EXERCICES 03

1. Montrer que la représentation [3] du groupe de rotations autour de l'axe z est entièrement réductible, si l'on utilise comme fonctions de base

$$-\frac{x+iy}{\sqrt{2}}\ ,\ z\ ,\quad \text{et}\quad \frac{x-iy}{\sqrt{2}}.$$

Calculer le caractère de cette représentation et montrer que l'on trouve le même caractère avec la base cartésienne $x,\ y,\ z$.

2. Vérifier que

$$D(c) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

génère une représentation [2] de C_3. Montrer que cette représentation est irréductible sur le corps des nombres réels.

3. Admettons un sous-groupe normal N d'un groupe G. Une représentation $D^{G/N}$ du groupe quotient peut être *relévée* pour donner une représentation D^G du groupe total G par la définition

$$D^G(g) \;:=\; D^{G/N}(gN),$$

c.à.d. chaque élément du groupe G est affecté à l'élément $D^{G/N}$ du co-ensemble, auquel il appartient. Vérifier que $D^G(g)$ est vraiment une représentation de G, c.à.d. que

$$D^G(g_1)D^G(g_2) \;=\; D^G(g_1g_2).$$

4. Montrer que deux bases d'un espace vectoriel fini ont forcément le même nombre d'éléments.

5. Le *groupe affine* et (sa représentation [n]) est défini par le groupe de rotations (représenté par des matrices [n] A), auquel on rajoute les translations (par un vecteur c), tel que

$$x' \;=\; Ax + c.$$

Trouver la loi de composition pour deux transformations affines successives et en déduire qu'il existe une correspondance entre ce groupe et le groupe représenté par les matrices [n+1] de forme

$$\begin{pmatrix} A & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

NB : Ces matrices, qui sont réductibles, ne peuvent être réduites entièrement que si $c = 0$, dans quel cas on revient à une représentation compacte du (sous-)groupe de rotations.