

EXAMEN 2011/2012

1. Le groupe D_5

Le groupe diédral $D_5 = \langle c, b \rangle$ avec $c^5 = b^2 = (bc)^2 = e$ est le groupe de symétrie d'un pentagone régulier.

- (a) Décrivez les éléments c et b à l'aide d'une figure.
- (b) Identifiez tous les éléments du groupe. Combien d'éléments y a-t-il ?
- (c) Rappelez le théorème de Lagrange. Combien de sous-groupes propres de D_5 y a-t-il ?
- (d) Déterminez les classes de conjugaison du groupe D_5 .
- (e) Combien de représentations irréductibles y a-t-il ?
- (f) Quelles sont les dimensions de ces représentations irréductibles ?
- (g) Construisez la table de caractères.

Pistes :

- Commencez avec la première ligne et la première colonne.
- Pour la deuxième ligne utilisez le fait que la représentation est abélien.
- Puis après on peut fixer la dernière colonne.
- Finalement, déterminez les caractères manquants dans les lignes ≥ 3 .

Application numérique : $2 \cos(2\pi/5) \approx 0,618 = 1/G$, $2 \cos(4\pi/5) \approx -1,618 = -G$ où $G = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or.

2. Le groupe D_6

La table de caractères de D_6 est :

D_6	E	$2C_6$	$2C_6^2$	C_6^3	$3C_2$	$3C_2'$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	1	-1	-2	0	0
E_2	2	-1	-1	2	0	0

- (a) Utilisez cette table pour trouver la série de Clebsch-Gordan de la représentation $E_1 \otimes E_2$ de D_6 .
- (b) Expliquez comment la triple dégénérescence d'un orbital atomique $l = 1$ est levée, si la symétrie $SO(3)$ est réduite à D_6 par un environnement cristallin.