

EXERCICES 01

1. Faire une liste avec des exemples de groupes/symétries en physique.
 - Sur quels objets est-ce que le groupe agit ?
 - Dans le cas d'une symétrie : quels invariants y a-t-il ?
2. Trouver la table multiplication (=table de Cayley) du groupe diédral D_3 , défini comme $\text{gp}\{b, c\}$ avec $b^2 = c^3 = (bc)^2 = e$.
3. Ecrire les permutations

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

en notation cyclique.

4. L'ordre d'un élément d'un groupe est défini comme le nombre entier n le plus petit tel que $g^n = e$. Quel est l'ordre des deux permutations ci-dessus ? Quel est l'ordre de la permutation $(a_1 a_2 \dots a_{2r})(b_1 b_2 \dots b_r)$?
5. Lesquels des groupes suivants sont isomorphes entre eux ? Donner la correspondance explicite quand elle existe.
 - (a) les nombres complexes $(1, i, -1, -i)$ par rapport à la multiplication ;
 - (b) les nombres entiers $(2, 4, 6, 8)$ par rapport à la multiplication modulo 10 ;
 - (c) les permutations $(), (12), (34), (12)(34)$;
 - (d) les permutations $(), (1234), (1432), (13)(24)$;
 - (e) les quatre matrices

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

par rapport à la multiplication.

6. Le centre Z d'un groupe G est défini comme l'ensemble d'éléments z qui commutent avec tous les éléments du groupe, c.à.d. $Z = \{z \in G \mid zg = gz \text{ pour tous } g \in G\}$. Montrer que Z est un sous-groupe abélien de G .
-