

ENTROPIE DES TROUS NOIRS :
UNE QUESTION CENTRALE DE PHYSIQUE FONDAMENTALE

Thermodynamique et relativité générale : vers la théorie des cordes

Une initiation en 10 pages à l'usage des débutants

Aurélien BARRAU et Chloé MUTEAU-JAOUEN

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie

Table des matières

1	Introduction	1
2	Les idées de la relativité générale	2
2.1	Principe d'équivalence	2
2.2	Equations d'Einstein	3
3	Qu'est-ce qu'un trou noir	4
3.1	La métrique de Schwarzschild	4
3.2	Propriétés	4
4	La problématique de l'entropie	6
5	Quelques pistes d'investigations	7
5.1	Entropie évaporée	7
5.2	Entropie et théorie des cordes	8
6	Conclusion	10
A	Annexe sur le tenseur de Riemann	12
B	Annexe sur l'action de Nambu-Goto en théorie des cordes	14

L'introduction et la conclusion de ce bref rapport (ne supposant aucune connaissance préalable de la relativité générale) sont écrites en anglais pour les étudiants étrangers.

1 Introduction

It is almost a century since the year 1905, in which the principle of relativity and the hypothesis of the quantum radiation were introduced. It has taken most of that time to synthesize the two into the modern quantum theory of fields and the standard model of particle phenomena. Although there is undoubtedly more to be learned both theoretically and experimentally, it seems likely that we know most of the basic principles which follow from combining the special theory of relativity with quantum mechanics. By contrast, in the 80 years that we have had the general theory of relativity, nothing comparable has been learned about the quantum theory of gravitation. The methods that were invented to quantize electrodynamics, which were so successfully generalized to build the standard model of particle physics, prove wholly inadequate when applied to gravitation. The subject is riddled with paradox and contradiction, the paradigm of quantum field theory almost certainly has to be replaced. As it seems very unlikely that the usual incremental increase of knowledge from a combination of theory and experiment will ever get physicists to the Planck scale, the best hope to find the right way to go is probably a profound examination of those paradox and contradictions through *gedanken* experiments.

Such a strategy has worked in the past. The earliest origins of quantum mechanics were not experimental atomic physics, radioactivity, or spectral lines. The puzzle which mostly started the whole thing was a contradiction between the principles of statistical thermodynamics and the field concept of Faraday and Maxwell. How was it possible, Planck asked, for the infinite collection of radiation oscillators to have a finite specific heat? In the case of special relativity it was again a conceptual contradiction which opened the way when Einstein realized that an observer moved along with a light beam would see a static but spatially varying electromagnetic field whereas there is no such a solution to Maxwell equations! The development of the general theory of relativity from the principle of equivalence and the free falling observer is also a matter of historical fact. In each of these cases the consistency of readily observed properties of nature which had been known for many years required revolutionary shifts.

What known properties of nature should now be looked to, and which paradox is best suited to the purpose of building a quantum theory of gravity? The two main theories –general relativity and quantum mechanics– lead to a very serious clash in one specific and particular situation which, once again, involves statistical thermodynamics in an essential way : the entropy of black holes. The paradox was discovered by Jacob Bekenstein and turned into a serious crisis by Stephen Hawking. Bekenstein

realized that if the second law of thermodynamics was not to be violated in the presence of a black hole, it must possess an intrinsic entropy (so that the entropy of the body falling inside the hole does not "disappear" from the Universe). This in itself is a source of paradox as nothing is simpler in Nature than a black hole (were could the microstates come from?). But Hawking added to the puzzle when he discovered that a black hole will radiate its energy in the form of a Planckian black body radiation. Eventually the black hole must completely evaporate. Hawking then raised the question of what becomes of the quantum correlations between matter outside the black hole and matter that falls behind the horizon. Otherwise stated, the existence of black holes inevitably causes a loss of quantum coherence and breakdown of one of the basic principle of quantum mechanics : the evolution of pure states to pure states.

String theory, as a candidate quantum theory of gravity, can solve the paradox of black hole thermodynamics. Nevertheless, quite a lot of work still remains to be done and the theory is far from being established and free of problems. In this brief report, the basics of general relativity will be drawn so as to allow a serious definition of what a black hole really is. The emphasis will be more on physical concepts rather than on technical computations. The Bekeinstein idea will be briefly discussed together with the way string theory can help solving this puzzle. Some research directions currently investigated will also be mentioned in the last section.

2 Les idées de la relativité générale

Nous proposons dans ce chapitre de présenter de façon simple et aussi "intuitive" que possible les idées fondatrices de la théorie relativiste du champ de gravitation. Dans tout ce mémoire nous utilisons (sauf mention contraire), conformément aux usages de cette physique, les unités naturelles : $\hbar = k = G = c = 1$. La sommation d'Einstein est toujours supposée sur les indices répétés.

2.1 Principe d'équivalence

La propriété la plus remarquable du champ gravitationnel est sans doute la suivante : **tous les corps, quelles que soient leurs masses, s'y meuvent de façon identique** à conditions initiales données (en résumé : dans $m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$, les m se simplifient, ce qui ne serait bien-sûr pas le cas dans un champ électrostatique par exemple). Cette remarque permet de comprendre qu'il est possible de décrire la gravité en laissant les corps libres mais en accélérant le référentiel dans lequel ils se trouvent.

Les caractéristiques du mouvement dans un référentiel non inertiel correctement choisi sont donc les mêmes que dans un référentiel d'inertie où règne un champ de gravitation. Ce point, qui peut sembler de simple bon sens, est l'énoncé du **principe d'équivalence**¹. Par un choix convenable du référentiel, on peut donc assurer l'élimination du champ de gravitation **dans une région donnée** de l'espace, suffisamment petite. Il suffit d'animer le référentiel d'une accélération égale à celle qu'acquieserait une particule dans cette zone (quelle que soit sa masse, c'est le point clef). C'est une démarche locale –d'où le concept de courbure– car les champs gravitationnels ne sont pas uniformes.

Dans un référentiel d'inertie utilisant un système de coordonnées cartésiennes, l'intervalle ds est défini en relativité restreinte par $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. L'intervalle, c'est sa propriété fondamentale, conserve sa forme lorsqu'on passe d'un référentiel d'inertie à un autre (*i.e.* lors d'une transformation de Lorentz). Mais si l'on passe à un référentiel non inertiel, l'intervalle n'a plus aucune raison de continuer à s'écrire ainsi. Il suffit de prendre une simple rotation uniforme pour se convaincre que le ds^2 obtenu ne se laisse pas réduire à une somme de carrés des différentielles, quelle que soit la transformation du temps. Dans un référentiel non inertiel, le carré de l'intervalle est une forme quadratique générale des différentielles des coordonnées, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, où les $g_{\mu\nu}$ sont des fonctions des coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3 et du temps x^0 . Ils déterminent toutes les propriétés géométriques et définissent la **métrique** de l'espace-temps. Dans un référentiel d'inertie utilisant

les coordonnées cartésiennes : $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$.

Le champ gravitationnel réel étant décrit comme le passage à un référentiel non inertiel, il entraîne une modification de la métrique de l'espace-temps. Cette conclusion extrêmement importante signifie que les propriétés **géométriques** de l'espace-temps (*i.e.* sa métrique) **sont déterminées par les phénomènes physiques et ne sont pas des propriétés immuables de l'espace et du temps**. La trame du monde n'est plus déterminée absolument mais devient une conséquence dynamique de son contenu.

La relativité générale ne pense plus la gravitation comme une force mais comme une déformation de la géométrie dans laquelle se meuvent les particules devenues libres.

¹ On ne distingue pas ici entre principe d'équivalence faible et principe d'équivalence fort qui, essentiellement, diffèrent par l'inclusion –ou non– des expériences gravitationnelles pour les situations considérées dans les référentiels en chute libre.

2.2 Equations d'Einstein

Deux enjeux principaux se présentent pour décrire le monde dans cette approche. D'une part, il faut formuler les lois de la physique *non-gravitationnelle* dans l'espace devenu courbe et, d'autre part, il faut comprendre comment la masse génère cette courbure.

Le premier point est assuré par le principe de covariance généralisé. Celui-ci stipule que les lois de la physique peuvent être exprimées sous forme tensorielle de façon à demeurer valables par transformation vers un référentiel accéléré et qu'elles sont compatibles avec la relativité restreinte dans un référentiel en chute libre. Techniquement, cela signifie simplement qu'il suffit de remplacer, dans les équations dynamiques invariantes de Lorentz, les dérivées par des dérivées covariantes pour obtenir des équations compatibles avec la relativité générale. La raison en est simple : en espace courbe, la dérivé partielle d'un vecteur n'est pas un tenseur. On peut le comprendre formellement en écrivant le passage d'un système de coordonnées x^μ à un système $x^{\mu'}$:

$$\partial_{\mu'} V^{\nu'} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \right) \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \cdot \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} V^\nu$$

où, clairement, le dernier terme viole la loi de transformation des tenseurs. Intuitivement il suffit de sentir que des variations des coordonnées des vecteurs (ce que mesure une dérivation) vont être induites non seulement par les variations physiques mais aussi, de façon artéfactuelle, par le caractère curviligne du système de coordonnées. La dérivé covariante permet de s'affranchir de ces contradictions et de réécire les lois de la physique en tenant compte de la gravité. Par exemple, les équations de Maxwell s'écrivent maintenant $F_{;\mu}^{\mu\nu} = j^\nu$ et $F^{[\mu\nu;\sigma]} = 0$ où j^ν est le quadri-courant, $F^{\mu\nu}$ est le champ tenseur, le crochet représente les permutations et le point-virgule désigne la dérivation covariante².

Le second enjeu fondamental est l'objet des équations d'Einstein. Il n'est évidemment pas possible de procéder pour le champ gravitationnel en utilisant le principe de covariance généralisée dans la mesure où, à la différence des lois de l'électrodynamique, la gravité universelle de Newton n'est pas compatible avec la relativité restreinte. D'une part, il faut construire un objet qui rende compte du **contenu** de l'espace temps. C'est le tenseur énergie-impulsion, noté $T_{\mu\nu}$, qui renseigne sur la densité et la pression³ au point d'espace-temps considéré. D'autre part, il faut disposer d'un objet qui rende compte de la **géométrie** de l'espace temps. C'est le tenseur d'Einstein, noté $G_{\mu\nu}$, qui renseigne sur la structure⁴ de la trame spatio-temporelle. L'hypothèse d'Einstein consiste à supposer une simple proportionalité entre ces deux tenseurs, avec un facteur numérique qui permet de retrouver la loi de Newton à la limite des champs faibles [1, 2]. Soit :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}.$$

Autrement dit, la matière dicte la courbure et la courbure dicte, en retour, le mouvement de la matière. D'un point de vue prosaïque, on peut considérer que les équations d'Einstein consistent un système d'équations différentielles (non-linéaires) qui permet de calculer la métrique lorsque le contenu de l'espace-temps est connu.

²Pour être tout-à-fait précis : $V_{;\mu}^\nu \equiv \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$ où $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu})$. Il est intéressant de noter que les coefficients de connexion $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ ne sont pas des tenseurs de rang 3 bien qu'il présentent 3 indices libres puisqu'ils permettent, justement, de "soustraire" la partie non tensorielle de la dérivée partielle en espace courbe.

³Il n'est pas utile, pour ce rapport, de décrire en détails ses composantes. Il suffit de noter que, dans un bon référentiel et pour un fluide isotrope on a : $T_{00} = \rho$ et $T_{ii} = p$ où ρ est la densité, p la pression et l'indice i varie de 1 à 3 (*i.e.* sur les composantes spatiales).

⁴Il se construit à partir du tenseur métrique et du tenseur de Riemann (qui, lui même, fait intervenir les dérivées de la métrique via les coefficients de connexion qui interviennent dans la définition de la dérivée covariante, *c.f.* Annexe A) suivant des hypothèses relativement simples de linéarité et de naturalité.

3 Qu'est-ce qu'un trou noir

3.1 La métrique de Schwarzschild

La forme la plus générale d'une métrique statique à symétrie sphérique est

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 - e^{-2\Lambda} dr^2 \quad (1)$$

où Φ et Λ sont deux fonctions de r (puisque, par hypothèse, on suppose ici $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$) qu'il s'agit de déterminer. Dans tout ce chapitre, on omet la partie angulaire qui ne recèle aucune information physique fondamentale.

Le tenseur d'Einstein étant construit à partir de la métrique et de ses dérivées, il est possible de calculer explicitement chacune de ses composantes en fonction de Φ et de Λ . Le développement est fastidieux mais ne fait intervenir aucune difficulté physique particulière. Il conduit, pour la première composante, à :

$$G_{00} = r^{-2} \frac{d}{dr} [r (1 - e^{-2\Lambda})].$$

Par ailleurs, $T_{00} = \rho$ (par construction du tenseur énergie-impulsion dans le repère où $T_{\mu\nu}$ est diagonal). On peut alors noter $2m(r) = r (1 - e^{-2\Lambda})$, ce qui revient à utiliser la fonction m au lieu de la fonction Λ . Il s'ensuit $e^{2\Lambda} = (1 - \frac{2m}{r})^{-1}$ et $G_{00} = 2 \frac{dm}{dr} r^{-2}$. Jusqu'à maintenant, les arguments utilisés ont été purement géométrique (nous avons contraint la forme générale de la métrique à l'aide des symétries supposées). Pour donner un sens physique à cette fonction $m(r)$, il faut utiliser les équations d'Einstein. La composante 00 de ces dernières s'écrit : $G_{00} = 8\pi T_{00}$. Soit :

$$2 \frac{dm}{dr} r^{-2} = 8\pi\rho \Rightarrow \frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 \Rightarrow m = \int 4\pi\rho r^2 dr.$$

Autrement dit, la fonction m n'est pas arbitraire mais représente bien la **masse** de l'objet décrit ! Notons M la masse totale contenu dans le volume considéré. La métrique s'écrit donc :

$$ds^2 = e^{2\Phi} dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \right) dr^2.$$

En exploitant de la même façon les autres composantes du tenseur d'Einstein, on montre que $e^{2\Phi} = (1 - 2M/r)$. Soit :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \right) dr^2.$$

Ce sont les grande étapes de la construction de la **métrique de Schwarzschild** qui décrit la structure de l'espace-temps autour de tout corps statique à symétrie sphérique.

3.2 Propriétés

Il est clair que la valeur particulière $r = 2M$, notée R_s , joue un rôle particulier dans cette écriture. Moins en ceci qu'il apparaît une divergence⁵ qu'en cela que pour $r < R_s$ les facteurs de dt^2 et de dr^2 changent de signe (la coordonnée temps devient de type espace et réciproquement). Si toute la masse M est concentrée à l'intérieure de la sphère de rayon R_s , l'objet considéré est un **trou noir** et cette sphère définit l'**horizon**⁶. On peut noter parmi les conséquences physiques immédiates de cette métrique :

⁵Nous montrerons qu'elle n'est qu'une singularité apparente liée au système de coordonnées.

⁶Il est intéressant de noter que l'on retrouve cette valeur en utilisant des arguments de mécanique classique : si on considère un corps sphérique de rayon R pour lequel la vitesse de libération est égale à la vitesse de la lumière (*i.e.* en suivant une approche Newtonienne, celle des astres occlus du marquis de Laplace [3]), on obtient en égalant l'énergie potentielle à l'énergie cinétique $G \frac{mM}{R_s} = \frac{mc^2}{2} \Rightarrow R_s = \frac{2GM}{c^2} = 2M$ en unités naturelles.

- les comportements asymptotiques sont corrects : quand $r \rightarrow 0$ (loin de la source du champ) ou $M \rightarrow 0$ (pour des masses faibles) elle tend vers la forme minkovskienne de la relativité restreinte.
- à distance finie d'une masse finie, elle montre néanmoins le caractère **non-euclidien** de l'espace-temps.
- lorsque $dr = 0$ l'intervalle ds est le temps propre $d\tau$ et on obtient $d\tau = \sqrt{1 - 2M/r} dt$. Cela signifie que le temps de Schwarzschild dt (*i.e.* mesuré à l'infini) diffère du temps mesuré localement. Il s'ensuit, par exemple, le phénomène de décalage gravitationnel vers le rouge : la période d'une onde électromagnétique vue à l'infini est supérieure à sa valeur démission dans un champ de gravité.
- lorsque $dt = 0$ l'intervalle ds est la distance propre. Pour les mêmes raisons, elle diffère de la variation de coordonnée dr de Schwarzschild (qui représente en fait la circonférence réduite⁷), exhibant le fait que la circonférence d'un cercle n'est plus égale à 2π fois son rayon. A la surface du Soleil, l'écart relatif n'est que de 10^{-6} environ mais il peut devenir arbitrairement élevé au voisinage de l'horizon d'un trou noir.
- en exprimant la vitesse d'un corps (lâché sans vitesse à l'infini) au niveau de l'horizon du trou noir dans les coordonnées de Schwarzschild et dans les coordonnées locales, il apparaît que celle-ci est nulle dans le premier cas et égale à la vitesse de la lumière dans le second cas. L'observateur lointain ne "voit" donc jamais un corps entrer dans un trou noir : le "temps" se fige à l'horizon.

Pour la problématique de l'entropie, la propriété la plus importante des trous noirs est que rien ne peut s'en échapper (en négligeant pour le moment les effets quantiques). On peut le montrer explicitement. Considérons trois systèmes de coordonnées : celui de Schwarzschild, celui de l'observateur "coquille" (r_{coq} et t_{coq}) situé à distance fixe et finie du trou noir et celui de l'observateur en chute libre (r_{chute} et t_{chute}). Clairement, par construction, $dr_{coq} = dr/(1 - 2M/r)^{1/2}$ et $dt_{coq} = (1 - 2M/r)^{1/2} dt$. Pour passer des coordonnées "coquilles" à celles de l'observateur en chute libre, il suffit d'écrire la transformation de Lorentz entre les deux référentiels animés d'une vitesse relative v_{rel} : $dt_{chute} = -v_{rel}\gamma dr_{coq} + \gamma dt_{coq}$ où γ est le facteur de Lorentz. En exprimant, dans cette dernière relation, les coordonnées coquilles en fonction des coordonnées de Schwarzschild, on obtient immédiatement

$$dt = \frac{dt_{chute}}{\gamma(1 - \frac{2M}{r})^{1/2}} + \frac{v_{rel}dr}{1 - \frac{2M}{r}}$$

puis, en explicitant le facteur γ et en reportant la valeur de dt ainsi obtenue dans l'expression générale de la métrique de Schwarzschild⁸ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_{chute}^2 - 2 \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt_{chute} dr - dr^2.$$

A ce niveau, une remarque fondamentale s'impose : la divergence de la métrique en $r = 2M$ a disparu. Il ne s'agissait que d'une singularité de coordonnées qui ne représentait pas une réelle pathologie de la structure de l'espace-temps. Intuitivement, on peut penser une analogie avec les divergences qui pourraient apparaître au pôle quand on normalise par des surfaces en utilisant les coordonnées sphériques : ce n'est pas un effet topologique réel mais un artéfact du choix de maillage. En revanche, la singularité en $r = 0$ représente bien une divergence intrinsèque des fonctions métriques ne saurait être évitée, quelles que soient les coordonnées.

Pour la lumière, comme en relativité restreinte, $ds = 0$. Soit, en divisant l'expression précédente par dt_{chute}^2 :

$$\frac{dr^2}{dt_{chute}^2} + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} \frac{dr}{dt_{chute}} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0.$$

⁷On peut le montrer aisément si l'on écrit la partie angulaire de la métrique jusqu'alors omise qui s'exprime comme $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$.

⁸Le seul point un peu long de ce calcul consiste à montrer que $v_{rel} \equiv \frac{dr_{coq}}{dt_{coq}} = -(2M/r)^{1/2}$. La manière la plus simple de l'obtenir consiste sans doute à écrire la conservation de l'énergie [6].

C'est une équation du second degré en dr/dt_{chute} dont les solutions sont :

$$\frac{dr}{dt_{chute}} = - \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2} \pm 1.$$

Si $r < 2M$, *i.e.* dans le trou noir, dr/dt_{chute} est donc **toujours négatif**, ce qui signifie que même le flash lumineux qui serait émis "vers l'extérieur" ne peut que se rapprocher du centre et ne peut donc s'extraire du trou noir. Le point central est ainsi démontré : rien ne peut, classiquement, échapper à la zone limitée par l'horizon.

4 La problématique de l'entropie

Un aspect fascinant des trous noirs a trait à leur **invariance d'échelle** [4]. A la différence d'une planète ou d'une étoile –par exemple– qui ne peuvent exister que dans des gammes de masses données, les trous noirs peuvent exister à toutes les masses⁹ et présentent les mêmes propriétés. Ceci vient non seulement de ce que la relativité générale ne présente aucune échelle caractéristique (ce qui était déjà vrai avec la gravitation newtonienne) mais aussi de ce que le trou noir perd l'information sur la matière (qui, elle, possède nécessairement des échelles) dont il est issu. Par ailleurs, on peut montrer [5] qu'un trou noir est entièrement caractérisé par trois paramètres seulement : sa masse, son moment angulaire et sa charge¹⁰. Il est exhaustivement décrit par la métrique de Kerr-Newman dont la version de Schwarzschild présentée au paragraphe précédent est un cas particulier pour les objets neutre et dépourvus de rotation. Le fait qu'un trou noir soit ainsi décrit par peu de paramètres laisse penser qu'une approche de type thermodynamique peut être appropriée. Celle-ci requiert l'introduction d'une **entropie**. Bekenstein a remarqué que, si la seconde loi de la thermodynamique devait demeurer valable en présence d'un trou noir, il fallait en effet que celui-ci possède une entropie qui augmente lorsqu'un corps tombe de l'autre côté de l'horizon (pour, au moins, compenser l'entropie du corps en question qui est perdu pour l'Univers extérieur au trou noir). Mais, par ailleurs, Hawking avait montré un théorème fondamental qui prouve que l'air d'un trou noir ne peut pas diminuer [7]. D'où l'idée de postuler une entropie S proportionnelle à l'aire A du trou noir. Le coefficient de proportionnalité κ est fixé par une autre découverte de Hawking : l'évaporation des trous noirs.

Si, comme on l'a montré, rien ne peut s'extraire d'un trou noir à l'ordre classique, il n'en va pas de même dans la description quantique. A l'instar de l'effet tunnel qui permet à un quantum de franchir une barrière de potentiel qui lui serait classiquement interdite, le trou noir peut (et doit) perdre sa masse. Intuitivement, on peut imaginer un effet de marée du champ gravitationnel sur les paires de particules créées au voisinage de l'horizon par fluctuations quantiques du vide. Si la gravité (ou plus exactement sa variation) est suffisamment intense, la paire peut être brisée et le travail fourni par le champ permet au corpuscule virtuel de devenir réel¹¹. Il s'ensuit un flux de particules en provenance du trou noir pour l'observateur à l'infini. Hawking a montré [9] que le spectre est de type thermique avec une température $T = 1/(8\pi M)$. Il est intéressant, par plaisir esthétique-scientifique, d'écrire cette formule en unités standards,

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k M}$$

car il s'agit sans doute de la seule relation physique faisant intervenir toutes les constantes fondamentales (la constante de Planck, la constante de Boltzmann, la constante de Newton et la vitesse

⁹Il existe en fait une limite inférieure conceptuelle autour de la masse de Planck $M_{Pl} \approx 10^{-5}$ g.

¹⁰Il n'y a pas de contradiction entre la présence de l'horizon qui *écran* l'intérieure du trou noir et l'existence d'une charge électrique mesurable à l'extérieur. Les processus statiques en question font intervenir des particules virtuelles qui ne sont pas soumises à cette "barrière". De même, lorsqu'on le décrit en théorie des champs, un trou noir n'empêche évidemment pas les gravitons de se propager par-delà l'horizon, sans quoi son effet gravitationnel ne pourrait être ressenti!

¹¹Cette description imagée n'est pas infondée mais ne permet pas de comprendre en profondeur pourquoi la masse du trou noir **diminue** dans ce processus. Sauf à se contenter d'un argument heuristique de conservation de l'énergie, cela ne peut se voir qu'en écrivant en détails l'espace de Fock dans le vide de Unruh [8].

de la lumière), ce qui témoigne à l'évidence du caractère très spécifique de ce type de processus dans l'élaboration d'une théorie "grand unifiée" de la physique. D'un point de vue pratique, l'évaporation de Hawking ne touche pas significativement les trous noirs stellaires et supermassifs dont les temps de vie sont très supérieurs à l'âge de l'Univers (et qui présentent une température de Hawking inférieure à celle du rayonnement de fond cosmologique) mais demeure conceptuellement fondamentale.

En écrivant donc $S = \kappa A$ suivant la conjecture de Bekenstein et $1/T = dS/dE$, il vient $8\pi M = d(\kappa 4\pi(2M)^2)/dM$ soit $\kappa = 1/4$ et

$$S = \frac{A}{4} \quad \text{ou, en units standards, } S = \frac{A}{4l_{Pl}^2}$$

où $l_{Pl} \approx 10^{-33}$ cm est la longueur de Planck. Ce concept d'entropie des trous noirs joue un rôle tout à fait central dans presque toutes les tentatives d'élaboration de théories physiques au-delà du *modèle standard*. Il permet de proposer un second principe généralisé de la thermodynamique en présence d'un trou noir [10] : *la somme des entropie du trou noir et de la matière extérieure à celui-ci ne peut pas diminuer*. Mais rien ne permet ici de comprendre l'origine physique des microétats associés à cette entropie et moins encore de solutionner le paradoxe de Hawking qui souligne le fait qu'un trou noir évaporé sous forme de rayonnement est devenu un état *mixte* tandis qu'il pouvait avoir été formé par un état *pure*, violant ainsi l'unitarité de la mécanique quantique¹².

5 Quelques pistes d'investigations

5.1 Entropie évaporée

Pour corroborer l'approche de Bekenstein, de très nombreuses directions d'étude ont été proposées. Plus de 700 articles ont été publiés sur le sujet au cours des deux dernières décennies. Une voie importante consiste à remarquer qu'à l'issue de son évaporation le trou noir s'est transformé en particules (essentiellement relativistes) et en rayonnement. Or, précisément, l'entropie de ce rayonnement peut être explicitement calculée. La relation de Planck [12], $S = (\langle n \rangle \pm 1) \ln(1 \pm \langle n \rangle) - \langle n \rangle \ln \langle n \rangle$, permet d'évaluer l'entropie moyenne d'un mode bosonique (signes +) ou fermionique (signes -) en fonction du nombre moyen $\langle n \rangle$ de quanta par mode. Ce dernier pouvant être directement déduit du spectre de Hawking, il est possible de calculer l'entropie "évaporée" par un trou noir. Dans deux articles célèbres [13, 14], Zurek et Page ont procédé explicitement à ce développement pour conclure que, suivant les détails de la nature des particules émises, l'entropie évaporée était voisine de 1.5 fois l'entropie attribuée par Bekenstein au trou noir. Ce résultat, légèrement supérieur à l'unité, laisse entrevoir une faible irréversibilité du processus. Il est surtout tout à fait remarquable, et très rassurant, qu'une approche aussi radicalement différente de la vision "topologique" de Bekenstein conduise à un résultat néanmoins si proche. Par une expérience de pensée où le trou noir serait placé dans une enceinte à la même température que lui, Zurek a même démontré que le processus deviendrait alors strictement réversible, ce qui prouve la réciproque de la conjecture de Bekenstein.

Une voie de recherche aujourd'hui prometteuse pourrait consister à évaluer cette entropie évaporée dans des extensions de la relativité générale. L'approche de Hawking est dite *semi-classique*, ce qui signifie que les champs sont quantifiés dans un espace-temps courbe considéré lui-même comme une structure classique et continue¹³. Or, dans la région de Planck où s'achève l'évaporation, il est probable qu'il faille recourir à une approche gravitationnelle différente qui soit plus fondamentalement en accord avec les prescriptions quantiques. Une telle théorie –dans sa version achevée– n'existe pas encore (la section suivante présente une direction fructueuse dans cette quête) mais des développements sont d'ores et déjà envisagés et, parmi ceux-ci, la gravité de

¹²Ce point important n'est pas développé dans le présent rapport dévolu à l'étude de l'entropie à proprement parler. On pourra y trouver une excellente introduction dans [11].

¹³Plus exactement, il est supposé constituer un *manifold*, c'est-à-dire un espace topologique localement euclidien.

Gauss-Bonnet. Les équations d'Einstein présentées dans la première section de ce rapport peuvent également être formulées sous forme lagrangienne. L'action s'écrit alors $S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^D x$ où R est le scalaire de Ricci¹⁴, g est le déterminant du tenseur métrique et D est le nombre de dimensions. La variation de S par rapport à la métrique conduit exactement aux équations d'Einstein. Intuitivement, le terme R représente la courbure (comme il se doit pour une théorie géométrique) et la présence du $\sqrt{-g}$ permet simplement d'obtenir un scalaire car l'élément différentiel $d^D x$ n'est pas invariant par changement de système de coordonnées (pour la simple raison que g se transforme comme l'inverse du carré du Jacobien [15], ce qui permet de "compenser" la transformation du $d^D x$). La gravité de Gauss-Bonnet se fonde sur l'action suivante [16] :

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^D x \sqrt{-g} \{ R + \lambda (R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} - 4R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + R^2) \}.$$

Sans entrer dans les détails techniques, il suffit ici de voir que des termes d'ordres supérieurs en courbure ont été ajoutés à la densité lagrangienne (la valeur des coefficients qui interviennent devant les différentes contractions du tenseur de Riemann est peu importante conceptuellement et tient à des raisons subtiles de forme des propagateurs dans la théorie de champ associée [17]), ce qui est légitime quand on souhaite, justement, rendre compte du comportement dans le domaine des courbures élevées. Ces "corrections" à la relativité générale sont négligeables en champ faible mais peuvent devenir dominantes dans la région de Planck. Il n'était jusqu'alors pas possible de calculer l'entropie évaporée par les trous noirs dans cette théorie car, si la modification de température induite par ces termes est simple à prendre en compte, un élément central manquait : les facteurs de corps gris. En fait, le spectre de Hawking n'est pas exactement thermique (et c'est pourquoi ce ne sont pas des facteurs de corps noir !). D'une part, le processus étant fondamentalement quantique, il existe un couplage avec le moment angulaire des particules. D'autre part, lorsque celles-ci sont émises, encore faut-il prendre en compte la forme complexe de la métrique pour évaluer la probabilité effective de propagation de la particule jusqu'à l'observateur. Ces deux effets (nommés potentiel centrifuge et rétrodiffusion gravitationnelle) sont pris en compte par les facteurs de corps gris. Le calcul de ces facteurs requiert la résolution effective des équations de la mécanique quantique relativiste (Klein-Gordon pour les scalaires, Dirac pour les fermions) en espace courbe. Cette démarche ayant été entreprise récemment [18], il est maintenant possible d'évaluer l'entropie évaporée par les trous noirs de Gauss-Bonnet et la quantification de l'évolution du taux d'irréversibilité en fonction de la prise en compte des termes quadratiques en courbure pourrait permettre un nouvel éclairage sur cette question centrale de physique théorique.

5.2 Entropie et théorie des cordes

S'il n'existe pas aujourd'hui de modèle avéré de gravitation quantique¹⁵, la théorie des cordes constitue une voie très fructueuse. C'est une théorie quantique, par construction. C'est une théorie gravitationnelle car le spectre des particules qu'elle génère contient un boson sans masse de spin-2, le graviton. C'est une théorie d'unification car elle décrit toutes les entités physique à partir des modes de vibration d'une unique classe de cordes élémentaires qui deviennent les objets fondamentaux. C'est une théorie qui –à la différence de la mécanique quantique et de la relativité générale– contraint la dimensionnalité de l'espace-temps : la structure interne du modèle **impose** 10 dimensions (pour les supercordes, qui constituent la version la plus réaliste [19]). Nous nous proposons de tenter de montrer ici de façon simple comment la théorie des cordes permet de retrouver –approximativement– l'entropie de Bekenstein. Dans cette partie, nous nous intéressons aux ordres de grandeur et omettons la plupart des coefficients numériques voisins de l'unité. En revanche, la méthode utilisée se fonde sur une variation de la constante de gravitation, il n'est plus possible de fixer $G = 1$.

Tout d'abord, la théorie des cordes n'ayant de sens que dans un espace à $D > 4$ dimensions,

¹⁴ $R = R^\lambda{}_\lambda = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ où $R_{\alpha\beta} = R^\lambda{}_{\alpha\lambda\beta}$ et $R^\sigma{}_{\mu\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha \Gamma^\sigma{}_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\sigma{}_{\mu\alpha} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\beta} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha}$, *c.f.* Annexe A.

¹⁵ Il n'existe d'ailleurs certainement aucun modèle scientifique avéré, par définition de la pensée scientifique.

nous donnons la généralisation de l'entropie de Bekenstein dans ce contexte :

$$S_{Bekenstein} = \frac{A}{4l_{Pl}^{D-2}} \approx M^{\frac{D-2}{D-3}} G^{\frac{1}{D-3}}$$

où l'on a simplement écrit que l'air d'une sphère est proportionnelle à son rayon à la puissance $(D - 2)$ avec R_s déduit d'une métrique de Schwarzschild à D dimensions (G est la constante de Newton à D dimensions et M est la masse du trou noir). Nous allons maintenant exposer les grandes lignes de la démarche permettent de démontrer cette expression (qui est arbitrairement admise en relativité générale) dans le cadre de la théorie des cordes.

Deux relations importantes entre les grandeurs fondamentales doivent être établies préalablement à la dérivation proprement dite de l'entropie de Bekenstein. Nous en donnons ici un aperçu heuristique. Avec \hbar , c et G , on peut construire une longueur : $l_{Pl} \approx \sqrt{\hbar G/c^3}$. En théorie des cordes, on peut aussi former une longueur fondamentale, notée l_s , en utilisant les constantes pertinentes : \hbar , c et α' . Cette grandeur α' , nommée paramètre de pente, est définie comme l'inverse de la tension T_0 des cordes (elle est donc homogène, en unités naturelles, au carré d'une longueur). Elle joue ici un rôle fondamental (la constante de Newton en revanche n'est plus un paramètre de base *a priori* puisqu'on cherche à construire une théorie gravitationnelle) et permet de définir une nouvelle longueur fondamentale $l_s \approx \hbar c \sqrt{\alpha'} \approx \sqrt{\alpha'}$ en unités naturelles. En électromagnétisme, la constante de couplage sans dimension $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c)$ contrôle l'intensité des interactions. Appelons g l'équivalent en théorie des cordes.

La constante de Newton G à D dimensions est homogène à une longueur à la puissance $D - 2$ (cela s'établit immédiatement en écrivant proprement le théorème de Gauss). Or, du point de vue effectif (c'est-à-dire sans tenir compte de la microphysique sous-jacente), la longueur fondamentale est l_{Pl} . On attend donc $G \approx l_{Pl}^{D-2}$. D'autre part, si l'on suit l'approche des cordes, il faut faire apparaître l'intensité du couplage (sans couplage entre les cordes, pas de gravité). Comme toute interaction correspond (à l'ordre dominant) à l'émission puis à l'absorption d'un quantum, c'est g^2 qui doit intervenir. Et la longueur pertinente est ici l_s . Soit $G \approx g^2 l_s^{D-2}$. En égalant ces deux expressions de G , on en déduit :

$$l_{Pl} \approx l_s g^{\frac{2}{D-2}} \quad (1).$$

Considérons maintenant un trou noir de masse M_0 dans une théorie de cordes présentant une constante de couplage g_0 . La métrique de Schwarzschild à D dimensions donne un rayon du trou noir¹⁶ $R_s \approx (M_0 G)^{\frac{1}{D-3}}$ (on retrouve bien –au facteur numérique 2 sciemment négligé– la valeur usuelle pour $D = 4$). Or, on vient de montrer que $G \approx g^2 l_s^{D-2}$. En utilisant cette valeur dans l'expression du rayon de Schwarzschild, on obtient donc immédiatement

$$\frac{R_s}{l_s} = (M g^2 l_s)^{\frac{1}{D-3}} \quad (2).$$

On utilise maintenant la méthode des variations adiabatiques qui consiste à changer la valeur de certains paramètres sans modifier l'entropie du système. En l'occurrence, on va diminuer la constante de couplage g , ce qui laisse bien invariante l'entropie du trou noir car celle-ci est une grandeur **intrinsèque**. La masse devient une fonction de g (soit $M(g)$) et on note la masse initiale $M_0 \equiv M(g_0)$. Or, l'entropie dépend de la masse via la grandeur sans dimensions $M \times l_{Pl}$ (les arguments des fonctions sont nécessairement sans dimensions donc M doit être multipliée par une longueur –homogène à l'inverse d'une masse en unités naturelles– qui ne peut être que la longueur de Planck qui est la seule échelle du problème). Soit $M \times l_{Pl} = cte$. En utilisant la relation (1), il vient donc

$$M(g) l_s g^{\frac{2}{D-2}} = M(g_0) l_s g_0^{\frac{2}{D-2}} \Rightarrow M(g) = M_0 \left(\frac{g_0^2}{g^2} \right)^{\frac{1}{D-2}} \quad (3).$$

¹⁶On admet ici cette expression. Elle s'obtient en résolvant les équations d'Einstein à D dimensions, ce qui est techniquement plus complexe mais conceptuellement analogue à ce qui a été exposé dans la première section de ce rapport.

Faisons maintenant $g \rightarrow 0$. D'après (2), on voit que $R_s \rightarrow 0$. Lorsque R_s devient de l'ordre de l_s (qui ne dépend pas de g et reste donc fixe dans cette expérience de pensée), la taille du trou noir devient comparable à la longueur fondamentale des cordes. Il devient donc lui-même une corde (puisque tout objet physique de taille égale à l_s doit être une corde par construction du modèle). Ceci advient pour $R_s \approx l_s$ ce qui, d'après (2), équivaut à $M(g)l_s \approx 1/g^2$. Soit, en utilisant la valeur de g extraîte de (3) :

$$M(g)l_s \approx \left(\frac{M(g)}{M_0} \right)^{D-2} \frac{1}{g_0^2}.$$

Or, d'après (1) et en utilisant $G \approx l_{Pl}^{D-2}$, on $1/g_0^2 \approx l_s^{D-2}/G_0$. En reportant cette valeur dans l'expression précédente, il vient :

$$M(g)l_s \approx \frac{M(g)^{D-2} l_s^{D-2}}{M_0^{D-2} G_0} \Rightarrow M(g)l_s \approx M_0^{\frac{D-2}{D-3}} G_0^{\frac{1}{D-3}} \quad (4).$$

Pour exploiter cette expression, reste maintenant à calculer l'entropie d'une corde. Pour cela il faut disposer de l'action fondamentale de la théorie des cordes, dite de Nambu-Goto (*c.f.* Annexe B), qui s'écrit pour une corde libre $S = -T_0 \int a dt$ où a est la longueur de la corde [19]. Pour une corde statique, la Lagrangien est l'opposé de l'énergie au repos (pas de terme cinétique dans le $L = T - V$), c'est-à-dire de la masse. Donc $-m = -T_0 a \Rightarrow m = T_0 a$. Soit, par définition de α' :

$$m \approx a/\alpha' \quad (5).$$

Cette relation nous dit en fait que la masse des cordes vient de leur tensions, ce qui est dépourvu d'analogie en physique classique. Imaginons cette corde construite en joignant ensemble des éléments de cordes ayant chacun la longueur fondamentale $l_s = \sqrt{\alpha'}$. Chaque corde élémentaire "pointe" dans l'une des $N = D - 1$ dimensions d'espace disponibles (car D inclut la dimension de temps). Le nombre de cordes élémentaires nécessaires pour former la corde de longueur a est $a/l_s = a/\sqrt{\alpha'}$. Le nombre de configuration est donc $\Omega \approx N^{\frac{a}{\sqrt{\alpha'}}}$, ce qui, compte-tenu de (5), conduit à $\Omega \approx N^{m\sqrt{\alpha'}} \approx e^{m\sqrt{\alpha'} \ln N}$. Soit une entropie $S_{corde} = \ln \Omega$:

$$S_{corde} \approx m\sqrt{\alpha'} \approx ml_s \quad (6)$$

où l'on utilise toujours les unités naturelles ($k=1$) et où l'on suppose $\ln N \approx 1$, ce qui est légitime avec $D = 10$ pour un calcul d'ordres de grandeur.

Or, on a montré que pour $g = g_0$, le trou noir devient une corde. On peut donc lui appliquer la relation (6) et utiliser la valeur de $M \times l_s$ calculée à la relation (4). Soit :

$$S_{corde} \approx M_0^{\frac{D-2}{D-3}} G_0^{\frac{1}{D-3}} \quad (4).$$

Comme la variation de g est isentropique, le résultat obtenu est en fait valide pour n'importe quel trou noir. Ce qui montre, par comparaison avec l'entropie de Bekenstein donnée au début de cette section :

$$S_{corde} \approx S_{Bekenstein}.$$

C'est un résultat majeur de théorie des cordes [19] qui constitue l'un des grands succès de ce modèle. Pour la première fois, une assise microphysique est donnée au concept d'entropie des trous noirs. Aujourd'hui, le résultat n'a été montré rigoureusement que pour certains types de trous noirs très particuliers [21] (dits *supersymétriques extrémaux*) et sa dérivation générale est l'un des enjeux importants des années à venir.

6 Conclusion

The existence of black hole entropy indicates the existence of microscopic degrees of freedom which are not present in the usual Einstein theory of gravity. It does not tell us what they are.

String theory does provide a microscopic framework for the use of statistical mechanics. In all cases the entropy of the appropriate string system agrees with the Bekenstein entropy. Although it is fair to point out that other approaches could also recover this result (*e.g.* loop quantum gravity [22]), it can probably be considered as a serious evidence in favour of string theory.

If string theory is indeed correct, this could lead to a new understanding of the profound nature of matter. Beyond this, it will probably induce a change of scientific paradigm. As special relativity was the first physical ground for gauge theories (it was **based** on symmetries), string theory could be the first attempt to give a scientific basis to the anthropic principle¹⁷. The reason for this is simply the fact that it was recently shown [23] that there is probably around 10^{500} different vacua (*i.e.* "laws of physics") expected in string theory. It makes nearly everything possible and it could very well be that our Universe looks the way it does just because if it were different it would be impossible for us to exist and to wonder this question! The huge number of string vacua together with the concept of pluri-universes allowed by the inflation theory, makes plausible this new idea.

Steven Weinberg, one of the fathers of modern particle physics, considers that we are now "living in the multiverse" [24]. A long story which, in a way, began with black hole entropy...

Références

- [1] L. Landau & E. Lifchitz, *Physique Théorique*, Moscou, Mir, Vol. II (1989)
- [2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, New-York, Wiley (1972)
- [3] P.S. Laplace, *Exposition du Système du Monde*, Paris, Vol. II (1809)
- [4] J.D. Bekenstein, *Contemp. Phys.* 45, 31 (2003)
- [5] C.W. Misner, K.S. Thorne & J.A. Wheeler, *Gravitation*, San Fransisco, Freeman (1973)
- [6] E.I. Taylor & J.A. Wheeler, *Exploring black holes*, San Fransisco, Wesley Longman (2000)
- [7] S.W. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* 26, 1596 (1970)
- [8] W.G. Unruh & R.M. Wald, *Phys. Rev. D* 25, 942 (1983)
- [9] S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* 43, 199 (1975)
- [10] J.D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* 9, 3292 (1974)
- [11] T. Damour, prépublication hep-th/0401160, exposé donné au séminaire Poincaré, Paris (2003)
- [12] M. Planck, *Verh. Dtsch. Phys. Ges.* 2, 237 (1900)
- [13] W.H. Zurek, *Phys. Rev. Lett* 49, 1683 (1982)
- [14] D. Page, *Phys. Rev. Lett* 50, 1013 (1983)
- [15] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit*, Cambridge, CUP (2004)
- [16] A. Barrau, J. Grain & S. Alexeyev, *Phys. Lett. B* 584, 114 (2004)
- [17] D. Lovelock, *J. Math. Phys* 12, 498 (1971)
- [18] J. Grain & A. Barrau, *Phys. Rev. D* 72, 104016 (2005)
- [19] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge, CUP (2004)
- [20] L. Sussking & J. Lindesay, *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution*, London, World Scientific (2005)
- [21] A. Sen, *Mod. Phys. Lett. A* 10, 2081 (1995)
- [22] C. Kiefer, *Annalen Phys.* 15, 129 (2005)
- [23] R. Bousso & J. Polchinski, *JHEP* 0006, 006 (2000)
- [24] S. Weinberg, prépublication hep-th/0511037

¹⁷In this context it should be clear that the anthropic principle does **not** state that the Universe was built for the existence of human beings but, just the other way round, that the Universe has random realizations and that the only ones where "minds" can think about the Universe are the very few where life can emerge.

A Annexe sur le tenseur de Riemann

Dans l'introduction aux idées de la relativité générale donnée dans la première section de ce rapport, on a utilisé un tenseur $R_{\mu\nu\rho\lambda}$ auquel on se propose ici de donner une base plus formelle.

La courbure d'une 2-surface est mesurée par la valeur de la courbure gaussienne en chaque point. Mais pour un espace de dimension supérieure, une description exhaustive de la courbure requiert la construction d'un tenseur de rang 4 appelé tenseur de Riemann.

Soit un vecteur transporté parallèlement sur un chemin fermé infinitésimal. On appelle ce vecteur v^α . Les variations du vecteur sont respectivement sur les 4 côtés :

$$- \Gamma^\alpha_{\beta\nu}(x) v^\nu(x) da^\beta \quad (2)$$

$$- \Gamma^\alpha_{\beta\nu}(x+da) v^\nu(x+da) db^\beta \quad (3)$$

$$+ \Gamma^\alpha_{\beta\nu}(x+db) v^\nu(x+db) da^\beta \quad (4)$$

$$+ \Gamma^\alpha_{\beta\nu}(x) v^\nu(x) db^\beta \quad (5)$$

où l'on a utilisé $dq^\mu = -\Gamma^\nu_{\nu\rho} dx^\nu$ par définition des coefficients de connexion $\Gamma^\nu_{\nu\rho}$. On effectue alors (7)+(9) d'une part et (8)+(10) d'autre part en utilisant $f(x+dx) - f(x) = f'(x)dx$. On obtient pour dv^ν :

$$\begin{aligned} dv^\nu &= \frac{\partial(\Gamma^\alpha_{\beta\nu} v^\nu)}{\partial x^\gamma} db^\gamma da^\beta - \frac{\partial(\Gamma^\alpha_{\beta\nu} v^\nu)}{\partial x^\delta} da^\delta db^\beta \\ &= da^\beta db^\gamma \left(\Gamma^\alpha_{\beta\nu,\gamma} v^\nu + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\gamma} \right) - da^\delta db^\beta \left(\Gamma^\alpha_{\beta\nu,\delta} v^\nu + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\delta} \right) \end{aligned}$$

$$\text{car } dv^\nu = -\Gamma^\nu_{\sigma\gamma} v^\sigma dx^\gamma$$

$$\begin{aligned} dv^\nu &= da^\delta db^\gamma v^\beta (\Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma}) \\ &= da^\delta db^\gamma v^\beta R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \end{aligned}$$

$$\text{avec } R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \equiv \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} \Gamma^\sigma_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \quad \text{le tenseur de Riemann.}$$

On utilise ici la notation de la virgule pour signifier une dérivation partielle. Le tenseur de Riemann caractérise la courbure de l'espace-temps. Dans un référentiel en chute libre (régi donc par la relativité restreinte), les coefficients de connexion s'annulent mais pas leurs dérivées. On a donc¹⁸ :

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} &= \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\rho} R^\rho_{\beta\gamma\delta} = \Gamma_{\alpha\beta\delta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma,\delta} \\ \text{or } 2\Gamma_{\nu\mu\rho} &= g_{\mu\nu,\rho} - g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}) \\ \Rightarrow R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta}) \end{aligned}$$

Cette dernière relation exprime explicitement le tenseur de Riemann en fonction de la métrique, ce qui constituait notre objectif¹⁹.

Une propriété importante des espaces courbes est que deux géodésiques –i.e. deux trajectoires suivies par des particules libres– initialement parallèles ne le resteront pas (ex : les cercles de longitude).

Soit ξ un vecteur entre deux géodésiques à x et $x + \xi$. Les équations géodésiques sont²⁰ :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad (6)$$

¹⁸La relation utilisée à la troisième ligne, dite *théorème fondamental de la géométrie Riemannienne* s'obtient juste avec un peu d'algèbre autour de la définition de la dérivation covariante.

¹⁹Un choix de référentiel adapté peut permettre d'annuler les coefficients de connexion (dérivées premières de la métrique) mais pas le tenseur de Riemann. Celui-ci s'annule quand l'espace est plat **pour tout système de coordonnées**.

²⁰On peut, par exemple, le montrer en extrémisant $S = \int g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

$$\frac{d^2(x + \xi)^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x + \xi) \frac{d(x + \xi)^\nu}{d\tau} \frac{d(x + \xi)^\lambda}{d\tau} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x + \xi) &= \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) + \xi^\rho \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu \\ \frac{d(x + \xi)^\nu}{d\tau} \frac{d(x + \xi)^\lambda}{d\tau} &= \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau}. \end{aligned}$$

On trouve au premier ordre en ξ :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu(x) \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + O(\xi^2) = 0 \quad (7)$$

En faisant la différence, il vient :

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu(x) \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{d\xi^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0.$$

Si on se place dans un référentiel en chute libre où les coefficients de connexion s'annulent, on a donc :

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu(x) \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0. \quad (8)$$

Par ailleurs, nous la dérivée covariante s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{D\xi^\mu}{D\tau} &= \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \\ \Rightarrow \frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} &= \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\lambda,\nu}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} + \text{termes avec } \Gamma \text{ non dérivé.} \end{aligned} \quad (9)$$

Les termes où Γ n'est pas dérivé s'annulent dans un référentiel en chute libre. En éliminant $\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}$, il vient :

$$\frac{D^2\xi^\nu}{D\tau^2} - \Gamma_{\rho\lambda,\nu}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu x^{i\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0.$$

Ici λ et ν jouent des rôles symétriques :

$$\Gamma_{\rho\nu,\lambda}^\mu = \Gamma_{\rho\lambda,\nu}^\mu,$$

soit

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} + (\Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu - \Gamma_{\rho\nu,\lambda}^\mu) \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} R_{\nu\rho\lambda}^\mu &= \Gamma_{\nu\lambda,\rho}^\mu - \Gamma_{\rho\nu,\lambda}^\mu \\ \Rightarrow \frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} + R_{\nu\rho\lambda}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Cette dernière relation, analogue à une équation du mouvement, permet de donner un sens physique au tenseur de Riemann : il joue un rôle analogue au champ-tenseur en électrodynamique. C'est le "champ moteur" de la relativité générale. Il renseigne sur l'accélération de la séparation des géodésiques.

B Annexe sur l'action de Nambu-Goto en théorie des cordes

Nous ne donnons ici que quelques lignes d'introduction très élémentaire et qualitative à l'action de Nambu-Goto.

L'action d'une corde relativiste doit être une fonctionnelle de la trajectoire de la corde. De la même façon qu'une particule trace une ligne dans l'espace-temps, une corde y dessine une surface. La ligne tracée par une particule se nomme ligne d'Univers et la 2-surface tracée par une corde se nomme feuille d'Univers²¹. L'action des particules est proportionnelle au temps propre qui est l'invariant de Lorentz adapté. Pour les cordes, il faut définir une "aire propre" de la feuille d'Univers qui constituera l'invariant approprié. L'action des cordes relativistes est proportionnelle à ce dernier et se nomme action de Nambu-Goto.

Pour définir une surface, il faut deux variables. Appelons-les τ et σ . En choisissant une paramétrisation adaptée, on peut écrire l'action sous la forme [19] :

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}$$

où T_0 est la tension de la corde, introduite de façon heuristique pour des raisons dimensionnelles et γ est le déterminant d'une matrice 2X2 qui joue un rôle analogue à celui du tenseur métrique pour la description d'une ligne d'Univers. La dynamique des cordes s'obtient en extrémisant les variations de cette action.

La forme d'action donnée dans la section 5.2 de ce rapport est un cas particulier de l'action générale de Nambu-Goto où les points aux extrémités des cordes sont fixés. En fait, les conditions aux limites imposées sont essentielles en théorie des cordes. Les deux types les plus généraux de conditions consistent à supposer que les extrémités sont libres (conditions de Neumann) ou sont fixes (conditions de Dirichlet). Ces points ne sont pas anodins car, justement, les "hyper-surfaces" décrites par les extrémités des cordes jouent un rôle physique tout aussi importants que les cordes elles-mêmes. On les appelle *D-branes* et elles interviennent, justement, très substantiellement dans le calcul rigoureux de l'entropie des trous noirs...

²¹ Serait-ce une feuille de (h)être ?