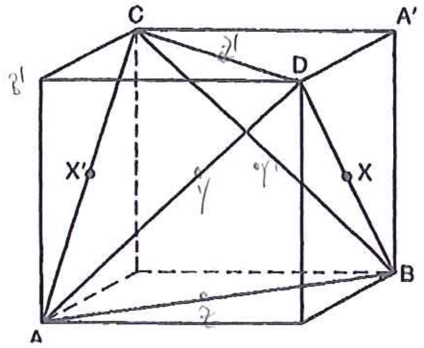
PHY412Y Théorie des Groupes et Symétries en Physique I. Schienbein (C et TD)

EXAMEN 2012/2013

---

1. **Groupes.**

   Le groupe tétraédral T est le groupe de rotations d'un tétraèdre régulier, qui peut être inscrit dans un cube, où le tétraèdre est ABCD.



   (a) Montrer que T=gp$\{b, c\}$ avec $b^2 = c^3 = (bc)^3 = e$, où b est une rotation d'ordre deux autour de l'axe XX' et c est une rotation d'ordre trois autour de la diagonale du cube AA'.
   NB : Il peut être utile de considérer b et c comme des permutations des quatre sommets.

   (b) Montrer que T est isomorphe au groupe A_4.

   (c) Montrer que C_6 est isomorphe à $C_3 \times C_2$.

2. **Représentations.**

   (a) Montrer que la table de caractères de D_4 est :

D_4	E	$\cancel{2}C_4^2$	$2\,C_4$	$2C_2$	$2C_2''$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	1	-1	1	-1
B_2	1	1	-1	-1	1
E	2	-2	0	0	0

   (b) Utiliser cette table pour trouver la série de Clebsch-Gordan de la représentation E⊗E de D_4.

   (c) Expliquer comment la triple dégénérescence d'un orbital atomique $l = 1$ est levée, si la symétrie SO(3) est réduite à D_4 par un environnement cristalline.

Bon courage !

17/12/2012

Théorie des groupes – Examen 2012/2013

1. a)

$G = \langle b, c \rangle$ avec $b^2 = c^3 = (bc)^3 = e$

$G = \{ e, c, c^2 ; b, bc, bc^2 ; cb, cbc, cbc^2 ; c^2b, c^2bc, c^2bc^2 \}$

Appeler $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$, $A_4 = D$

Générateur b : $(1\,3)(2\,4)$, $b^2 = e$

c : $(1)(2\,3\,4)$, $c^3 = e$; $c^2 = (1)(2\,4\,3)$ Rotation par $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour AA'

$bc = (1\,3\,2)(4)$ DD' ← Diagonale par D

$bc^2 = (1\,3\,4)(2)$ BB' ← Diagonale par B

$cb = (1\,4\,3)(2)$ BB'

$cbc = (1\,4\,2)(3)$ CC' ← Diagonale par C

$cbc^2 = (1\,4)(2\,3)$

$c^2b = (1\,2\,3)(4)$ DD'

$c^2bc = (1\,2)(3\,4)$

$c^2bc^2 = (1\,2\,4)(3)$ CC'

b : π autour XX'

cbc^2 : π autour YY'

c^2bc : π autour ZZ'

c, c^2 : $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour AA'

bc^2, cb : " BB'

cbc, c^2bc^2 : " CC'

bc, c^2b : " DD'

Toutes les rotations du groupe T $\Rightarrow$ $G = T$

b)

A_4 : groupe de permutations paires de 4 éléments

$|A_4| = 12$

$T = \{ e, (2\,3\,4), (1\,3\,2), (1\,3\,4), (1\,4\,3), (1\,4\,2), (14)(23),$

$(1\,2\,3), (12)(34), (1\,2\,4) \}$

$|T| = 12$, tous les éléments sont pairs

$\Big[$ $(12)(34)$: $\underline{\underline{2}}$ 2-cycles $\to$ pair

$(1\,2\,3) = (12)(23)$: $\underline{\underline{2}}$ 2-cycles $\to$ pair $\Big]$

$\Rightarrow \quad T \cong A_4$

c) Groupe $C_6 \equiv \langle c \rangle$, $c^6 = e$

$C_6 = \{ e, c, c^2, c^3, c^4, c^5 \}$ (6 éléments , ordre 6)

C_2 et C_3 sont sous-groupes de C_6 (Lagrange : ordre du sous-groupe doit diviser l'ordre du groupe $6 = 3 \cdot 2$ OK)

Appeler $a = c^3 \Rightarrow A \equiv C_2 = \langle a \rangle$, $a^2 = e$, ordre 2, $\{e, a\}$

Appeler $b = c^2 \Rightarrow B \equiv C_3 = \langle b \rangle$, $b^3 = e$, ordre 3, $\{e, b, b^2\}$

Produit direct :

(1) Tous les éléments du sous-groupe A doivent commuter avec tous les éléments du sous-groupe B :

$[a, b] = [c^3, c^2] = 0$

$[a, b^2] = [c^3, c^4] = c^7 - c^7 = 0$ OK

(2) Tous les éléments du groupe $G = C_6$ peuvent s'écrire de façon unique $g = ab$ avec $a \in A$ et $b \in B$:

$e = e_A \cdot e_B$

$c = a \cdot b^2 = c^3 \cdot c^4$

$c^2 = e_A \cdot b$

$c^3 = a \cdot e_B$ $\Rightarrow C_6 \cong C_3 \times C_2$

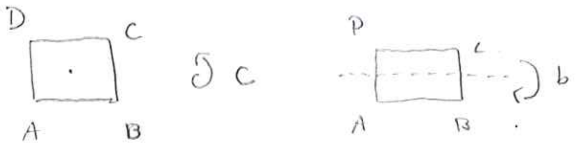
$c^4 = e_A \cdot b^2$ OK

$c^5 = a \cdot b$

2. a)

$D_4 = \langle b, c \rangle$ avec $b^2 = c^4 = (bc)^2 = e$ $\Rightarrow (bc)^2 = bcbc = e \Rightarrow cbc = b$

$\Rightarrow \boxed{cb = bc^3}$ (*)



$D_4 = \{e, c, c^2, c^3; b, bc, bc^2, bc^3\}$, $|D_4| = 8$ ($|D_n| = 2 \cdot n$)

Classes de conjugaison:

* $E = \{e\}$ (toujours)
* $bcb^{-1} = bcb \overset{(*)}{=} c^3$ $\rightsquigarrow 2C_4 = \{c, c^3\}$
* $bc^2b^{-1} = bc^2b = bcbc^3 = bbc^3c^3 = c^2$ $\rightsquigarrow C_4^2 = \{c^2\}$
* $cbc^{-1} = cbc^3 = bc^6 = bc^2$ $\rightsquigarrow 2C_2 = \{b, bc^2\}$
* $c(bc)c^{-1} = cb = bc^3$ $\rightsquigarrow 2C_2' = \{bc, bc^3\}$

Burnside 1: $r = K = 5$

Burnside 2: $|G| = \sum n_\mu^2 = 8 = \underbrace{\underset{A_1}{1} + \underset{A_2}{1} + \underset{B_1}{1} + \underset{B_2}{1}}_{} + \underset{E}{2^2}$

1-dim.: trivial $\Rightarrow b, c =$ nombres , $\chi(b) = b, \chi(c) = c$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$; $(bc)^2 = 1 \Rightarrow bc = \pm 1 \Rightarrow c = \pm 1$

$\boxed{c = \pm 1,\ b = \pm 1}$

D_4	E	C_4^2	$2C_4$	$2C_2$	$2C_2'$	
A_1	1	1	1	1	1	toujours : $c = +1$ et $b = +1$
A_2	1	1	1	-1	-1	$\leftarrow c = +1, b = -1$
A_3	1	1	-1	1	-1	$\leftarrow c = -1, b = +1$
A_4	1	1	-1	-1	1	$\leftarrow c = -1, b = -1$
E	2	α	β	γ	δ	

$\uparrow$ dim. de l'irrep

$c^2 = 1$

Orthogonalité : $\frac{1}{|G|} \sum_i k_i \chi_i^{(\mu)} \chi_i^{(\nu)*} = \delta^{\mu\nu}$

$$A_1 \perp E : \quad \frac{1}{8}(2 + \alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta) = 0$$
$$A_2 \perp E : \quad \frac{1}{8}(2 + \alpha + 2\beta - 2\gamma - 2\delta) = 0$$
$$\Big\} \ (2+\alpha+2\beta) = 0$$
$$B_1 \perp E : \quad \frac{1}{8}(2 + \alpha - 2\beta + 2\gamma - 2\delta) = 0$$
$$B_2 \perp E : \quad \frac{1}{8}(2 + \alpha - 2\beta - 2\gamma + 2\delta) = 0$$
$$\Big\} \ (2+\alpha-2\beta) = 0$$
$$\Big\} \ \alpha = -2, \quad \beta = 0$$

$$A_1 \perp E : \quad 2\gamma + 2\delta = 0$$
$$B_1 \perp E : \quad 2\gamma - 2\delta = 0$$
$$\Big\} \ \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

b)

$$D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)} = \bigoplus a_G D^{(G)} \quad \text{(Série de Clebsch-Gordan)}$$

$$a_G = \langle \chi^{(G)}, \chi^{(\mu)}\chi^{(\nu)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_i k_i \chi_i^{(G)} (\chi_i^{(\mu)} \cdot \chi_i^{(\nu)})^*$$

Ici : $D^{(\mu)} = D^{(\nu)} = E$

$$\chi^{(E \times E)} = \chi^{(E)}\chi^{(E)} = \{4, 4, 0, 0, 0\}$$

$$a_{A_1} = \frac{1}{8}(1 \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 0 + 0 + 0) = 1$$

De même : $a_{A_2} = a_{B_1} = a_{B_2} = 1$

$$a_E = \frac{1}{8}(2 \cdot 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \cdot 4 + 0 + 0 + 0) = 0$$

$$\Rightarrow E \otimes E = A_1 \oplus A_2 \oplus B_1 \oplus B_2$$

c) Lever la dégénérescence : $\chi^{(1)} = \sum_\nu a_\nu \chi^{(\nu)}$, $a_\nu = \langle \chi^{(1)}, \chi^{(\nu)} \rangle$

Caractère de $SO(3)$: $\chi^{(j)} = \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\phi}{\sin\frac{1}{2}\phi}$

Ici : $j = 1 \Rightarrow \chi^{(1)} = \frac{\sin\frac{3\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} = 1 + 2\cos\phi = \{3, -1, 1, -1, -1\}$

$$\begin{array}{ccccc} E & C_4^2 & 2C_4 & 2C_2 & 2C_2' \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ \phi = 0 & \pi & \frac{\pi}{2} & \pi & \pi \end{array}$$

$$a_{A_1} = \frac{1}{8}(3 - 1 + 2 - 2 - 2) = 0$$
$$a_{A_2} = \frac{1}{8}(3 - 1 + 2 + 2 + 2) = 1$$
$$a_{B_1} = \frac{1}{8}(3 - 1 - 2 - 2 + 2) = 0$$
$$a_{B_2} = \frac{1}{8}(3 - 1 - 2 + 2 - 2) = 0$$
$$a_E = \frac{1}{8}(6 + 2 + 0 + 0 + 0) = 1$$

$$D^{(1)} = A_2 \oplus E$$

La dégénérescence est levée

$$\boxed{3 \to 1 + 2}$$