3.1

Groupe : $G = SO(2)$, Espace vectoriel : $V = \mathbb{R}^2$

$D : SO(2) \to GL(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong GL(2, \mathbb{R})$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\ulcorner R(\theta) \equiv D(R(\theta)) \lrcorner$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

; $\mathbb{R}$-esp. vect. $\mathbb{R}^2 \overset{\text{isomorph.}}{\longleftrightarrow} \mathbb{C}$-esp. vect. $\mathbb{C}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-iy}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

* $x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \dfrac{x+iy}{\sqrt{2}} \dfrac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}} + \dfrac{x-iy}{\sqrt{2}} \dfrac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}$

$\leadsto$ Coordonnées : $\underset{\in \mathbb{R}^2}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \to \underset{\in \mathbb{C}^2}{\begin{pmatrix} -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-iy}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$

Coord. sphériques : $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x+iy = re^{i\varphi} \\ x-iy = re^{-i\varphi} \end{array}$

* $x' + iy' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y + i(\sin\theta\, x + \cos\theta\, y)$

$= \cos\theta\,(x+iy) + i\sin\theta\,(x+iy) = e^{i\theta}(x+iy)$

De même : $x' - iy' = e^{-i\theta}(x-iy)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{x'+iy'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x'-iy'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} \\ \frac{x-iy}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

* Pour le $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} \\ z \\ \frac{x-iy}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $R(\theta) = \mathrm{diag}(e^{i\theta}, 1, e^{-i\theta})$ entièrement réductible

* Caractère :

$$\chi(\theta) = e^{i\theta} + 1 + e^{-i\theta} = 1 + 2\cos\theta$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2

$$D(c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad (D(c))^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (D(c))^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e$$

$\Rightarrow$ $C_3 \cong \langle D(c) \rangle$ agissant sur un ~~R~~ espace vect. de dim 2. C'est donc une repr. 2-dim.

Irreductibilité :

Supposons $\exists S$: $S D(c) S^{-1} = \begin{pmatrix} a & d \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $\quad \ulcorner \Rightarrow S D(c)^2 S^{-1} = \begin{pmatrix} a' & d' \\ 0 & b' \end{pmatrix} \lrcorner$

$\Rightarrow$ $Tr(S D(c) S^{-1}) = Tr(D(c)) = -1 = a + b$

$Det(S D(c) S^{-1}) = Det(D(c)) = 1 = ab$

$\Rightarrow$ $b = -(a+1)$, $ab = -a^2 - a = 1 \Leftrightarrow a^2 + a + 1 = 0$, pas de solution réelle

$\Rightarrow$ a complexe

$\Rightarrow$ Cette repr. est irréductible sur le corps des nombres réels:

$D : C_3 \to GL(V, \mathbb{R})$ irred.

⌈ Avec caractères :

D irréductible $\Leftrightarrow \langle \chi, \chi \rangle = 1$ (Frobenius) critère pour les $\mathbb{C}$-espaces vect.

$$\chi = \{ \chi(e), \chi(c), \chi(c^2) \} = \{ 2, -1, -1 \}$$

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|C_3|} \left(\chi^*(e)\chi(e) + \chi^*(c)\chi(c) + \chi^*(c^2)\chi(c^2) \right)$$

$$= \frac{1}{3} (4 + 1 + 1) = 2$$ $\to$ réductible sur $\mathbb{C}$ ⌋

$$\ulcorner \det(D(c) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda) + 1$$

$$= \lambda^2 + \lambda + 1 \quad , \quad \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$ ⌋

$\Rightarrow$ pas decomposable

(!)

$\Rightarrow$ pour des matrices 2×2 pas reductible

3.3

$N \triangleleft G$, Repr. $D^{G/N} : G/N \to GL(n, \mathbb{C})$

$$D^{G} : G \to GL(n, \mathbb{C}) \, , \quad D^{G}(g) := D^{G/N}(gN)$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d] \arrow[dr, "D^{G}"] & \\
G/N \arrow[r, "D^{G/N}"'] & GL(n, \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

À montrer : $D^{G}(g_1) D^{G}(g_2) = D^{G}(g_1 g_2)$

$$D^{G}(g_1) D^{G}(g_2) \overset{\checkmark}{=} D^{G/N}(g_1 N) \, D^{G/N}(g_2 N) \overset{\checkmark}{=} D^{G/N}((g_1 N)(g_2 N)) \overset{\checkmark}{=} D^{G/N}((g_1 g_2) N) \overset{\checkmark}{=} D^{G}(g_1 g_2)$$

3.4

Groupe affine : $GA(n,0) := \{ g(A,\vec{a}) \mid A \in O(n), \vec{a} \in \mathbb{R}^n \} = O(n) \wedge T(n)$

$$g(A,\vec{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n , \quad \vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{a}$$

Loi de composition : $g(A',\vec{a}\,')g(A,\vec{a}) = g(A'A, A'\vec{a} + \vec{a}\,')$

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{a} , \quad \vec{x}\,'' = A'\vec{x}\,' + \vec{a}\,'$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}\,'' = A'A\vec{x} + A'\vec{a} + \vec{a}\,' = A''\vec{x} + \vec{a}\,''$$

avec $A'' = A'A$, $\vec{a}\,'' = A'\vec{a} + \vec{a}\,'$

$$\begin{pmatrix} A & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & \vec{a}\,' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & A\vec{a}\,' + \vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g(A,\vec{a}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$GA(n,0) = O(n) \wedge T(n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in O(n), \vec{a} \in \mathbb{R}^n \right\} \subset GL(n+1,\mathbb{R})$$

réductibles, mais non pas entièrement réductibles pour $\vec{a} \neq 0$