2.1

a) Pour une relation d'équivalence, il faut vérifier les 3 propriétés reflexivité, symétrie et transitivité

(i) Reflexivité : $g \sim g$?

On a $g = e g e$ avec $e \in A \leq G$, $e \in B \leq G$ $\Rightarrow g \sim g$

(ii) symétrie : $g \sim g' \Rightarrow g' \sim g$?

$g \sim g' \Rightarrow \exists a \in A, b \in B \mid g' = agb \Rightarrow g = a^{-1} g' b^{-1}$ avec $a^{-1} \in A$, $b^{-1} \in B$ since $a \in A, b \in B$ et A, B groups.

$\Rightarrow g' \sim g$

(iii) Transitivité : $g \sim g'$ et $g' \sim g'' \Rightarrow g \sim g''$?

$g' = a' g b'$, $g'' = a'' g' b'' = \underbrace{a'' a'}_{\in A} g \underbrace{b' b''}_{\in B} \Rightarrow g'' \sim g$

b) $D_4 = \langle b, c \rangle$ avec $c^4 = b^2 = (bc)^2 = e$

$A = B = C_2 = \langle b \rangle = \{e, b\} < D_4$; autre sous-groupe $C_4 < D_4$

$D_4 = \{e, c, c^2, c^3, b, bc, bc^2, bc^3\}$, $cb = bc^3$: $(bc)^2 = bc\,bc = e \overset{b\cdot}{\Rightarrow} cbc = b \overset{\cdot c^3}{\Rightarrow} cb = bc^3$

Rel. d'équivalence $\rightsquigarrow$ Partition

Double co-ensembles : $A g_i B$

$AeA = A = \{e, b\}$

$AcA = \{c, c^3, bc, bc^3\}$

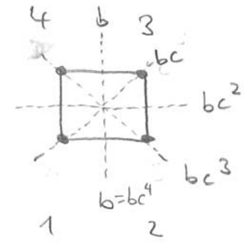
$ece = c$
$ecb = cb = bc^3$
$bce = bc$
$bcb = c^3$

$Ac^2A = \{c^2, bc^2\}$

$ec^2e = c^2$
$ec^2b = cbc^3 = bc^6 = bc^2$
$bc^2e = bc^2$
$bc^2b = bc\,bc^3 = b\underbrace{cbc}_{=b}c^2 = c^2$

2.2 Conjugaison : $a \sim b$ si $a = gbg^{-1}$

a)



c ↻

$D_4 = \{e, c, c^2, c^3, b, bc, bc^2, bc^3\}$, $c^4 = b^2 = (bc)^2 = e$

$D_4 < S_4$

$c = (1\ 2\ 3\ 4)$, $b = (12)(34)$

$\Rightarrow c^2 = (13)(24)$, $c^3 = (1\ 4\ 3\ 2)$

$bc = (24)$, $bc^2 = (14)(23)$, $bc^3 = (13)$

Cycle structure : c, c^3 $\quad 4^1$

b, c^2, bc^2 $\quad 2^2$

bc, bc^3 $\quad 2^1 1^2$

e $\quad 1^4$

Mais : $\nexists\, g \in D_4 < S_4$: $c^2 = gbg^{-1}$ ou $c^2 = gbc^2g^{-1}$

$\Rightarrow$ Classes de conjugaison : $(e) = \{e\}$

$(c) = \{c, c^3\}$

$(c^2) = \{c^2\}$

$(b) = \{b, bc^2\}$

$(bc) = \{bc, bc^3\}$

b) $D_4 = \langle b, c \rangle$, $c^4 = b^2 = (bc)^2 = e$ $\Rightarrow$ $bc = c^3b$: $bcbc = e \Rightarrow cbc = b \Rightarrow bc = c^3b$

$bc^2 = c^2b$: $bc^2 = c^3bc = c^6b = c^2b$

$bc^3 = cb$: $bc^3 = c^2bc = c^5b = cb$

$\Rightarrow$ $c^2 = bc^2b = bc^2b^{-1}$: $c^2 \sim c^2$

$c = bc^3b^{-1}$: $c \sim c^3$

$(c) = \{c, c^3\}$

$(b) = \{b, bc^2\}$

$(bc) = \{bc, bc^3\}$

$(c^2) = \{c^2\}$

$(e) = \{e\}$

gc^kg^{-1} : $g = c^n$ ou $g = bc^n$

$c^n c^k c^{-n} = c^k$

$bc^n c^k c^{-n} b^{-1} = bc^k b^{-1}$

$= c^{3k}$

$bc^k = c^{3k}b$

$c^k \sim c^{3k}$: $c \sim c^3$

$c^2 \sim c^6 = c^2$

$c^k b c^{-k} =$; $bc^k b c^{-k} b^{-1}$

$ebe = b$

$cbc^{-1} = cbc^3 = c^4bc^2 = bc^2$

$c^2bc^2 = b$

$c^3bc = bc^2$

$bc\,b\,(bc)^{-1} = bc\underbrace{bc^{-1}}_{cb}b^{-1} = bc^2$

$\underbrace{bc^2bc^2}_{b}b = b$, $\underbrace{bc^3b}_{bc^2}cb = c^2b = bc^2$

c) Géométriquement :

$c \sim c^3$: rotations par $\pi/2$ autour d'axes $\vec{e}_z$ et $-\vec{e}_z$
$\uparrow_{c} \qquad \uparrow_{c^3}$

et $b(\vec{e}_z) = -\vec{e}_z$

De même : $c^2 \sim c^{-2} = c^2$

$$\left.\begin{array}{ll} b : & \text{rot. par } \pi \text{ autour } \vec{e}_x \\ bc^2 : & \text{" \quad " \quad " \quad "} \quad \vec{e}_y \end{array}\right\} \text{ et } c(\vec{e}_x) = \vec{e}_y$$

bc, bc^3 : rot. par π autour les diagonales $\vec{e}_+$, $\vec{e}_-$ $\nearrow$

Pour tourner $\vec{e}_+$ sur $\vec{e}_x$ il fallait une rotation par $\pi/4 \notin D_4$

2.3

$A_n = \{ P \in S_n \mid sign(P) = 1 \}$ où $sign(P) = (-1)^{\# \text{ transpositions}}$

$sign(P_1 \circ P_2) = sign(P_1) \cdot sign(P_2)$, $sign(P^{-1}) = sign(P)$

Donc: (i) $P_1, P_2 \in A_n \Rightarrow P_1 \circ P_2 \in A_n$ (Fermeture)

(ii) $\forall Q \in S_n, P \in A_n$: $Q^{-1} P Q \in A_n$ car $sign(Q^{-1}PQ) = \underbrace{sign(Q)^2}_{=1} \underbrace{sign(P)}_{=1} = \underline{1}$

a) Montrer que $A_n \trianglelefteq S_n$:

$A_n \trianglelefteq S_n \Leftrightarrow \forall P \in A_n : QPQ^{-1} \in A_n \quad \forall Q \in S_n$

$sign(QPQ^{-1}) = 1 \Rightarrow QPQ^{-1} \in A_n$ ✓

b) S_n / A_n :

Lagrange: $|S_n| = |S_n : A_n| \, |A_n|$

$e A_n = A_n$

$Q \in S_n, Q \notin A_n$, c.à.d., $sign(Q) = -1$: QA_n

e.g.: $Q = (12)$

$[\, Q' \neq Q, \; sign(Q') = -1$

$\Rightarrow Q^{-1}Q' = P \in A_n$; $QP = Q'$

$\Rightarrow Q' \in QA_n \,]$

$S_n = A_n \dot{\cup} QA_n$

$\Rightarrow |S_n| = 2 |A_n|$

$\Rightarrow |A_n| = \frac{n!}{2}$

$S_n / A_n \simeq C_2$

2.4

$f: G \to G$, $f(g) = g^{-1}$ f est bijectif ✓ (l'élément inverse est unique)

$\ulcorner g g_1 = e = g_1 g \mid g g_2 = e = g_2 g \mid \underbrace{g_2 g}_{e} \overbrace{g g_1}^{e} = g_1 = g_2 \lrcorner$

f homomorphisme? $f(g_1 g_2) = (g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1} \underset{\uparrow}{=} g_1^{-1} g_2^{-1} = f(g_1) f(g_2)$ ✓

G abélien

$\Rightarrow$ f est un automorphisme. $\operatorname{Ker} f = \{e\} \Rightarrow$ isomorphisme

2.5

$C_n = \langle c \rangle$, $D_n = \langle c, b \rangle$, $c^n = b^2 = (bc)^2 = e$

$C_n < D_n$ ✓

À montrer : $C_n \triangleleft D_n$ $\iff \forall g \in D_n : g C_n = C_n g$

$\iff \forall g \in D_n : g C_n g^{-1} \subseteq C_n$

$\iff \forall h \in C_n \, \forall g \in D_n : g h g^{-1} \in C_n$

$c^n c^k c^{-n} = c^k \in C_n$ ✓

$b c^n c^k (b c^n)^{-1} = b c^k b \in C_n$ $\ulcorner bc = c^{n-1} b \lrcorner$

$= c^{n-1} b c^{k-1} b$

$= c^{(n-1)k} \in C_n$

$\Rightarrow C_n \triangleleft D_n$

$|C_n| = n = |D_n|/2 \Rightarrow e C_n = C_n = [e] = \{e, c, \dots, c^{n-1}\}$

$b C_n = [b] = \{b, bc, bc^2, \dots, bc^{n-1}\}$

$[b][b] = [b^2] = [e]$

$\Rightarrow D_n / C_n \simeq C_2$

2.6 $f_a : G \to G$, $g \mapsto aga^{-1}$

$I(G) = \{f_g\}$. Vérifier axiomes de groupe.

G∅ : $f_a f_b$: $g \mapsto a(bgb^{-1})a^{-1} = (ab)g(ab)^{-1}$ $\Rightarrow f_a f_b = f_{ab} \in I(G)$ ✓

G1 : $f_a(f_b f_c) = (f_a f_b) f_c$ ✓

G2 : f_e est l'élément neutre ✓

G3 : $(f_a)^{-1} = f_{a^{-1}}$ ✓

$\Rightarrow$ $I(G)$ est un groupe

Considerons le G-morphisme $\Theta : G \to I(G)$, $\Theta(g) = f_g$, surjectif

$\operatorname{Ker}\Theta = Z$ car $f_z : g \mapsto zgz^{-1} = g$, $z \in Z$, c.a.d. $f_z = f_e = Id$

(Théorème d'isomorphisme) $\Rightarrow$ $I(G) \simeq G/_{\operatorname{Ker}\Theta} = G/_Z$

$$I(G) = \operatorname{Im}(\Theta) = \Theta(G)$$