PHY421H | Théorie des Groupes et Symétries en Physique | I. Schienbein (C et TD)

EXAMEN 2011/2012

---

20 1. **Le groupe D_5**

Le groupe diédral $D_5 =< c, b >$ avec $c^5 = b^2 = (bc)^2 = e$ est le groupe de symétrie d'un pentagone régulier.

1 (a) Décrivez les éléments c et b à l'aide d'une figure.

1 (b) Identifiez tous les éléments du groupe. Combine d'éléments y a-t-il ?

3 (c) Rappelez le théorème de Lagrange. Combien de sous-groupes propres de D_5 y-a-t-il ?

4 (d) Determinez les classes de conjugaison du groupe D_5. [J'ai donné les classes : $K_1 = \{e\} = E$, $K_2 = \{c, c^4\} = 2C_5$, $K_3 = \{c^2, c^3\} = 2C_5^2$, $K_4 = \{b, bc, bc^2, bc^3, bc^4\} = 5C_2$

1 (e) Combien de représentations irreductibles y a-t-il ?

2 (f) Quelles sont les dimensions de ces représentations irreductibles ?

(g) Construisez la table de caractères.
Pistes :
1 – Commencez avec la première ligne et la première colonne.
2 – Pour la deuxième ligne utilisez le fait que la représentation est abélien.
1 – Puis après on peut fixer la dernière colonne.
4 – Finalement, determinez les caractères manquants dans les lignes ≥ 3.
Application numérique : $2\cos(2\pi/5) \approx 0,618 = 1/G$, $2\cos(4\pi/5) \approx -1,618 = -G$ où $G = (1+\sqrt{5})/2$ est le nombre d'or. $= G - 1$

12 2. **Le groupe D_6**

La table de caractères de D_6 est :

D_6	E	$2C_6$	$2\,C_6^2$	C_6^3	$3\,C_2$	$3\,C_2'$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	1	-1	-2	0	0
E_2	2	-1	-1	2	0	0

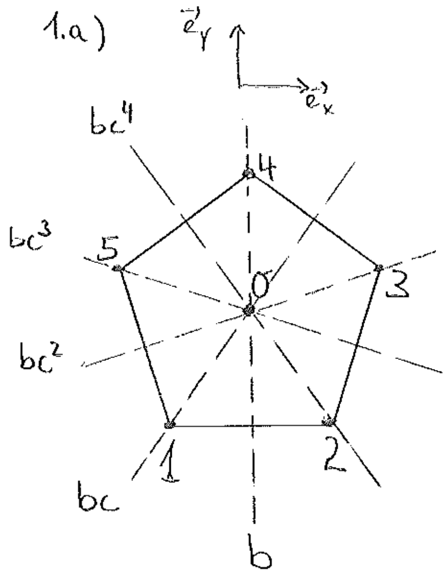
6 (a) Utilisez cette table pour trouver la série de Clebsch-Gordan de la représentation $E_1 \otimes E_2$ de D_6.

6 (b) Expliquez comment la triple dégénérescence d'un orbital atomique $l = 1$ est levée, si la symétrie SO(3) est réduite à D_6 par un environnement cristalline.

Bon courage !

Théorie des groupes – Examen 2011/2012

1.a)



c : rotation antihoraire (↺) par $\frac{2\pi}{5}$ ($\hat{=} 72°$)

$c \hat{=} (1\,2\,3\,4\,5) \in S_5$

b : rotation par π autour de l'axe $O\vec{e}_y$

$b \hat{=} (1\,2)(3\,5)$

b)

$$D_5 = \{e, c, c^2, c^3, c^4, b, bc, bc^2, bc^3, bc^4\}$$

$$|D_5| = 10$$

c)

<u>Lagrange :</u> L'ordre du sous-groupe doit diviser l'ordre du groupe.

$$H < G \quad , \quad |G| = |G:H| \cdot |H|$$

$|D_5| = 10 \implies |H| = 2$ ou $|H| = 5$

Sous-groupes propres : $C_5 = \{e, c, c^2, c^3, c^4\}$

$H_i = \{e, bc^i\}$, $i = 0, 1, \dots, 4$

$\implies$ Il y a 6 sous-groupes propres

d) <u>Classes de conjugaison :</u> $a \sim b \iff \exists g \in G : b = gag^{-1}$

$$c \sim c^4 : \quad b^{-1} c b = bcb \underset{\substack{\uparrow \\ bcbc = e}}{=} c^{-1} = c^4$$

$$c^2 \sim c^3 : \quad b^{-1} c^2 b = bc^2 b = bccb = bc\underbrace{b^2}_{e} cb = (\underbrace{bcb}_{=c^{-1}})(\underbrace{bcb}_{=c^{-1}}) = c^{-2} = c^3$$

$\left.\begin{array}{l} c \not\sim c^2 \\ c \not\sim bc^i \\ c^2 \not\sim bc^i \end{array}\right\}$ car éléments conjugés rotations par même angle autour d'axes différents

$$c^i b (c^i)^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ cb = bc^4}}{=} b\, c^{i4}\, c^{-i} = bc^{3i} \quad , i \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \quad cbc^{-1} = bc^3 \,,\quad c^2bc^{-2} = bc^6 = bc \,,\quad c^3bc^{-3} = bc^9 = bc^4 \,,$$
$$c^4bc^{-4} = bc^{12} = bc^2$$

$$\Rightarrow \quad b \sim bc \sim bc^2 \sim bc^3 \sim bc^4$$

Les classes sont donc :

$K_1 = \{e\}$

$K_2 = \{c, c^4\} \equiv 2C_5$

$K_3 = \{c^2, c^3\} \equiv 2C_5^2$

$K_4 = \{b, bc, bc^2, bc^3, bc^4\} \equiv 5C_2$

e) Burnside 1 : nb de classes = nb d'irreps

Il y a 4 représentations irréductibles

f) Burnside 2 : $|G| = \sum\limits_{\mu} d^{(\mu)2}$

$d^{(\mu)}$ la dimension de l'irrep $D^{(\mu)}$

Ici : $10 = \sum\limits_{\mu=1}^{4} d_{(\mu)}^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rep. triviale}, d_1 = 1 \text{ (toujours)}}}{1^2} + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \qquad d_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4$

$\Rightarrow \boxed{d_2 = 1}$, sinon $2 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4 \Rightarrow 1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \geq 1+4+4+4 = 13 > 10$

$\Rightarrow 10 = 1 + 1 + d_3^2 + d_4^2 \Rightarrow \boxed{d_3 = d_4 = 2}$

$D^{(1)} \equiv A_1 \,,\ D^{(2)} \equiv A_2 \,,\ D^{(3)} \equiv E_1 \,,\ D^{(4)} \equiv E_2$

g) Table de caractères :

D_5	E	$2C_5$	$2C_5^2$	$5C_2$
$D^{(1)} = A_1$	1	1	1	1
$D^{(2)} = A_2$	1			
$D^{(3)} = E_1$	2			
$D^{(4)} = E_2$	2			

← première ligne toujours 1

↑ première colonne : dimensions

* Deuxième ligne : Abélien $\Rightarrow$ $\chi(g_i) = D(g_i)$

$$\chi(g_1 g_2) = D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) = \chi(g_1)\chi(g_2)$$

$$\chi(bc) \overset{\text{même classe}}{=} \chi(b)$$

$$= \chi(b)\chi(c) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\chi(c) = 1}$$

$$\boxed{\chi(c^2) = \chi(c)\chi(c) = 1}$$

Orthogonalité des lignes : $1^2 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 + 5\,\chi(b)^2 \overset{!}{=} 10$ $\qquad \langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = 1$

$$\Rightarrow \quad \chi(b)^2 = 1$$

$$1\times 1\cdot 1 + 2\times 1\cdot 1 + 2\times 1\cdot 1 + 5\times 1\cdot \chi(b) = 0 \qquad \langle \chi^{(1)}, \chi^{(2)} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5\chi(b) + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\chi(b) = -1}$$

* Dernière colonne : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ z \\ z' \end{pmatrix}$

Orthogonalité des colonnes :

$$5\left(1^2 + (-1)^2 + z^2 + z'^2\right) \overset{!}{=} 10$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{z = z' = 0}$$

$\Rightarrow$

D_5	E	$2C_5$	$2C_5^2$	$5C_2$
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1
E_1	2	x	y	0
E_2	2	x'	y'	0

Orthogonalité :

Lignes 1,3 : $2 + 2x + 2y = 0 \Rightarrow x + y = -1 \Rightarrow \boxed{y = -x-1}$

1,4 : $2 + 2x' + 2y' = 0 \Rightarrow x' + y' = -1 \Rightarrow \boxed{y' = -x'-1}$

Colonnes 1,2 : $2(1\times 1 + 1\times 1 + 2x + 2x') = 0 \Rightarrow x + x' = -1 \Rightarrow \boxed{x' = -x-1 = y}$

$\Rightarrow \boxed{y' = x}$

Reste à determiner x :

Lignes 3,3 : $1\times 2^2 + 2x^2 + 2y^2 \overset{!}{=} 10 \iff x^2 + y^2 = 3$

Avec $y = -x-1$: $x^2 + (1+x)^2 = 3 \iff 2x^2 + 2x + 1 = 3$

$\iff x^2 + x = 1 \iff x^2 + x - 1 = 0$

$\iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{5})$

Symétrie $E_1 \leftrightarrow E_2$: choix $\boxed{x = -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}$ $= \frac{1}{G}$ avec G le nombre d'or

$= 2\cos(2\pi/5)$

$y = -x-1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) - 1 = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}} = -G$

$= 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$\Rightarrow$

D_5	E	$2C_5$	$2C_5^2$	$5C_2$
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1
E_1	2	$\frac{1}{G} = G-1$	$-G$	0
E_2	2	$-G$	$\frac{1}{G} = G-1$	0

2a)

$$E_1 \otimes E_2 = \sum a_G D^{(G)} = a_{A_1} A_1 + a_{A_2} A_2 + a_{B_1} B_1 + a_{B_2} B_2 + a_{E_1} E_1 + a_{E_2} E_2$$

$$a_G = \langle \chi^{(G)}, \underbrace{\chi^{(E_1 \otimes E_2)}}_{= \chi^{(E_1)} \cdot \chi^{(E_2)}} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_i k_i \chi_i^{(G)} \chi_i^{(E_1 \otimes E_2)*}$$

$$\chi^{(E_1 \otimes E_2)} = \{4, -1, 1, -4, 0, 0\}$$

$$a_{A_1} = \frac{1}{12}\left(\underset{\substack{\uparrow \\ k_1}}{1} \times 1 \cdot 4 + \underset{\substack{\uparrow \\ k_2}}{2} \times 1 \cdot (-1) + \underset{\substack{\uparrow \\ k_3}}{2} \cdot 1 \times 1 + \underset{\substack{\uparrow \\ k_4}}{1} \times 1 \cdot (-4) \right) = 0$$

$$a_{A_2} = 0$$

$$a_{B_1} = \frac{1}{12}\left(\underset{4}{1 \times 1 \times 4} + \underset{2}{2 \times (-1)(-1)} + \underset{2}{2 \times 1 \times 1} + \underset{4}{1 \times (-1)(-4)} \right) = 1$$

$$a_{B_2} = a_{B_1}$$

$$a_{E_1} = \frac{1}{12}\left(\underset{8}{1 \times 2 \times 4} + \underset{-2}{2 \times 1 \times (-1)} + \underset{-2}{2 \times (-1) \times 1} + \underset{+8}{1 \times (-2) \times (-4)} \right)$$

$$= \underline{1}$$

$$a_{E_2} = \frac{1}{12}\left(\underset{8}{1 \times 2 \times 4} + \underset{+2}{2(-1)(-1)} + \underset{-2}{2(-1) \times 1} + \underset{-8}{1 \times 2 \times (-4)} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 \otimes E_2 = B_1 \oplus B_2 \oplus E_1}$$

2.b)

Lever la dégénérescence : $\chi^{(j)} = \sum_\nu a_\nu \chi^{(\nu)}$, $a_\nu = \langle \chi^{(j)}, \chi^{(\nu)} \rangle$

Caractère de SO(3) : $\chi^{(j)} = \dfrac{\sin[(j+1/2)\varphi]}{\sin[\frac{1}{2}\varphi]}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Ici $j = 1 \Rightarrow \chi^{(j)} = \dfrac{\sin\frac{3}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = 1 + 2\cos\varphi \overset{*}{=} \begin{array}{cccccc} 0^\circ & 60^\circ & 120^\circ & 180^\circ & 180^\circ & 180^\circ \\ (3, & 2, & 0, & -1, & -1, & -1) \end{array}$

$a_{A_1} = \frac{1}{12}\left[\underbrace{1\times 1\times 3}_{3} + \underbrace{2\times 1\times 2}_{+4} + 0 + \underbrace{1\times 1\times(-1)}_{-1} + \underbrace{3\times 1\times(-1)}_{-3} + \underbrace{3\times 1\times(-1)}_{-3}\right]$

$= 0$

$a_{A_2} = \frac{1}{12}\left[3 + 4 + 0 - 1 + 3 + 3\right] = 1$

$a_{B_1} = \frac{1}{12}\left[\underbrace{1\times 1\times 3}_{3} + \underbrace{2\times(-1)\times 2}_{-4} + \underbrace{0}_{+0} + \underbrace{1\times(-1)(-1)}_{+1} + \underbrace{3\times 1\times(-1)}_{-3} + \underbrace{3\times(-1)\times(-1)}_{+3}\right]$

$= 0$

$a_{B_2} = 0$

$a_{E_1} = \frac{1}{12}\left[1\times 2\times 3 + 2\times 1\times 2 + 0 + 1\times(-2)(-1)\right] = 1$

$a_{E_2} = \frac{1}{12}\left[1\times 2\times 3 + 2\times(-1)\times 2 + 0 + 1\times 2\times(-1)\right] = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} D^{(1)} = A_2 \oplus E_1 \\ \hline 3 \rightarrow 1 + 2 \end{array}}$$

* Alternativement : Repr. vectorielle $D^{(1)}$: $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

pour $\theta = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 180^\circ, 180^\circ$

$\chi^{(1)}_{(\theta)} = \mathrm{Tr}\left[R(\theta)\right] = 1 + 2\cos\theta$