)(D_1(g_2)\vec{v}_1 + D_2(g_2)\vec{v}_2) = D_1(g_1)D_1(g_2)\vec{v}_1 + D_2(g_1)D_2(g_2)\vec{v}_2 \\ &= D_1(g_1g_2)\vec{v}_1 + D_2(g_1g_2)\vec{v}_2 = D(g_1g_2)\vec{v}\,. \end{aligned}$$

Pour des espaces vectoriels de dimension finie, $\dim(V_1) = m, \dim(V_2) = n$ on peut choisir une base de V tel que la matrice $D(g)$ prend une forme diagonale en bloques:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$$

Définition 2.5. Soit (V, D) une représentation réductible avec sous-espace invariant V_1.
Une rep. (V, D) est **entièrement réductible** ou **decomposable** $:\Leftrightarrow$
$\exists$ sous-espace invariant V_2 tel que: $V = V_1 \oplus V_2$ et $D = D_1 \oplus D_2$ ou $D_i = D_{|V_i}$.

2.5 Représentations unitaires

Unitaire $\leftrightarrow$ Mécanique Quantique

<u>Rappel:</u> Produit scalaire $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbf{C}$:

(S_1) $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})^*$ (Hermiteité, Symétrie)

(S_2) $(\vec{w}, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\vec{w}, \vec{u}) + \beta(\vec{w}, \vec{v})$ (Linéarité)

(S_3) $\underbrace{(\vec{u}, \vec{u})}_{\in \mathbf{R}\ (S_1)} \geq 0$ et $(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0$ (Positivité)

Exemple 2.3.

- $\mathbf{R}^3 : \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \in \mathbf{R}$
- $\mathbf{C}^3 : \vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i^* v_i \in \mathbf{C}$
- $[\infty]$HS: $(\psi, \phi) = \int d^3x \, \psi^*(\vec{x})\phi(\vec{x})$

Définition 2.6. Soit V un espace vectoriel avec produit scalaire $(\ ,\ )$.
Un opérateur linéaire $T : V \to V$ est **unitaire** $:\Leftrightarrow \forall \vec{u}, \vec{v} \in V : (T\vec{u}, T\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

Remarques 2.5.

- Pour un opérateur unitaire et inversible T: $(T\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, T^{-1}\vec{v})$.
  L'opérateur adjoint $T^\dagger$ satisfait $(T\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, T^\dagger \vec{v}) \Rightarrow T^\dagger = T^{-1}$ ou $TT^\dagger = \mathbb{1}$.
- Sous forme de matrices par rapport à une base orthonormée (BON) $\{\vec{e}_i\}$ on a des matrices unitaires $D^\dagger = D^{-1}$ avec $D^\dagger = D^{*T}$.

Définition 2.7 (Rep. unitaire)**.** Soit V un espace vectoriel avec produit scalaire $(\ ,\ )$.
Une représentation (V, D) est **unitaire** $:\Leftrightarrow \forall g \in G : D(g)$ est unitaire.

Proposition 2.2. *Une représentation unitaire est entièrement réductible.*

Preuve. Soit (V, D) une représentation unitaire et réductible avec $U \subset V, U \neq \{0\}, U \neq V$ un sous-espace invariant.

- $U^\perp := \{\vec{w} \in V | (\vec{w}, \vec{u}) = 0 \ \forall \vec{u} \in U\}$.
- Algèbre linéaire:
  - Le complément orthogonal $U^\perp$ de U est aussi un sous-espace propre de V: $U^\perp \subset V, U^\perp \neq \{0\}, U^\perp \neq V$.
  - V est la somme directe de U et $U^\perp$: $V = U \oplus U^\perp$.
- À montrer: $U^\perp$ est un sous-espace invariant.
  Dans ce cas D est entièrement réductible (voir Déf. 2.5).

Soit $\vec{w} \in U^\perp, \vec{u} \in U$.

- D unitaire $\Rightarrow (D(g)\vec{w},\vec{u}) = (\vec{w}, D^{-1}(g)\vec{u}) = (\vec{w}, \underbrace{D(g^{-1})\vec{u}}_{=\vec{u}'\in U}) = 0 \ \forall \vec{u} \in U$.

  Ici, $D(g^{-1})\vec{u} \in U$ car U est un sous-espace invariant par rapport à D.

- $\forall g \in G : \forall \vec{u} \in U : (D(g)\vec{w},\vec{u}) = 0 \Rightarrow \forall g \in G : D(g)\vec{w} = \vec{w}' \in U^{\perp}$.

$U^{\perp}$ est donc un sous-espace invariant par rapport à D. □

Théorème 2.3 (Maschke)**.** *Les représentations réductibles* (T,V) *d'un groupe fini sont entièrement réductibles.*

Preuve.

- Prop. 2.2: Une rep. unitaire est entièrement réductible.
- À montrer:
  1. On peut toujours choisir un produit scalaire, tel que la rep. devient une rep. unitaire par rapport à ce produit scalaire.
  2. La rep. T est similaire (équivalente) à une rep. T' qui est unitaire par rapport au produit scalaire de départ.

Soit (T,V) une représentation d'un groupe fini. L'espace vectoriel V soit équipé avec un produit scalaire $(\ ,\ )$.

Étape 1:
Soit $\vec{v},\vec{v}' \in V$. Définissons un produit scalaire "invariant sous G"

$$\{\vec{v},\vec{v}'\} := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(T(g)\vec{v}, T(g)\vec{v}')\,.$$

Pour $h \in G$:

$$\begin{aligned}\{T(h)\vec{v}, T(h)\vec{v}'\} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(T(g)T(h)\vec{v}, T(g)T(h)\vec{v}') \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(T(gh)\vec{v}, T(gh)\vec{v}') \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g'\in G}(T(g')\vec{v}, T(g')\vec{v}') = \{\vec{v},\vec{v}'\} \qquad (*)\end{aligned}$$

$\Rightarrow T(g)$ est unitaire par rapport à $(V, \{\ ,\ \})$.

Étape 2:

- Soit $\{\vec{e}_i\}$ BON par rapport à $(\ ,\ )$.
- Soit $\{\vec{f}_i\}$ BON par rapport à $\{\ ,\ \}$.
- Soit S un opérateur linéaire inversible tel que: $\vec{f}_i = S\vec{e}_i$.
  (Un tel opérateur décrit le changement de base et existe.)

$\Rightarrow S\vec{x} = S(x_i\vec{e}_i) = x_i\vec{f}_i$ (en utilisant la convention d'Einstein).

$\Rightarrow \{S\vec{x}, S\vec{y}\} = x_i^* y_j \underbrace{\{\vec{f}_i, \vec{f}_j\}}_{\delta_{ij}} = x_i^* y_i = (\vec{x}, \vec{y}) \qquad (**)$

- Définissons: $T' := S^{-1}TS$. Alors, $T' \sim T$.
- T' est unitaire par rapport à $(\ ,\ )$:

$$\begin{aligned}(T'(g)\vec{x}, T'(g)\vec{y}) &= (S^{-1}T(g)S\vec{x}, S^{-1}T(g)S\vec{y}) \\ &\overset{(**)}{=} \{T(g)S\vec{x}, T(g)S\vec{y}\} \\ &\overset{(*)}{=} \{S\vec{x}, S\vec{y}\} \\ &\overset{(**)}{=} (\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}$$

$\Rightarrow T$ est équivalent à une rep. unitaire. $\square$

Remarques. Groupe fini/compact $\leftrightarrow$ Existence d'une somme invariante $\sum_g$.

2.6 Le produit tensoriel de représentations

Important pour:

- Description d'états de systèmes composés.
  (Par ex.: système de deux électrons; couplage de spins; couplage du spin avec le moment cinétique)

- Cominaison de symétries de l'espace-temps avec des symétries internes. (Par ex.: Spin et saveur, Groupe de Poincaré et groupe de jauge)

Définition 2.8 (Produit tensoriel)**.** Soient V_1, V_2 deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.
Le produit tensoriel de V_1 et V_2 est l'ensemble
$V_1 \otimes V_2 := \{\alpha_1 \vec{x_1} \otimes \vec{y_1} + \ldots + \alpha_n \vec{x_n} \otimes \vec{y_n} | n \in \mathbf{N} \text{ fini}, \vec{x_i} \in V_1, \vec{y_i} \in V_2, \alpha_i \in \mathbf{K}\}$

Règles: $\forall \alpha_i \in \mathbf{K}, \vec{x}, \vec{x_1}, \vec{x_2} \in V_1, \vec{y}, \vec{y_1}, \vec{y_2} \in V_2$:

- $(\alpha_1 \vec{x_1} + \alpha_2 \vec{x_2}) \otimes \vec{y} = \alpha_1 \vec{x_1} \otimes \vec{y} + \alpha_2 \vec{x_2} \otimes \vec{y}$
- $\vec{x} \otimes (\alpha_1 \vec{y_1} + \alpha_2 \vec{y_2}) = \alpha_1 \vec{x} \otimes \vec{y_1} + \alpha_2 \vec{x} \otimes \vec{y_2}$

Discussion.

- $V_1 \otimes V_2$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.
- Dans le cas $\dim(V_1) = m$, $\dim(V_2) = n$ finie:

  Soit $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_m}\}$ une base de V_1, $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}\}$ une base de V_2.

  $V = V_1 \otimes V_2$ est un espace vectoriel de $\dim(V) = m \cdot n$ avec une base $\{\vec{e_i} \otimes \vec{f_j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$.

  $\Rightarrow \vec{v} \in V\,, \quad \vec{v} = v_{ij}\ \vec{e_i} \otimes \vec{f_j} \quad$ (convention d'Einstein)

  Notez bien que, en général, $\vec{v} \neq \vec{v_1} \otimes \vec{v_2}$ avec $\vec{v_1} \in V_1$ et $\vec{v_2} \in V_2$. Il faut une combinaison linéaire des éléments de base pour décrire un état d'un système composé! C'est l'origine mathématique du phénomène d'enchevêtrement/d'intrication (entanglement, Verschränkung).

Exemple 2.4 (Système de deux spins-1/2)**.**

1er spin-1/2: V_1, $\dim(V_1) = 2$, base $\{|{\uparrow}\rangle_1\,, |{\downarrow}\rangle_1\}$
2eme spin-1/2: V_2 $\dim(V_2) = 2$, base $\{|{\uparrow}\rangle_2\,, |{\downarrow}\rangle_2\}$

$V = V_1 \otimes V_2$, $\dim(V) = 2 \cdot 2 = 4$, base $\{|{\uparrow}\rangle_1 \otimes |{\uparrow}\rangle_2\,, |{\uparrow}\rangle_1 \otimes |{\downarrow}\rangle_2\,, |{\downarrow}\rangle_1 \otimes |{\uparrow}\rangle_2\,, |{\downarrow}\rangle_1 \otimes |{\downarrow}\rangle_2\}$

Discussion (Opérateurs).

Soient $L_1 : V_1 \to V_1$ et $L_2 : V_2 \to V_2$ des opérateurs $\mathbf{K}$-linéaires. $V = V_1 \otimes V_2$.

$L := L_1 \otimes L_2 : V \to V$, $L\vec{v} = v_{ij}\ L_1\vec{e_i} \otimes L_2\vec{f_j}$, est un op. $\mathbf{K}$-linéaire sur V.

Le produit de $L = L_1 \otimes L_2$ avec $M = M_1 \otimes M_2$ est donné par: $LM = L_1M_1 \otimes L_2M_2$.

Définition 2.9 (Produit tensoriel de deux représentations)**.** Soient $(V_i, D^{(i)})$ deux représentations matricielles de deux groupes G_i $(i = 1, 2)$.
$(V_1 \otimes V_2, D = D^{(1)} \otimes D^{(2)})$ avec $D(g, g') = D^{(1)}(g) \otimes D^{(2)}(g')$ $(g \in G_1, g' \in G_2)$ est une représentation de $G_1 \times G_2$ sur $V_1 \otimes V_2$, **le produit tensoriel des deux représentations**.

Discussion.

Soit $\{\vec{e_i} | i = 1, \ldots, \dim V_1\}$ une base de V_1, $\{\vec{f_j} | j = 1, \ldots, \dim V_2\}$ une base de V_2.

- L'action des opérateurs sur les éléments de base (operation active, convention d'Einstein):

$$D^{(1)}(g)\vec{e_i} = D^{(1)}_{i'i}(g)\vec{e_{i'}} \qquad \forall g \in G_1$$
$$D^{(2)}(g')\vec{f_j} = D^{(2)}_{j'j}(g')\vec{f_{j'}} \qquad \forall g' \in G_2\,.$$

  Par conséquent:

$$D(g, g')\vec{e_i} \otimes \vec{f_j} = D_{i'j',ij}(g, g')\vec{e_{i'}} \otimes \vec{f_{j'}} = D^{(1)}(g)\vec{e_i} \otimes D^{(2)}(g)\vec{f_j} = D^{(1)}_{i'i}(g)D^{(2)}_{j'j}(g')\vec{e_{i'}} \otimes \vec{f_{j'}}$$

  et on trouve

$$D_{i'j',ij}(g, g') = D^{(1)}_{i'i}(g)D^{(2)}_{j'j}(g')\,.$$

- L'action des opérateurs sur les composantes des vecteurs:

$$\vec{v} = v_{ij}\vec{e_i} \otimes \vec{f_j} \in V_1 \otimes V_2,$$
$$D\vec{v} = v'_{i',j'}\vec{e_{i'}} \otimes \vec{f_{j'}} \Rightarrow v'_{i',j'} \equiv D_{i'j',ij}(g, g')v_{ij} = D^{(1)}_{i'i}(g)D^{(2)}_{j'j}(g')v_{ij}\,.$$

- Chaque index de v_{ij} est transformé avec sa propre matrice D ('i' avec $D^{(1)}$, 'j' avec $D^{(2)}$).
- Cela peut facilement être généralisé à plusieurs indices.

Proposition 2.4. *Soient V_1 et V_2 deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.* $(V_i, D^{(i)})$ *irreps de* $G_i \Leftrightarrow (V_1 \otimes V_2, D^{(1)} \otimes D^{(2)})$ *irrep de* $G_1 \times G_2$

Preuve.* On donne la preuve pour des groupes finis.
"$\Rightarrow$":
$|G|$ =fini $\Rightarrow$ On peut supposer que $D^{(i)}$ est unitaire (voir preuve du théorème de Maschke).

$$\forall \vec{x} \in V_1 \otimes V_2 : \vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j = a_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j \quad \text{(Convention d'Einstein)}\,.$$

Supposons: $D = D^{(1)} \otimes D^{(2)}$ réductible.
$\Rightarrow \exists$ sous-espace $H \subset V_1 \otimes V_2$ non-trivial ($H \neq 0, H \neq V_1 \otimes V_2$) qui est invariant:

$$\forall \vec{x} \in H, g_i \in G_i : D(g_1, g_2)\vec{x} \in H\,.$$

$\Rightarrow$ Il y a une base de $V_1 \otimes V_2$ tel que au moins un $a_{ij} = 0$. Sans restriction, soit $a_{11} = 0$, c.à.d.

$$H \ni \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (m \cdot n \text{ composantes})$$

On a

$$D\vec{x} = a_{ij} D\vec{e}_i \otimes \vec{f}_j = a_{ij} D^{(1)}_{i'i}(g_1) D^{(2)}_{j'j}(g_2) \vec{e}_{i'} \otimes \vec{f}_{j'} =: b_{i'j'} \vec{e}_{i'} \otimes \vec{f}_{j'}$$

c.à.d

$$b_{i'j'}(g_1, g_2) = D^{(1)}_{i'i}(g_1) D^{(2)}_{j'j}(g_2) a_{ij}\,.$$

Puisque H invariant par rapport à D: $D\vec{x} \in H \Rightarrow \forall g_i \in G_i : b_{11}(g_1, g_2) = 0$.
Posons $g_1 = e_1$. $\Rightarrow D^{(1)}_{i'i}(e_1) = \delta_{i'i}$. $\Rightarrow$

$$\forall g_2 \in G_2 : 0 = b_{11}(e_1, g_2) = D^{(2)}_{1j}(g_2) a_{1j}$$

avec $a_{11} = 0$ et $a_{1j} \in \mathbf{K}$ pour $j \geq 2$.
Choix de $(n-1)$ vecteurs $\vec{x_k}$ $(k = 2, \dots n)$ avec composantes $a_{1j} = \delta_{jk}$ $(j = 2, \dots n)$. $\Rightarrow$

$$\forall g_2 \in G_2 : 0 = D^{(2)}_{12}(g_2) = D^{(2)}_{13}(g_2) = \ldots = D^{(2)}_{1n}(g_2)\,.$$

Par conséquent, $D^{(2)}(g_2)$ a la forme:

$$D^{(2)}(g_2) = \begin{pmatrix} a & \vec{0}^T \\ \vec{b} & A \end{pmatrix} \qquad \forall g_2 \in G_2$$

avec $a \in \mathbf{K}$, $\vec{0}, \vec{b} \in \mathbf{K}^{n-1}$, $A \in M_{n-1}(\mathbf{K})$.
L'unitarité de $D^{(2)}$ implique que $|a|^2 = 1$, $a * \vec{b}^T = 0$, $\vec{b} * a^* = 0$ et $AA^\dagger = I_{n-1}$.
$a \neq 0 \Rightarrow \vec{b} = 0$. Par conséquent, $D^(2)$ est réductible en contradiction avec la prémisse.

"$\Leftarrow$":
Supposons: $D^{(1)}$ réductible.
$\Rightarrow \exists$ sous-espace $U_1 \subset V_1$ non-trivial $(U_1 \neq 0, U_1 \neq V_1)$, invariant par rapport à $D^{(1)}$:

$$\forall \vec{u}_1 \in U_1, g_1 \in G_1 : D^{(1)}(g_1)\vec{u}_1 \in U_1\,.$$

Soit $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ $(1 \leq k < \dim(V_1))$ une base de U_1. $D^{(1)}$ réductible $\Rightarrow$

$$\forall g_1 \in G_1, i = 1, \ldots, k : D^{(1)}(g_1)\vec{e}_i = \sum_{i'=1}^{k} D^{(1)}_{i'i}(g_1)\vec{e}_{i'} \in U_1\,.$$

Considérons un élément $\vec{v} \in U_1 \otimes V_2$:

$$U_1 \otimes V_2 \ni \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j = a_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j\,,$$
$$D(g_1, g_2)\vec{v} = a_{ij}(D^{(1)}(g_1)\vec{e}_i) \otimes (D^{(2)}(g_2)\vec{f}_j) \in U_1 \otimes V_2\,,$$

c.à.d., D est réductible en contradiction avec la prémisse et $D^{(1)}$ doit alors être irréductible.
Un raisonnement similaire montre que $D^{(2)}$ est irréductible. □

Définition 2.10 (Produit tensoriel extérieur de deux représentations)**.**
Soit $G_1 = G_2 = G$. $(V_1, D^{(1)})$, $(V_2, D^{(2)})$ des représentations de G.
La représentation $(V_1 \otimes V_2, D = D^{(1)} \otimes D^{2)})$ de $G \times G$ est appelé **produit tensoriel extérieur** de $(V_1, D^{(1)})$ et $(V_2, D^{(2)})$.

Rappel: $D(g_1, g_2) = D^{(1)}(g_1) \otimes D^{(2)}(g_2)$ avec g_1 et g_2 différent en général.

Définition 2.11 (Produit tensoriel intérieur de deux représentations)**.**
Soit $G' = \{(g,g)|g \in G\}$. $G \simeq G' \subset G \times G$.
La restriction de $(V_1 \otimes V_2, D^{(1)} \otimes D^{2)})$ sur G', est appelé **produit tensoriel intérieur** de G sur $V_1 \otimes V_2$.

Remarques. Nous sommes dans une situation où $G_1 = G_2 = G$

- Produit extérieur: $D(g, g'), g \in G, g' \in G$
  Exemple: $\mathrm{SU}(2)_{spin} \times \mathrm{SU}(2)_{\mathrm{i}sospin}$, deux groupes SU(2) d'origine différent.

- Produit intérieur: $D'(g) := D(g, g), g \in G$
  Exemple: Couplage de deux spins s_1 et s_2. Une seule rotation de $\mathrm{SU}(2)_{spin}$ est effectuée, agissant sur les deux particules de spin s_1 et s_2.

- Même si le produit tensoriel extérieur est une représentation irréductible de $G \times G$, le produit tensoriel intérieur est en général réductible.

- La réduction du produit tensoriel *intérieur* en représentations irréductibles s'appelle **décomposition Clebsch-Gordan** (voir Sec. 3.5):

$$D' = \oplus_\mu D^{(\mu)} \,,$$

  où la somme est sur les représentations irréductibles de G.