Relativité Générale

-une très (trop) brève introduction-

Aurélien Barrau
(rédigé avec l'aide de A. Putze)

26 février 2007

Table des matières

Chapitre 1

Relativité Restreinte

Postulat (et définition) : Il existe des référentiels dans lesquels le mouvement libre des corps s'effectue à vitesse constante (vectoriellement). Ils sont nommés référentiels **inertiels**. Nous verrons plus tard qu'en réalité on peut introduire les référentiels d'inertie de façon plus élégante et plus naturelle à partir des propriétes de symétrie d'espace-temps.

Principe de relativité (expérimental) : les lois de la Nature sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie.

En mécanique classique, on utilise l'énergie potentielle pour décrire l'interaction mutuelle des corps. Celle-ci dépend directement des coordonnées (x, y, z) et cela implique nécessairement une **propagation instantanée**, contradictoire avec l'expérience. La relativité restreinte supposant l'existence d'une vitesse maximale pour les interactions, une nouvelle decription est nécessaire.

On peut donc définir la théorie de la relativité restreinte comme la conjonction du principe de relativité précédent et de la prise en compte de la finitude de la vitesse de propagation des interactions. Il s'ensuit que la célérité de la lumière c est une constante universelle. Toute la physique doit alors être reconstruite : la transformation de Galilé en mécanique classique compose trivialement les vitesses, ce qui ne peut être que contradictoire avec l'existence d'une limite absolue. Il est important de se convaincre que dans une telle approche, le problème ne peut venir **que** du caractère absolu du temps en mécanique classique.

Essayons de montrer sommairement les idées sous-jacentes à la construction de la transformée de Lorentz qui peut être simplement déduite d'arguments élémentaires. Soient K et K' deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Soient deux événements (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) correspondant au départ et à l'arrivée d'un signal dans K. La distance parcourue par le signal dans K est $c(t_2 - t_1)$. Elle vaut aussi :

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

On a donc dans K :

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

On peut observer ces deux événements depuis un référentiel K' et y mener le même raisonnement. On obtient alors :

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0$$

Pour deux événements quelconques, on appelle intervalle

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Soit, pour deux événements très proches :

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Du point de vue formel, l'intervalle est une distance dans un espace pseudo-Euclidien (à caude du signe -) quadri-dimentionnel.

La nullité de l'intervalle ($ds = 0$) dans un reférentiel d'inertie implique donc sa nullité dans tout autre ($ds' = 0$). Ajouté au fait que ds et ds' sont des infiniment petits du même ordre, on peut donc écire :

$$ds^2 = ads'^2$$

Le facteur a ne peut dépendre que du module V (vitesse relative des référentiels) et pas des coordonnées ni du temps puisque l'espace et le temps sont homogènes. Il ne peut pas non plus dépendre de la direction du vecteur $\mathbf{V}$ puisque l'espace est isotrope. Considérons trois référentiels K, K_1, K_2. Soient $\mathbf{V_1}$ la vitesse de K_1 par rapport à K et $\mathbf{V_2}$ la vitesse de K_1 par rapport à K.

$$ds^2 = a(V_1)ds_1^2;\ ds^2 = a(V_2)ds_2^2;\ ds_1^2 = a(V_{12})ds_2^2$$

donc :

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12})$$

Or, V_{12} dépend non seulement des valeurs absolues des vecteurs $\mathbf{V_1}$ et $\mathbf{V_2}$ mais aussi de leur angle relatif. Mais celui-ci ne figure pas dans l'expression $\frac{a(V_2)}{a(V_1)}$. Cette relation ne peut dont être vérifiée **que** si a(V) se réduit à une constante qui doit être égale à 1. Donc

$$ds^2 = ds'^2$$

L'intervalle est le même dans tous les référentiels d'inertie. Les intervalles à carrés positifs, $s^2 > 0$ sont dits du genre temps et ceux à carrés négatifs $s^2 < 0$ du genre espace. Il est bien évident que seuls ceux de carrés positifs décrivent des points d'espace-temps qui peuvent être causalement liés. Les transformations de Lorentz doivent donc assurer l'invariance de ces intervalles, c'est-à-dire la distance entre les points d'univers dans l'espace quadridimentionnel. De telles transformations (assurant l'invariance des longueurs) sont des translations ou des rotations. Les translations sont sans intéret car elles se réduisent à un changement d'origine de l'espace et du temps. Il s'agit dont de rotations du quadrisystème x, y, z, t. Considérons (par exemple) le plan (t,x). $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$ s'écrit :

$$x = x'\mathrm{ch}\psi + ct'\mathrm{sh}\psi$$

$$ct = x'\mathrm{sh}\psi + ct'\mathrm{ch}\psi$$

Il est à noter qu'on utilise des formules de trigonométrie hyperbolique et non sphérique à cause du caractère pseudo-euclidien de l'espace. Ecrivons le mouvement de l'origine de K' dans K (mouvement parallèle à (0x)) : x'=0 et donc

$$x = ct'\mathrm{sh}\psi$$

$$ct = ct'\mathrm{ch}\psi$$

soit :

$$\frac{x}{ct} = \mathrm{th}\psi \quad \text{ou} \quad \mathrm{th}\psi = \frac{V}{c}$$

soit :

$$\mathrm{sh}\psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

soit :

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

On retiendra que cette démonstration simple et naturelle des expressions souvent postulées de la transformation de Lorentz se fonde sur les notions d'homogénéité de l'espace-temps et d'isotropie de l'espace. Ces symétries de la nature jouent un rôle fondateur.

Il est à noter qu'en se fondant sur une approche de type "théorie des groupes", le postulat d'Einstein n'est pas même nécessaire. L'existence d'une vitesse limite apparaît comme une sorte de constante de structure de l'espace-temps qui n'est pas directement liée à la lumière.

Chapitre 2

Le Principe d'équivalence

2.1 Pourquoi faut-il aller au-delà de la relativité restreinte ?

On peut appréhender intuitivement les fondements de la relativité générale à partir d'une remarque très simple : dans l'équation

$$\boxed{m\vec{g} = m\vec{a}}$$

les termes de masse se simplifient et les trajectoire ne dépendent donc pas de de la masse !

> Les trajectoires dans un univers muni de gravitation sont exactement identiques à celles qui existeraient dans un univers sans gravitation dans un référentiel en accélération.

L'égalité entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle n'est plus un "hasard", c'est le même phénomène qui est à l'œuvre.

2.2 Le principe d'équivalence faible

> Le mouvement d'une masse-test gravitationnelle dans l'espace-temps est indépendant de sa composition. Tout est dicté par la structure du champ et les conditions initiales.

2.3 Le principe d'équivalence fort (P.E.F.)

1. Les résultats des expériences locales dans un référentiel en chute libre ne dépendent pas du mouvement.
2. Les résultats sont les mêmes pour tous les référentiels dans les mêmes conditions pour toutes les positions et tous les moments.

   Autrement dit, la physique est la même dans tous les référentiels en chute libre. Le P.E.F. généralise le 1^{er} principe de la relativité restreinte (R.R.) : "Les résultats d'une expérience sont les mêmes dans tous les référentiels d'inertie" $\longrightarrow$ "Les résultats des expériences locales sont les mêmes dans tous les référentiels en chute libre". En R.R. on essaie de décrire tout l'univers dans un référentiel d'inertie au détriment des accélérations, en relativité générale (R.G.) on ne peut pas couvrir tout. Si on décrit l'univers à partir d'un référentiel, il faut qu'en chaque point le référentiel soit équivalent à un référentiel en chute libre.
3. Les résultats des expériences dans les référentiels en chute libre sont compatibles avec la R.R.

La première conséquence du P.E.F. avant même la R.G. est le fait que le champ gravitationnel affecte les radiations.

$$\text{Accélération} \quad \longleftrightarrow \quad \text{mouvement} \quad \longleftrightarrow \quad \text{effet Doppler}$$

De plus il y a déviation (penser au mouvement observé depuis la fenêtre d'un avion en chute libre).

Il faut donc regarder l'accélération :

$$\Longrightarrow \mathrm{d}s^2 \neq \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$$

Il en suit qu'il y a une courbure dès qu'on n'est pas en un seul point, puisque l'équation totale n'est seulement localement valable.

Chapitre 3

Courbure spatiale

On explicitera intuitivement la courbure avec des manifolds 2D dans l'espace 3D, mais le point fondamental est qu'on peut appréhender la courbure par des mesures intrinsèques, i.e. sur le manifold concerné. L'information géométrique sur l'espace est contenue dans le théorème de Pythagore qui relie les distances aux variations de coordonnées. Cette équation s'appelle l'équation métrique. Des lignes droites, au sens usuel du terme, ne peuvent pas être tracées sur une surface courbe : on considère des géodésiques, qui sont les lignes "les plus droites" que l'on peut dessiner entre deux points et qui n'ont donc pas de composante de courbure dans cet espace.

Quand on regarde une 2-surface, on "voit" tout de suite la courbure, mais celle-ci ne serait pas nécessairement évidente pour des habitants de cette surface. Bien qu'un cylindre et une sphère paraissent tout les deux courbes, il existe une différence fondamentale : un cylindre peut être déroulé pour être déposé sur un plan, mais pas la sphère. Les planisphères terrestres montrent bien que certaines régions sont étirées et d'autres contractées. A la surface du cylindre, quand on trace la ligne la plus courte entre deux points et qu'on le déroule ensuite, on obtient une droite. Le cylindre est dit intrinsèquement plat (quoi que non plan) et la sphère intrinsèquement courbe.

Si on pave une feuille avec des coordonnées cartésiennes et qu'on la roule pour faire un cylindre, on a toujours $s^2 = x^2 + y^2$. En revanche, il existe des difficultés insurmontables si l'on essaie de paver une sphère avec des coordonnées cartésiennes. Néanmoins, localement, pour des régions suffisamment petites, on peut utiliser les coordonnées cartésiennes : $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

Pour couvrir toute la Terre, on peut utiliser les coordonnées sphériques avec les angles ϑ pour la latitude (de 0 à 180°) et φ pour la longitude (de -180° à 180°). Localement, entre deux points (ϑ, φ) et ($\vartheta + \mathrm{d}\vartheta$, $\varphi + \mathrm{d}\varphi$), on retrouve l'équation métrique $\mathrm{d}s^2 = r^2\mathrm{d}\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \mathrm{d}\varphi^2$. L'équation métrique est une propriété essentielle de la surface. Si on veut construire la géométrie de la Terre avec les données Atlas de ϑ et φ il faut des informations en plus (si on le fait en coordonnées cartésiennes, cela ne ressemblera pas à la Terre). La métrique donne les distances.

Tout ceci reste vrai pour les espaces de dimensions plus élevées et de type quelconque :

- il faut des coordonnées adaptées (dites gaussiennes)
- il faut des équations métriques qui donnent les distances par rapport aux coordonnées gaussiennes.

Les espaces d'intérêt physique sont les espaces de Riemann (métrique quadratique par rapport aux variations de coordonnées).

Il est toujours possible de décrire une petite région des espaces de Riemann comme étant localement plate. Ceci revient à tracer une tangente à une courbe.

Prenons une 2-surface de Riemann avec la métrique

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}v^2 + 2g_{12}\mathrm{d}v\mathrm{d}w + g_{12}\mathrm{d}w^2$$

où (v, w) sont des coordonnées gaussiennes et g_{ij} sont des fonctions de la position.

Choisissons $P(x, y)$ un point et cherchons (x, y) telles que la métrique soit localement euclidienne :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v &= A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}w &= C(x,y)\mathrm{d}x + D(x,y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

avec

$$A = \frac{\partial v}{\partial x}\;; \qquad B = \frac{\partial v}{\partial y}\;; \qquad C = \frac{\partial w}{\partial x}\;; \qquad D = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Alors
$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g_{11}\left(A^2\,\mathrm{d}x^2 + 2AB\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + B^2\,\mathrm{d}y^2\right) + 2g_{12}\left(AC\,\mathrm{d}x^2 + (AD+CB)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + BD\,\mathrm{d}y^2\right) + \\ &\quad + g_{22}\left(C^2\,\mathrm{d}x^2 + 2CD\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + D^2\,\mathrm{d}y^2\right) \end{aligned}$$

$$\text{soit} \qquad \mathrm{d}s^2 = g'_{11}\,\mathrm{d}x^2 + 2g'_{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + g'_{22}\,\mathrm{d}y^2$$

$$\text{avec} \qquad \begin{aligned} g'_{11} &= A^2\,g_{11} + 2AC\,g_{12} + C^2\,g_{22} \\ g'_{12} &= AB\,g_{11} + (AD+CB)\,g_{12} + CD\,g_{22} \\ g'_{22} &= B^2\,g_{11} + 2BD\,g_{12} + D^2\,g_{22} \end{aligned}$$

On peut choisir non seulement les vecteurs de A, B, C, D en P mais aussi celles de leurs dérivées. Ici seules 6 dérivées sont indépendantes !

On choisit $g'_{11} = g'_{12} = 1$ et $g'_{22} = 0$. On obtient la forme cartésiennes $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ et les dérivées sont nulles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g'_{11}}{\partial x} = \frac{\partial g'_{12}}{\partial x} = \frac{\partial g'_{22}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial g'_{11}}{\partial y} = \frac{\partial g'_{12}}{\partial y} = \frac{\partial g'_{22}}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

3.1 Courbure à 4 dimenions

Partant d'une métrique $g_{\nu\mu}$, on cherche jusqu'où on peut simplifier la simplifier en une métrique $g'_{\nu\mu}$. On ne peut s'affranchir de la gravitation qu'en un point, comment apparaît la courbure ? A 4D est-ce que, comme à 2D, l'espace tangent va annuler les dérivées mais pas les dérivées secondes ?

Soit un point x, on fait un développement limité de Taylor autour de x_0 à l'ordre 2 :

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x_0) + g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau) + \frac{1}{2}g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau)(x^\sigma - x_0^\sigma)$$

$$\begin{aligned} \text{or} \qquad g'_{\mu\nu}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu}\right]_{x_0} \qquad \text{car tenseur de rang 2} \\ g'_{\mu\nu,\tau}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu,\tau}\right]_{x_0} + 2^1\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu}\right]_{x_0} \\ g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu,\tau\sigma}\right]_{x_0} + 2\left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha\partial x'^\tau\partial x'^\sigma}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}g_{\mu\nu}\right]_{x_0} + \\ &\quad + \text{autres termes de la même structure} \end{aligned}$$

On a donc comme degrés de liberté :

[1] car α et β comme μ et ν jouent des rôles symétriques

- les **16** quantités $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right]_{x_0}$
- les $4\cdot\left(4+\mathrm{C}_4^2\right)=$ **40** quantités $\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right]_{x_0}$
- les $4\cdot\left(4+4\cdot 3+\mathrm{C}_4^3\right)=$ **80** quantités $\left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\gamma}\right]_{x_0}$

Par ailleurs on a comme contraintes :

- **10** composantes $g'_{\mu\nu}(x_0)$
- $10\cdot 4=$ **40** composantes $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$
- $10\cdot\left(4+\mathrm{C}_4^2\right)=$ **100** composantes $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)$

D'abord on veut faire $g'_{\mu\nu}(x_0)=\eta_{\mu\nu}$. Cela ne fait intervenir que les dérivées premières $\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right]_{x_0}$. On a 10 conditions à satisfaire avec 16 paramètres : on peut le faire! Les 6 degrés de liberté restants sont les 6 paramètres de la R.R. : les transformations de Lorentz et les rotations qui laissent le $\eta_{\mu\nu}$ inchangé. Ensuite, on peut annuler les 40 $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$ avec les 40 $\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right]_{x_0}$. Mais on ne peut pas annuler les 100 dérivées secondes avec les 80 $\left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta \partial x'^\gamma}\right]_{x_0}$ $\longrightarrow$ courbure.

Autrement dit, dans le plan tangent on "match" les dérivées mais pas les dérivées secondes.

Sur une surface courbe, les trajectoires les plus courtes entre deux points ne sont pas les lignes droites. Les lignes "les plus droites" sont les géodésiques. A la surface de la Terre, les géodésiques sont les grands cercles survis par les avions (pas les cercles de lattitude). La géodésique a une courbure de $\frac{1}{r}$. Le cercle de latitude a une courbure de $\frac{1}{r\sin\vartheta}$.

- Pour le cercle de latitude, la composante de courbure perpendiculaire à la surface est $\sin\vartheta\cdot\frac{1}{r\sin\vartheta}=\frac{1}{r}$ et la composante parallèle est $\cos\vartheta\cdot\frac{1}{r\sin\vartheta}$.
- Pour la géodésique la composante perpendiculaire à la surface est égale à $\frac{1}{r}$ et la composante parallèle est nulle.

Cela illustre une propriété importante des lignes qui passent en un point en étant tangentes (même direction) en ce point. La composante de courbure perpendiculaire à la surface est la mêmes pour toutes (ici $\frac{1}{r}$). Parmi ces lignes, une seule n'a que cette composante de courbure : la géodésique. Elle n'a aucune composante de courbure sur la surface, ce qui fait le trajet le plus court possible.

Une mesure simple permet de savoir "intrinsèquement" si la surface est courbe : on fixe une corde de longueur r en O et on fait un circuit avec la corde tendue. On mesure la circonférence :

$$\begin{array}{ll} C=2\pi r, & \text{plat} \\ C<2\pi r, & \text{courbure positive} \\ C>2\pi r, & \text{courbure négative} \end{array}$$

$2\pi r-C$ fixe la signe de la courbure.

Prenons une corde sur une sphère

$$\begin{array}{rrcl} & r & = & R\vartheta \\ & C & = & 2\pi R\sin\vartheta \\ & & \cong & 2\pi R\left(\dfrac{r}{R}-\dfrac{r^3}{6R^3}+\dots\right) \\ & & \cong & 2\pi r\left(1-\dfrac{r^2}{6R^2}+\dots\right) \\ \Longrightarrow & C-2\pi r & \cong & -\dfrac{\pi}{3}\dfrac{r^3}{R^2}+\dots \\ \Longrightarrow & R^{-2} & = & \dfrac{3}{\pi}\lim\limits_{r\to 0}\left(\dfrac{2\pi r-C}{r^3}\right) \end{array}$$

Cette démarche va permettre de généraliser la courbure.

Soit une surface quelconque. G_1 et G_2 sont des géodésiques qui se croisent à angle droit sur cette surface. ON peut utiliser des coordonnées cartésiennes autour de O : un vecteur tangent à G_1, un vecteur tangent G_2 et $\vec{N}$. Appelons les v, w et z. On peut écrire pour la surface autour de O :

$$z = \frac{\partial z}{\partial v}v + \frac{\partial z}{\partial w}w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}v^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial w}vw + \frac{\partial^2 z}{\partial w^2}w^2\right) + \ldots$$

Comme le plan défini par les axes cartésiens est tangent à la surface, les dérivées premières s'annulent :

$$z = \frac{1}{2}(Lv^2 + 2Mvw + Nw^2) \qquad \text{au second ordre.}$$

Il est clair qu'on peut réécrire cela comme $\frac{1}{2}(K_1x^2 + K_2y^2)$ par une simple rotation du système d'axe autour de ON $\left(\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2M}{L-N}\right)\right)$. L'intersection de la surface avec le plan xOz $(y = 0)$ est

$$z = \frac{K_1x^2}{2}$$

et son rayon de courbure R_1 est donné par

$$\begin{aligned} R_1 &= x^2 + (R_1 - z)^2 \\ R_1 &= x^2 + R_1^2 - R_1z + z^2 \\ x^2 &= 2R_1z \qquad \text{au premier ordre de } z \end{aligned}$$

$$\text{D'où} \qquad \frac{1}{R_1} = K_1$$

De même, dans l'exemple avec yOz, la courbure est K_2. On les appelle courbure principales (elles sont les courbures minimale et maximale). Le produit $K_1 \cdot K_2 = K$ est un invariant appelé courbure gaussienne. Elle vaut $\frac{1}{R^2}$ pour une sphère. Pour un cylindre, on voit donc que la courbure gaussienne est nulle.

La formule donnée tout à l'heure reste valable pour n'importe quelle surface 2D :

$$K = \frac{3}{\pi}\lim_{r \to 0}\left(\frac{2\pi r - C}{r^3}\right)$$

On peut aussi remarquer : 2 géodésiques qui s'écartent du pôle Nord

$$\begin{aligned} \eta &= (R\sin\vartheta)\varphi; \qquad \vartheta = \frac{s}{R} \\ &= R\varphi\sin\frac{s}{R} \\ \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}s^2} &= -\frac{1}{R^2}\eta \\ \text{ceci se généralise à} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}s^2} &= -\eta K \end{aligned}$$

L'accélération de la séparation géodésique dépend directement de la courbure gaussienne donnée par K.

3.2 Le transport parallèle

En physique, on s'intéresse presque toujours à des vecteurs locaux (champ de vitesse, force subie par un électron dans un champ électrique variable, etc.). En espace plat, il est simple de comparer différent vecteur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ à différentes positions. On prend $\vec{b}$ et on le transporte en $\vec{a}$ sans changer sa longueur et sa direction. Cela devient plus complexe en espace courbe, car on ne peut pas utiliser un unique système cartésien pout tout l'espace. Prenons la surface d'une sphère. On part du pôle N avec $\vec{a}$, on fait des petits pas infinitésimaux où on transporte le vecteur parallèlement à chaque fois.

On commence dans la direction du vecteur en suivant le géodésique (si cela n'est pas une géodésique on décompose en deux mouvements sur des géodésiques. Ceci est possible car l'espace est localement plat). En effet le vecteur a tourné d'un angle φ.

$$\varphi = K \cdot A$$

où A est l'aire de la courbe fermée. Le résultat du transport parallèle en espace courbe dépend donc du chemin suivi. Pour un cylindre $\varphi = 0$ car $K = 0$, il n'y a donc pas de rotation.

Chapitre 4

Elements d'analyse tensorielle

4.1 Approche intuitive

Les équations entre tenseurs restent valables par changement de coordonnées gaussiennes en espace-temps courbe. Les lois physiques écrites tensoriellement restent donc invariantes sous l'action des transformations générales, en particulier par changement de référentiel accéléré. Les scalaires et les vecteurs sont les formes les plus simples de tenseurs et on sait bien en R.R. qu'une égalité entre vecteurs (ou scalaires) demeure vraie par changement de référentiel d'inertie (le tenseur de rang n se transforme comme le produit de n quadrivecteurs).

En espace-temps courbe on autorise des transformations plus générales que celles de Lorentz. Par exemple, pour un champ gravitationnel uniforme, c'est quadratique :

$$x' = x - \frac{1}{2}gt^2$$

et non plus linéaire comme avec Lorentz. Les dérivées spatio-temporelles qui sont des vecteurs en R.R. doivent être redéfinies pour demeurer des vecteurs en R.G.

$$\begin{aligned}
\partial_\mu V^{\nu'} &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\partial_\mu\right)\left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}V^\nu\right) \\
&= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\cdot\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}\partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}V^\nu
\end{aligned}$$

Les dérivées secondes ne sont pas nulles. Le second terme est non-tensoriel qui n'existe pas en espace plat.

On peut dire que pour écrire des lois valides en R.G. il suffit de prendre une loi valide en R.R., valable donc dans un référentiel en chute libre, de l'écrire tensoriellement et elle devient compatible avec la R.G. ! Mais cette technique ne permet pas de décrire la gravitation relativiste puisque la loi de Newton est incompatible avec la R.R. ! Einstein a résolu cela en supposant un lien entre la courbure et le tenseur énergie-impulsion. La R.R. n'est valide que dans les référentiel en chute libre, ce qui la déconnecte de la gravité.

Les transformations générales en espace-temps courbe sont non-linéaires. Soit un jeu de coordonnées gaussiennes qui couvrent l'espace-temps x^μ et un autre jeu x'^μ.

$$\begin{aligned}
x'^\mu &= x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad \text{fonction qui peut être compliquée} \\
x^\mu &= x^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)
\end{aligned}$$

Il vaut mieux commencer par les relations différentielles :

$$\mathrm{d}x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\mathrm{d}x^\nu$$

$$\text{Soit} \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \qquad \text{et} \qquad \Lambda_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}$$

En générale $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \neq \Lambda_{\mu}{}^{\nu}$.

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}\Lambda_{\beta}{}^{\nu} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} \cdot \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

Soient des vecteurs de base $\vec{e}_{\mu}$ en P. L'indice μ signifie que $\vec{e}_{\mu}$ pointe dans la direction μ. Soit P' un point se trouvant à une distance infinitésimale de P :

$$\vec{PP'} = \mathrm{d}x^{\mu}\vec{e}_{\mu}$$

La distance invariante est alors donnée par

$$\mathrm{d}s^2 = ||\vec{PP'}||^2 = (\mathrm{d}x^{\mu}\vec{e}_{\mu})(\mathrm{d}x^{\nu}\vec{e}_{\nu}) = \vec{e}_{\mu} \cdot \vec{e}_{\nu}\, \mathrm{d}x^{\mu}\, \mathrm{d}x^{\nu}$$

- dans l'espace-temps Minkowskien avec des coordonnées orthogonales : $\vec{e}_{\mu} \cdot \vec{e}_{\nu} = \eta_{\mu\nu}$
- en général : $\vec{e}_{\mu} \cdot \vec{e}_{\nu} = g_{\mu\nu}$
  Si les vecteurs sont unitaires : $g_{\mu\nu} = \cos(\vec{e}_{\mu}, \vec{e}_{\nu})$

Tout quadrivecteur au même événement d'espace-temps peut être exprimé en fonction des mêmes vecteurs :

4.2 Exemples

quadri-impulsion

$$p^{\mu}\vec{e}_{\mu}$$

Les composantes d'impulsion (ou de n'importe quel autre quadrivecteur) doivent se transformer par une transformation générale comme les composantes $\mathrm{d}x^{\mu}$:

$$p'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\, p^{\nu}$$

L'intervalle est construit pour demeurer invariant :

$$\begin{array}{lrcl} \text{En R.R.} & m^2c^2 & = & \eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} \\ & \mathrm{d}s^2 & = & \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} \\ \text{En R.G.} & m^2c^2 & = & g_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} \\ & \mathrm{d}s^2 & = & g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} \end{array}$$

parce que les composantes de tous les quadrivecteurs se transforment de la même façon que les coordonnés. La longueur invariante de n'importe quel quadrivecteur est non affecté par les transformations générales.

4.3 Vecteurs, covecteurs

Jusqu'à présent on a considéré des composantes de vecteurs qui se transforment comme $\mathrm{d}x^0 = c\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}z$. Il existe d'autres composantes.

Considérons par exemple une force conservative en mécanique classique :

$$f_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$$

où φ est un potentiel scalaire, invariant par transformation.

L'effet d'une transformation sur $\vec{f}$ est :

$$f'_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial x'^i} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\,f_j$$

C'est l'inverse de la transformation qu'on a vu précédemment. Les composantes qui se transforment ainsi sont appelées <u>covariantes</u>, l'indice est en bas. Les autres sont nommées <u>contravariantes</u>.

On peut exprimer n'importe quel vecteur avec les composantes que l'on veut suivant la signification physique à faire ressortir. Les composantes contravariantes sont "de type" vecteur tangent $\left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\right)$ et les composantes covariantes "de type" gradient.

L'intervalle $\vec{PP'}$ précédent s'écrivait

$$\begin{array}{rrcl}
 & \mathrm{d}s^2 & = & g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \\
\text{Appelons} & \mathrm{d}x_\mu & = & g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\nu \\
\text{alors} & \mathrm{d}s^2 & = & \mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x^\mu \\
\mathrm{d}s^2\ \text{invariant} & \mathrm{d}s^2 & = & \mathrm{d}x'_\alpha\,\mathrm{d}x'^\alpha \\
 & & = & \mathrm{d}x'_\alpha\,\dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\mathrm{d}x^\mu \\
\text{donc} & \mathrm{d}x_\mu & = & \dfrac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x'_\mu \\
\Longrightarrow & \mathrm{d}x'_\alpha & = & \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\,\mathrm{d}x_\mu
\end{array}$$

$\mathrm{d}x_{mu}$ sont donc bien les composantes covariantes de $\vec{PP'}$.

<u>Un exemple 2D</u>

Soit $\vec{PP'}$ dans un système non-orthogonal. La composante de $\vec{PP'}$ sur l'axe 1 s'obtient en projetant P' parallèlement à l'axe 2 et réciproquement. Soit

$$\vec{PP'} = \vec{e}_1\,\mathrm{d}x^1 + \vec{e}_2\,\mathrm{d}x^2$$

où $\mathrm{d}x^1$ et $\mathrm{d}x^2$ sont les composantes du vecteur. Les composantes du covecteur sont données par $\mathrm{d}x_\mu = g_{\mu\mu}\mathrm{d}x^\nu$.

$$\begin{array}{rrcl}
\text{soit} & \mathrm{d}x_1 & = & g_{11}\mathrm{d}x^1 + g_{12}\mathrm{d}x^2 \\
 & & = & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_1\mathrm{d}x^1 + \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\mathrm{d}x^2 \\
 & & = & \mathrm{d}x^1 + \mathrm{d}x^2\ \cos\vartheta \\
\text{et} & \mathrm{d}x_2 & = & \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x^1\ \cos\vartheta
\end{array}$$

On voit donc que les composantes covariantes, elles, s'obtiennent par projections orthogonales.

<u>Plus généralement :</u>

On obtient la première composante du vecteur en projetant P' sur la direction 1 suivant une surface en P' qui contient tous les vecteurs sauf le vecteur 1. La composante est SP.

pour le covecteur juste perpendiculaire, la composante est PS'. En espace plat le vecteur est à peu près le covecteur.

On a donc en toute généralité

$$g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A_\nu B^\nu = A^\mu B_\mu$$

<u>Autres tenseurs :</u>

Les tenseurs de rang 0 sont appelés scalaires.

Les tenseurs de rang 1 sont appelés quadrivecteurs.

Soient a^μ, b^μ, d_μ, e^μ des composantes vectorielles et covectorielles.

$$\text{Alors}\quad \left.\begin{array}{rcl} A^{\mu\nu} &=& a^\mu b^\nu \\ B^\nu{}_\mu &=& a^\nu d_\mu \\ C_{\mu\nu} &=& d_\mu e_\nu \end{array}\right\} \quad \text{sont trois tenseurs de rang 2}$$

$$D^\mu{}_{\nu\sigma} = a^\mu d_\nu e_\sigma \qquad \text{est un tenseur de rang 3}$$

Un tenseur de rang n se transforme comme le produit de n quadrivecteurs.

Soit une transformation quelconque. L'intervalle reste inchangé :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{d}s^2 &=& g'_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x'^\mu\,\mathrm{d}x'^\nu \\ & &=& g'_{\mu\nu}\,\dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\cdot\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\,\mathrm{d}x^\rho\,\mathrm{d}x^\sigma \\ & \mathrm{d}s^2 &=& g_{\sigma\rho}\,\mathrm{d}x^\sigma\,\mathrm{d}x^\rho \qquad \text{en termes des coordonnées initiales} \\ \Longrightarrow & g_{\sigma\rho} &=& g'_{\mu\nu}\,\dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\cdot\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} \\ \Longleftrightarrow & g'_{\mu\nu} &=& \dfrac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\cdot\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\,g_{\sigma\rho} \\ & &=& \Lambda_\mu{}^\sigma\,\Lambda_\nu{}^\sigma\,g_{\sigma\rho} \end{array}$$

4.4 Remarques et théorèmes

Quand on change de coordonnées :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{d}^4x &=& J\,\mathrm{d}^4x' \\ \text{où} & J &=& \det\left[\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\right] \qquad \text{Jacobien} \\ & \mathrm{d}^4x' &=& \dfrac{1}{J}\,\mathrm{d}^4x \end{array}$$

Considérons la transformation du tenseur métrique :

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\,g_{\alpha\beta}$$

or $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$

$$\begin{array}{rrcl} \Longrightarrow & g' &=& g\cdot J^2 \\ \Longleftrightarrow & J &=& \sqrt{\dfrac{g'}{g}} \end{array}$$

Considérons la transformation de $x^{\alpha'}$, un référentiel de Lorentz local, à x^α, un système arbitraire de coordonnées

$$\mathrm{d}^4x' = J^{-1}\,\mathrm{d}^4x = \sqrt{\frac{g}{g'}}\mathrm{d}^4x$$

mais $g=-1$ donc $\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$ est invariant.

D'une façon générale, chaque indice vectoriel amène dans une transformation un $\Lambda^*{}_*$ et chaque indice covectoriel un $\Lambda_*{}^*$. Des égalités valides entre tenseurs connectant des objets de même type qui se transforment de la même façon sont des égalités entre tenseurs qui sont valides pout toutes les coordonnées, y compris les référentiels en accélération.

Remarques

Contraction :

Soit $A^{\alpha\beta}_{\gamma\beta} = A^{\alpha 0}_{\gamma 0} + A^{\alpha 1}_{\gamma 1} + A^{\alpha 2}_{\gamma 2} + A^{\alpha 3}_{\gamma 3}$

$$\begin{aligned} A'^{\mu\nu}_{\sigma\nu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}{}_{\beta}\, \Lambda_{\nu}{}^{\delta}\, \Lambda_{\sigma}{}^{\gamma}\, A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda_{\sigma}{}^{\gamma}\, \delta_{\beta}{}^{\delta}\, A^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda_{\sigma}{}^{\gamma}\, A^{\alpha\beta}_{\gamma\beta} \end{aligned}$$

On voit donc que $A^{\alpha\beta}_{\gamma\beta}$ se transforme comme un tenseur de rang 2. Le produit scalaire de deux vecteurs est un exemple de contraction. $A^{\mu\nu}\, B_{\nu}$ est un vecteur. $C^{\mu\nu\sigma}\, B^{\alpha}_{\sigma}$ est un tenseur de rang 3.

Toute collection de nombre avec des indices $F_{\mu\nu}$ n'est pas nécessairement un tenseur. Il existe un théorème qui stipule que si le produit de $F_{\mu\nu}$ avec n'importe quel tenseur est un tenseur, alors $F_{\mu\nu}$ est un tenseur.

Preuve dans un cas particulier : A^{ν} est un vecteur. Supposons que $F_{\mu\nu}\, A^{\nu} = B_{\mu}$ $(*)$ est un vecteur. Dans un système de coordonnées

$$\begin{array}{rcrcl} & & F'_{\alpha\beta} A'^{\beta} &=& B'_{\alpha} \\ & \Longleftrightarrow & F'_{\alpha\beta}\, \dfrac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\, A^{\nu} &=& \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\, B_{\mu} \\ \times \dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} & \Longleftrightarrow & \dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\, \dfrac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\, F'_{\alpha\beta}\, A^{\nu} &=& B_{\mu} \\ -(*) & \Longleftrightarrow & \left(F'_{\alpha\beta}\, \dfrac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\, \dfrac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} - F_{\mu\nu} \right) A^{\nu} &=& 0 \end{array}$$

$$\forall A^{\nu} \qquad \Longrightarrow \qquad F_{\mu\nu} = F'_{\alpha\beta}\, \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\, \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \qquad \Longrightarrow \qquad F_{\mu\nu} \text{ tenseur}$$

Chapitre 5

Première approche de la théorie d'Einstein

On cherche des lois physiques valides sans l'action de transformations générales. Dans un référentiel en chute libre : la relativité restreinte. De plus les équations entre tenseurs conservent leurs formes sous les transformations générales. Cela conduit Einstein à postuler :

5.1 Principe de covariance généralisé :

Les lois physiques sont exprimables comme des équations entre tenseurs qui se réduisent à des lois consistantes avec la R.R. dans un référentiel en chute libre. Donc une loi valide en R.R. peut être généralisée pour être appliquée à un référentiel en accélération si on l'exprime sous forme tensorielle. La plupart des lois connues font intervenir des vecteurs qui sont des tenseurs : il se pourrait qu'on ait rien à faire ! Mais les lois sont dynamiques et contiennent des dérivées spatio-temporelles, qui ne sont pas des tenseurs. Il faut revoir la dérivation. Il en résulte que la dérivation covariante se ramène à la dérivation usuelle dans un référentiel en chute libre. Il suffit en fait de remplacer les dérivées par des dérivées covariantes.

5.2 Dérivée covariante :

On considère le changement d'un quadri-vecteur local q^μ au cours d'un processus physique. (Exemple : la quadri-impulsion d'une masse-test soumise à des forces gravitationnelles et non-gravitationnelles.) A cause du changement du système de coordonnées le long de la trajectoire de la masse en espace courbe, les composantes q^μ changent même sans aucun processus physique. Sur Δs entre P et P' on appelle ce changement δq^μ. Il doit être soustrait au changement total observé Δq^μ. Le changement important est $\Delta q^\mu - \delta q^\mu$. Une quantité appelée dérivée covariante peut être formée ainsi :

$$\frac{\mathrm{D}q^\mu}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q^\mu - \delta q^\mu}{\Delta s} \tag{5.1}$$

La question est : comment fait-on le transport du vecteur q^μ à P à travers l'espace-temps courbe vers P' afin de pouvoir évaluer ses composantes en P' et donc δq^μ ? C'est le transport parallèle.

Sur une distance suffisamment courte, il est toujours possible de transformer vers un référentiel en chute libre ; dans un tel référentiel l'espace-temps est localement plat et la R.R. peut être utilisée avec ses coordonnées cartésiennes. Pour faire un transport parallèle en espace courbe :

1. le vecteur est transformé dans un référentiel en chute libre à P,

2. dans ce référentiel où l'espace est plat, le vecteur est déplacé de Δs sans que ses coordonnées cartésiennes soient modifiées,
3. le vecteur est inversement transformé vers le référentiel voulu en P'.

Sur un long trajet, il faut définir le référentiel en chute libre à chaque élément de distance.

Supposons que q^μ est transporté parallèlement sur une distance Δx^ρ dans la direction ρ. Si le vecteur est initialement suivant σ, il va développer en général des composantes dans les autres directions, donc :

$$\delta q^\mu = -\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}\, q^\rho\, \Delta x^\rho.$$

Cette expression prend en compte les composantes de trajectoire (ρ), les composantes initiales du vecteur (σ) et les composantes que changent (μ). Les quantités $\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}$ sont appelées coefficients de connexion.

$$(1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{D}q^\mu}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}q^\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}\, q^\rho \left(\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s}\right).$$

Les coefficients de connexion ne sont pas des tenseurs. Dans un référentiel en chute libre les variations δq^μ s'annulent et donc les coefficients de connexion aussi, mais pas dans les autres référentiels.

On peut écrire l'équation de la dérivée covariante pour les composantes du covecteur (admis) :

$$\frac{\mathrm{D}q_\mu}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}q_\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\nu{}_{\mu\rho}\, q_\nu\, \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s}.$$

On cherche maintenant la dérivée covariante d'un tenseur de rang 2. Considérons l'invariant $A_{\mu\nu}\, q^\mu\, q^\nu$. Cet invariant n'est pas affecté par le passage au référentiel en chute libre et par les transformations générales. Il n'est donc pas affecté par le transport parallèle pour tout référentiel.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \delta\left(A_{\mu\nu}\, q^\mu\, q^\nu\right) & = & 0 \\
\Longrightarrow & \delta A_{\mu\nu}\, q^\mu\, q^\nu + A_{\mu\nu}\, \delta q^\mu\, q^\nu + A_{\mu\nu}\, q^\mu\, \delta q^\nu & = & 0 \\
 & \text{or} \qquad \delta q^\mu & = & -\Gamma^\mu{}_{\sigma\rho}\, q^\sigma\, \Delta x^\rho \\
 & \Longrightarrow \qquad \delta A_{\mu\nu}\, q^\mu\, q^\nu & = & A_{\mu\nu}\left(\Gamma^\mu{}_{\tau\rho}\, q^\tau\, q^\nu + \Gamma^\nu{}_{\tau\rho}\, q^\mu\, q^\tau\right)\Delta x^\rho \\
 & & = & \left(A_{\tau\nu}\Gamma^\tau{}_{\mu\rho}\, q^\mu\, q^\nu + A_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\, q^\mu\, q^\nu\right)\Delta x^\rho
\end{array}$$

En simplifiant par q^μ et q^ν (on peut le faire, car il suffit de spécifier une seule valeur non-nulle dans la somme et ainsi de suite), on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\delta A_{\mu\nu} & = & \left(\Gamma^\tau{}_{\mu\rho}\, A_{\tau\nu} + \Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\, A_{\mu\tau}\right)\Delta x^\rho \\
\dfrac{\mathrm{D}A_{\mu\nu}}{\mathrm{D}s} & = & lim_{\Delta s \to 0}\dfrac{\Delta A_{\mu\nu} - \delta A_{\mu\nu}}{\Delta s} \\
\dfrac{\mathrm{D}A_{\mu\nu}}{\mathrm{D}s} & = & \dfrac{\mathrm{d}A_{\mu\nu}}{\mathrm{d}s} - \Gamma^\tau{}_{\mu\rho}\, A_{\tau\nu}\, \dfrac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s} - \Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\, A_{\mu\tau}\, \dfrac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s}
\end{array}$$

5.3 Calcul des coefficients de connexion

Tout l'information sur la structure de l'espace-temps est dans la métrique, on doit donc pouvoir exprimer les coefficients de connexion en fonction de celle-ci.

$$\begin{array}{rcrcl}
 & & \dfrac{\mathrm{D}g_{\mu\nu}}{\mathrm{D}s} & = & \dfrac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}}{\mathrm{d}s} - \Gamma^\tau{}_{\mu\rho}\, g_{\tau\nu}\, \dfrac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s} - \Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\, g_{\mu\tau}\, \dfrac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s} \\
\times\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x^\rho} & \Longrightarrow & \dfrac{\mathrm{D}g_{\mu\nu}}{\mathrm{D}x^\rho} & = & \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \Gamma^\tau{}_{\mu\rho}\, g_{\tau\nu} - \Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\, g_{\mu\tau}
\end{array}$$

Dans un référentiel en chute libre :

$$\frac{\mathrm{D}g_{\mu\nu}}{\mathrm{D}x^\rho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}$$

les coefficients de connexion s'annulent et la métrique est localement plate :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{D}g_{\mu\nu}}{\mathrm{D}x^\rho} = 0$$

Cette équation tensorielle est valable dans tous les référentiels.

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} & = & \Gamma^\tau{}_{\mu\rho}\, g_{\tau\nu} + \Gamma^\tau{}_{\nu\rho}\, g_{\mu\tau} \\ \text{avec} & \Gamma_{\mu\nu\rho} & = & g_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho} \\ \Longrightarrow & \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} & = & \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho} \\ \text{on note} & g_{\mu\nu,\rho} & \equiv & \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \\ \Longrightarrow & g_{\mu\nu,\rho} & = & \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho} \end{array} \tag{5.2}$$

On peut inverser cela. Soit d'abord un potentiel scalaire φ. On construit $F_\mu = \varphi_{,\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$.

$$\frac{\mathrm{D}F_\mu}{\mathrm{D}x^\rho} = \varphi_{,\mu\rho} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}\, F_\sigma$$

Dans un référentiel en chute libre :

$$\frac{\mathrm{D}F_\mu}{\mathrm{D}x^\rho} = \varphi_{,\mu\rho}$$

$\varphi_{,\mu\rho}$ est symétrique par $\mu \leftrightarrow \rho$, donc $\frac{\mathrm{D}F_\mu}{\mathrm{D}x^\rho}$ l'est aussi. Cette propriété tensorielle demeure vraie dans tous les référentiels (et pour $\varphi_{,\mu\rho}$ aussi) donc les $\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho}$ doivent vérifier :

$$\Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} = \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_{\sigma\mu\rho} = \Gamma_{\sigma\rho\mu}$$

L'équation (2) s'écrit alors :

$$g_{\mu\nu,\rho} = \Gamma_{\nu\mu\rho} + \Gamma_{\mu\nu\rho} \tag{5.3}$$

$$g_{\rho\mu,\nu} = \Gamma_{\mu\rho\nu} + \Gamma_{\rho\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu\rho} + \Gamma_{\rho\mu\nu} \tag{5.4}$$

$$g_{\nu\rho,\mu} = \Gamma_{\rho\nu\mu} + \Gamma_{\nu\rho\mu} = \Gamma_{\rho\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\rho} \tag{5.5}$$

soit $(3) - (4) + (5)$:

$$g_{\mu\nu,\rho} - g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} = 2\Gamma_{\nu\mu\rho}$$

C'est le théorème fondamental de la géométrie Riemannienne.

Remarque :

En notant

$$q^\mu_{;\nu} \equiv \frac{\mathrm{D}q^\mu}{\mathrm{D}x^\nu},$$

la dérivée covariante s'écrit

$$q^\mu_{;\nu} = q^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\, q^\rho$$

5.4 Principe de covariance généralisé

Postulé par Einstein :

1. Les lois physiques peuvent être exprimés somme des équations tensorielles de façon à demeurer valides par transformation vers un référentiel accéléré quelconque.

2. Dans un référentiel en chute libre, les lois sont celles de la R.R.

Le fondement de la dynamique est la loi de Newton qui s'écrit en R.R. :

$$F^\mu = \frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

La partie droite n'est pas un tenseur. On remplace

$$\Longrightarrow \qquad F^\mu = \frac{\mathrm{D}p^\mu}{\mathrm{D}\tau}$$

C'est une équation tensorielle qui se réduit à la R.R. dans un référentiel en chute libre. C'est la procédure générale postulée par Einstein : on obtient les lois physiques en remplaçant les dérivées par des dérivées covariantes

$$\boxed{, \longrightarrow ;}$$

5.5 Equation géodésique

Quel est mouvement des masses-test en chute libre, i.e. ne subissant que la gravité ?

La force est nulle puisque la gravité n'en est pas une, mais juste la manifestation de la courbe :

$$\frac{\mathrm{D}p^\mu}{\mathrm{D}\tau} = 0 \tag{5.6}$$

On doit transporter p^μ parallèlement. Mais p^μ est le long de la trajectoire. p^μ est donc transporté parallèlement à lui-même, ce qui est cohérent avec la notion de géodésique.

L'équation (6) est appelée l'équation géodésique. Avec

$$p^\mu = m \cdot \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{D}q^\mu}{\mathrm{D}s} = \frac{\mathrm{d}q^\mu}{\mathrm{d}s} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\, q^\nu \frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}s}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Le temps propre n'est pas un bon prarامètre si on regarde des photons. Mieux vaut alors utiliser le paramètre λ :

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda} = 0.$$

La masse n'intervient pas : la géométrie Riemannienne est compatible avec le principe d'équivalence faible.

On voit aussi que $\frac{\mathrm{D}x^\mu}{\mathrm{D}s^2} = 0$. Autrement dit, pas de composantes de courbure pour les géodésiques dans l'espace courbe considéré.

5.6 Géodésiques et moindre action

Du point de vue géométrique, les géodésiques sont les lignes les plus courtes entre des événements d'espace-temps. Physiquement, elles sont les trajectoires des masses-test en chute libre. Une troisième propriété est liée à ce qu'elles sont les trajectoires stationnaires. C'est intéressant pour les calculs d'orbites. On va ici le montrer. En espace plat une ligne droite est le trajet le plus court entre deux points : $S_{AC} < S_{AB} + S_{BC}$. En espace de Minkowski :

$$\begin{aligned} S_{AC} &= ct_{AC} \\ S_{AB} &= (c^2t_{AB}^2 - x^2)^{1/2} \\ S_{BC} &= (c^2t_{BC}^2 - x^2)^{1/2} \qquad \text{où } x \text{ est la coordonnée spatiale de } B \\ \Longrightarrow \quad S_{AC} &> S_{AB} + S_{BC} \end{aligned}$$

La ligne droite est donc le chemin de plus long en espace de Minkowski.

Une description qui couvre les deux cas consiste à dire que les géodésiques sont les trajectoires stationnaires $\delta S = 0$.

$$S \equiv \int \underbrace{g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu}_{\mathrm{d}s^2}$$

On paramétrise par la distance propre :

$$S \equiv \int \underbrace{\left(g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\right)}_{I}\mathrm{d}s$$

$$\delta S = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta I = 0$$

Si $I = \int_A^B L\,\mathrm{d}\tau$ avec $L(x^\mu, q^\mu, t)$ et $q^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$

$$\delta I = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu}\right) = 0$$

Prenons $L = g_{\alpha\beta}\,q^\alpha\,q^\beta$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= g_{\alpha\beta,\mu}\,q^\alpha q^\beta \\
\frac{\partial L}{\partial q^\mu} &= g_{\alpha\mu}\,q^\alpha + g_{\mu\beta}\,q^\beta \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu}\right) &= \frac{\mathrm{d}g_{\alpha\mu}}{\mathrm{d}\tau}\cdot q^\alpha + \frac{\mathrm{d}g_{\mu\beta}}{\mathrm{d}\tau}\cdot q^\beta + g_{\alpha\mu}\,\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}\tau} + g_{\mu\beta}\,\frac{\mathrm{d}q^\beta}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\cdot q^\alpha + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\sigma}\cdot\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\tau}\cdot q^\beta + 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \\
&= g_{\alpha\mu,\sigma}\,q^\alpha q^\sigma + g_{\mu\beta,\sigma}\,q^\beta q^\sigma + 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}\tau}
\end{aligned}$$

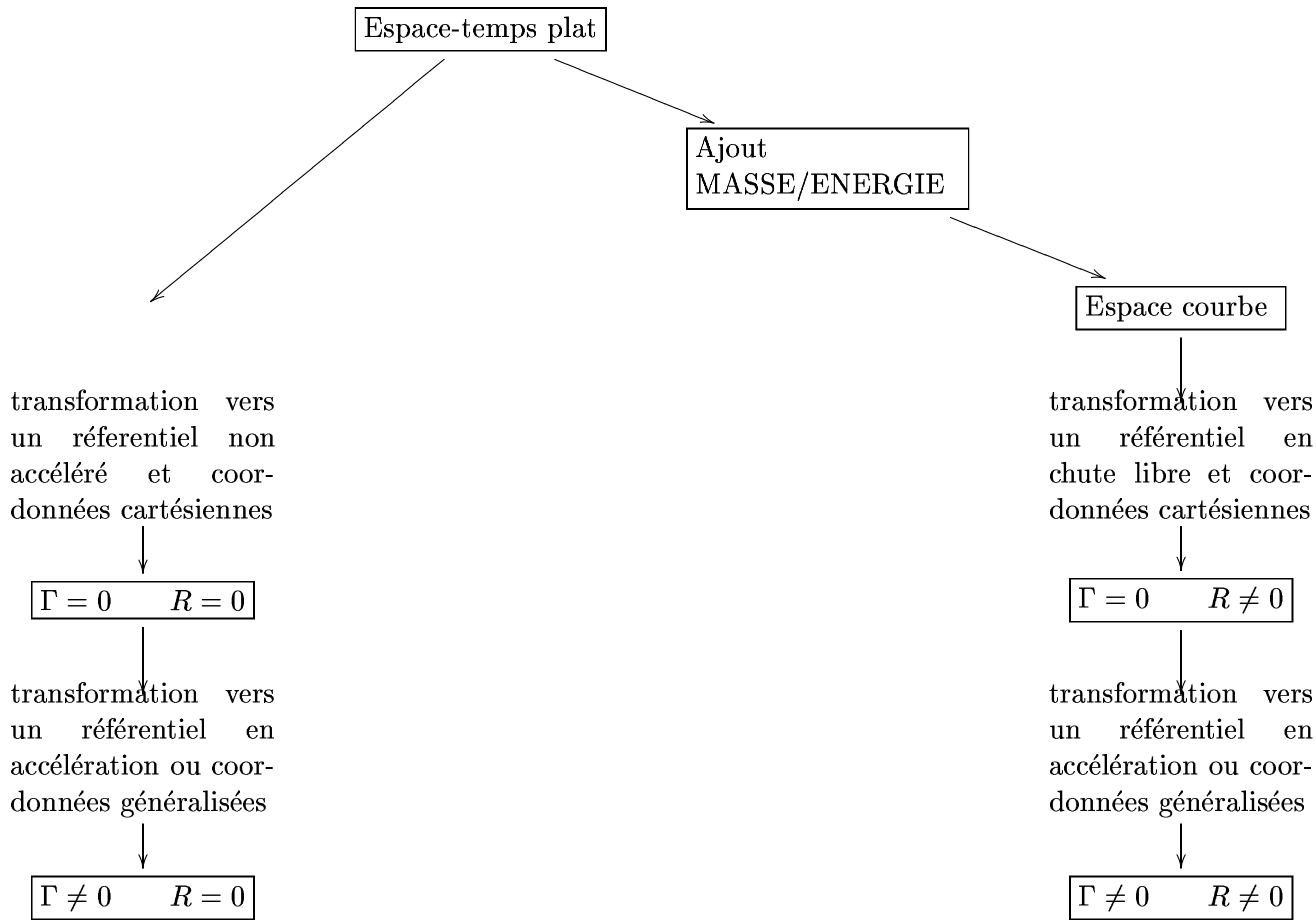
$$\begin{aligned}
\text{donc} \qquad g_{\alpha\beta,\mu}q^\alpha q^\beta - g_{\alpha\mu,\sigma}\,q^\alpha q^\sigma - g_{\mu\beta,\sigma}\,q^\beta q^\sigma - 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \qquad g_{\alpha\beta,\mu}q^\alpha q^\beta - g_{\alpha\mu,\beta}\,q^\alpha q^\beta - g_{\mu\beta,\alpha}\,q^\beta q^\alpha - 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}\tau} &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{or} \qquad -2\Gamma_{\mu\beta\alpha} = -g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\beta,\mu} - g_{\mu\alpha,\beta}$$

$$\begin{aligned}
-2\Gamma_{\mu\beta\alpha} - 2g_{\mu\alpha}\frac{\mathrm{d}q^\alpha}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \\
g_{\mu\nu}\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}q^\alpha q^\beta + g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}q^\mu}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \\
\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}q^\alpha q^\beta + \frac{\mathrm{d}q^\nu}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \\
\Longleftrightarrow \qquad \Gamma^\nu{}_{\beta\alpha}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}^2x^\nu}{\mathrm{d}\tau^2} &= 0 \qquad \text{Equation géodésique !}
\end{aligned}$$

En R.G. on peut trouver des équations de conservation comme en mécanique classique avec ce "pseudo-Lagrangien". En mécanique classique, si L ne dépend pas d'un x^μ, alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial q^\mu}\right) = 0$ est une équation de conservation.

En fonction des conditions initiales les corps en chute libre vont suivre les géodésiques qui se trouvent toutes dans le cône de lumière futur. Elles sont de type temps $\int \mathrm{d}s^2 > 0$. Pour des photons $\int \mathrm{d}s^2 = 0$, ce qui correspond aux géodésiques nulles. Les géodésiques de type espace ont $\int \mathrm{d}s^2 < 0$, ce qui correspondrait à des mouvements plus rapides que c. Aucune particule matériel ne peut suivre des géodésiques de type espace, mais elles peuvent être utiles à considerer pour des raisons géométriques.



Ici R représente la courbure, mais en fait c'est le tenseur de Riemann.

Chapitre 6

Gravitation relativiste

La technique pour convertir une équation de R.R. en une équation valable dans tous les référentiels (i.e. de remplacer les dérivées par les dérivées covariantes) ne peut pas être appliquée à la gravité car on n'a pas de théorie gravitationnelle compatible avec R.R.. De toute façon la gravité est une manifestation de la courbure et la R.R. ne marche qu'en espace plat ! Einstein a pressenti un lien entre la distribution masse/énergie et la courbure de l'espace-temps sous forme tensorielle.

6.1 Tenseur de courbure de Riemann

La courbure d'une 2-surface est donnée par la valeur de la courbure gaussienne à chaque point. Mais pour un espace de dimension supérieure, cela n'est pas si simple. Une description totale de la courbure en un point est donnée alors par un tenseur de rang 4 appelé tenseur de Riemann. On a vu que la courbure est liée aux dérivées secondes de la métrique, i.e. aux variations du tenseur métrique.

Un vecteur est transporté parallèlement sur un chemin fermé infinitésimal. On appelle ce vecteur v^α. Les variations du vecteur sont respectivement :

$$- \quad {\Gamma^\alpha}_{\beta\nu}(x)\, v^\nu(x)\, \mathrm{d}a^\beta \tag{6.1}$$
$$- \quad {\Gamma^\alpha}_{\beta\nu}(x+\mathrm{d}a)\, v^\nu(x+\mathrm{d}a)\, \mathrm{d}b^\beta \tag{6.2}$$
$$+ \quad {\Gamma^\alpha}_{\beta\nu}(x+\mathrm{d}b)\, v^\nu(x+\mathrm{d}b)\, \mathrm{d}a^\beta \tag{6.3}$$
$$+ \quad {\Gamma^\alpha}_{\beta\nu}(x)\, v^\nu(x)\, \mathrm{d}b^\beta \tag{6.4}$$

où on a utilisé $\mathrm{d}q^\mu = -{\Gamma^\nu}_{\nu\rho}\mathrm{d}x^\nu$. On additione les équation (7)+(9) et (8)+(10) et avec la propriété $f(x+\mathrm{d}x) - f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$ on retrouve pour $\mathrm{d}v^\nu$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}v^\nu &= \frac{\partial({\Gamma^\alpha}_{\beta\nu}v^\nu)}{\partial x^\gamma}\,\mathrm{d}b^\gamma\,\mathrm{d}a^\beta - \frac{\partial({\Gamma^\alpha}_{\beta\nu}v^\nu)}{\partial x^\delta}\,\mathrm{d}a^\delta\,\mathrm{d}b^\beta \\
&= \mathrm{d}a^\beta\,\mathrm{d}b^\gamma\left({\Gamma^\alpha}_{\beta\nu,\gamma}v^\nu + {\Gamma^\alpha}_{\beta\nu}\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\gamma}\right) - \mathrm{d}a^\delta\,\mathrm{d}b^\beta\left({\Gamma^\alpha}_{\beta\nu,\delta}v^\nu + {\Gamma^\alpha}_{\beta\nu}\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\delta}\right) \\
\text{car}\qquad \mathrm{d}v^\nu &= -{\Gamma^\nu}_{\sigma\gamma}\,v^\sigma\mathrm{d}x^\gamma \\
\mathrm{d}v^\nu &= \mathrm{d}a^\delta\,\mathrm{d}b^\gamma\,v^\beta\,({\Gamma^\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - {\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + {\Gamma^\alpha}_{\sigma\gamma}\,{\Gamma^\sigma}_{\beta\delta} - {\Gamma^\alpha}_{\sigma\delta}\,{\Gamma^\sigma}_{\beta\sigma}) \\
&= \mathrm{d}a^\delta\,\mathrm{d}b^\gamma\,v^\beta\,{R^\alpha}_{\beta\gamma\delta} \\
\text{où}\qquad {R^\alpha}_{\beta\gamma\delta} &= {\Gamma^\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - {\Gamma^\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + {\Gamma^\alpha}_{\sigma\gamma}\,{\Gamma^\sigma}_{\beta\delta} - {\Gamma^\alpha}_{\sigma\delta}\,{\Gamma^\sigma}_{\beta\sigma} \qquad \text{tenseur de Riemann}
\end{aligned}$$

Le tenseur de Riemann caractérise la courbure de l'espace-temps. Dans un référentiel en chute libre, les coefficients de connexion s'annulent mais pas leurs dérivées. On a donc :

$$\begin{aligned}
R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma,\delta} \\
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= g_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma_{\alpha\beta\delta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\beta\gamma,\delta} \\
\text{or} \qquad 2\Gamma_{\nu\mu\rho} &= g_{\mu\nu,\rho} - g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} \\
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\delta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} + g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\alpha\beta,\gamma\delta} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}) \\
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2}(g_{\alpha\delta,\beta\gamma} - g_{\beta\delta,\alpha\gamma} - g_{\alpha\gamma,\beta\delta} + g_{\beta\gamma,\alpha\delta})
\end{aligned}$$

Un choix de référentiel adapté peut permettre d'annuler les coefficients de connexion (dérivées premières de la métrique) mais pas le tenseur de Riemann. Celui-ci s'annule quand l'espace est plat pour tout système de coordonnées.

Une propriété importante des espaces courbes est que deux géodésiques initialement parallèles ne le resteront pas (ex : les longitudes).

Soit ξ un vecteur entre deux géodésiques à x et $x+\xi$. Les équations géodésiques sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} &= 0 \qquad (6.5)\\
\frac{\mathrm{d}^2 (x+\xi)^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x+\xi)\,\frac{\mathrm{d}(x+\xi)^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}(x+\xi)^\lambda}{\mathrm{d}\tau} &= 0
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x+\xi) &= \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x) + \xi^\rho\, \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho} \\
\frac{\mathrm{d}(x+\xi)^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}(x+\xi)^\lambda}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}\tau}
\end{aligned}$$

On trouve au premier ordre en ξ :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\mathrm{d}^2 \xi^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho}(x)\,\xi^\rho\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \mathrm{O}(\xi^2) = 0 \qquad (6.6)$$

On fait la différence (12) - (11) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \xi^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho}(x)\,\xi^\rho\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x)\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Si on se place dans un référentiel en chute libre où les coefficients de connexion s'annulent, on a :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \xi^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho}(x)\,\xi^\rho\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0 \qquad (6.7)$$

Par ailleurs, nous avons la dérivée covariante :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\xi^\mu}{\mathrm{D}\tau} &= \frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma{\mu}_{\rho\lambda}\,\xi^\rho\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} \\
\Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{D}^2\xi^\mu}{\mathrm{D}\tau^2} &= \frac{\mathrm{d}^2\xi^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma{\mu}_{\rho\lambda,\nu}\,\xi^\rho\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} + \text{ termes où } \Gamma \text{ n'est pas dérivée} \qquad (6.8)
\end{aligned}$$

Les termes où Γ n'est pas dérivé s'annulent dans un référentiel en chute libre. En éliminant $\frac{\mathrm{d}^2\xi^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$ entre (13) et (14), nous trouvons :

$$\frac{\mathrm{D}^2\xi^\nu}{\mathrm{D}\tau^2} - \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda,\nu}\,\xi^\rho\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho}\,\xi^\rho\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Ici λ et ν jouent des rôles symétriques :

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\nu,\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda,\nu}$$

soit

$$\frac{\mathrm{D}^2\xi^\mu}{\mathrm{D}\tau^2} + (\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu,\lambda})\xi^\rho \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Or

$$R^{\mu}_{\nu\rho\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\rho\nu,\lambda}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{D}^2\xi^\mu}{\mathrm{D}\tau^2} + R^{\mu}_{\nu\rho\lambda}\,\xi^\rho \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

6.2 Tenseur impulsion énergie

En R.R. il existe un quadrivecteur impulsion énergie. Il existe un lien fort entre masse, énergie et impulsion :

$$E^2 = p^2 + m^2.$$

On peut supposer qu'une loi de la gravitation générale ne contiendra donc pas que la masse et l'énergie mais aussi l'impulsion.

On peut regarder la loi de Newton sous forme différentielle. Pour une masse unité à distance r d'un corps de masse M :

$$F = \frac{GM}{r^2} \qquad \int F\mathrm{d}S = -4\pi r^2\frac{GM}{r^2} = -4\pi GM$$

D'après le théorème d'Ostrogradsky

$$\int F\mathrm{d}S = \int \nabla F\mathrm{d}V$$

il en suit que

$$\begin{aligned} & \int \nabla F\mathrm{d}V &=& -4\pi GM \\ \Longleftrightarrow & \int \nabla F\mathrm{d}V &=& -4\pi G\int \rho\mathrm{d}V \\ \Longleftrightarrow & \nabla F &=& -4\pi G\rho \end{aligned}$$

Prenons l'exemple d'un nuage de poussière dans son référentiel propre S. Il a une densité d'énergie $\rho_0 = m_0 n_0$ où m_0 est la masse au repos d'un grain de poussière et n_0 le nombre par unité de volume. Vu d'un référentiel S' se déplaçant avec la vélocité β par rapport au nuage

$$\begin{aligned} & m_0 &\Longrightarrow& m_0\gamma \\ & n_0 &\Longrightarrow& n_0\gamma \\ \text{donc} \quad & \rho_0 &\Longrightarrow& \rho = \rho_0\gamma^2 \end{aligned}$$

Clairement, ρ n'est pas un scalaire, il serait invariant, ni la composante d'un quadri-vecteur, il se transformerait linérairement en γ. Le comportement de ρ est celui de la composante temps-temps d'un tenseur de rang 2 : $T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu$ où v^ν es le quadri-vecteur velocité du nuage. Dans le référentiel S, seule la composante 00 est non-nulle : $(T^{00})_0 = \rho_0$. Par transformation de S en S' :

$$(T^{00})_0 \Longrightarrow \gamma^2(T^{00})_0$$

On peut construire un objet plus général qui s'applique à des structures plus complexes qu'un nuage de poussière : $T^{\mu\nu}$ est le flux de la composante μ du quadri-impulsion suivant da direction ν. ex :

- T^{00} est la densité d'énergie
- T^{0i} est le flux d'énergie à travers d'une unité de surface
- T^{ii} est le flux de la composante i d'impulsion dans la direction i par unité de surface
- T^{ij} est le flux de la composante i d'impulsion dans la direction j par unité de surface. Témoigne l'entraînement visqueux dans le plan j

On voit bien ici qu'après une transformation de Lorentz les composantes spatiales vont se mêler au T^{00} est affecter la courbure spatiale. Tous les tenseurs du T^{00} vont contribuer à la courbure!

Voir la contradiction avec la vision classique. On dit souvent que la pression dans une étoile empêche l'effondrement gravitationnel. Ici, au contraire, on voit que la pression peut augmenter la courbure et favoriser, par exemple, l'effondrement d'une étoile en trou noir.

6.3 Lois de conservations

Regarder ce qui se passe pour l'énergie. Soit une boîte de taille l. Le taux de changement du contenu énergétique de la boîte est $l^3 \frac{\partial T^{00}}{\partial t}$. Ceci provient des flux à travers les 6 faces. Soit pour les faces en $a = x$ et $b = x + l$:

$$l^2 T^{01}(x) - l^2 T^{01}(x+l) = -l^3 \frac{\partial T^{00}}{\partial t}$$

$$\text{soit} \qquad \begin{aligned} l^3 \frac{\partial T^{00}}{\partial t} &= -l^2 \left(T^{01}(x+l) - T^{01}(x) \right) \\ &= -l^2 \cdot l \frac{\partial T^{00}}{\partial t} \end{aligned}$$

idem pour les autres faces

$$\Longrightarrow l^3 \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = -l^3 \left(\frac{\partial T^{01}}{\partial x} + \frac{\partial T^{02}}{\partial y} + \frac{\partial T^{03}}{\partial z} \right)$$

Soit

$$\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha} = T^{0\alpha}{}_{,\alpha}.$$

On appelle cela la divergence de $T^{0\alpha}$. De même pour conservation impulsion :

$$T^{\beta\alpha}{}_{,\alpha} = 0.$$

Cela résume toutes les lois de conservation de la quadri-impulsion en R.R. Cela revient à demander que les divergences du tenseur énergie-impulsion s'annulent partout.

Ce résultat de R.R. peut devenir valable en espace courbe en utilisant des dérivées covariantes :

$$\boxed{T^{\beta\alpha}{}_{;\alpha} = 0}$$

Caractéristiques de T :
- il s'annule à l'absence de contenu
- il est de rang 2
- il est de divergence nulle
- il est symétrique

6.4 Equations d'Einstein

Nous avons vu comment de propageaient les champs en espace courbe. Reste à déterminer comment la masse crée la courbure.

Einstein postule que le tenseur énergie est la source de la courbure de l'espace-temps et suggère la relation la plus simple entre celui-ci et la courbure[1] :

$$G_{\mu\nu} = KT_{\mu\nu}$$

où $G_{\mu\nu}$ est un tenseur qui décrit la courbure spatio-temporelle et K un scalaire constant dont la valeur renseigne sur l'efficacité avec laquelle l'espace-temps est distordu par son contenu. Sa valeur (8π en unités naturelles) s'obtient pour retrouver la théorie newtonnienne à la limite des champs faibles.

Si l'on souhaite que $G_{\mu\nu}$ soit une mesure de la courbure de l'espace temps, il doit avoir les propriétés suivantes :
- **G** devient nul en espace plat.
- **G** doit être construit à partir du tenseur de courbure de Riemann, de la métrique et de rien d'autre.
- **G** doit se distinguer des autres tenseurs qui pourraient être construits à partir de Riemann et de la métrique par les exigences suivantes :
  - **G** doit être Riemann-linéaire.
  - **G** doit être, tel **T**, symétrique et de rang 2.
  - **G** doit être de divergence nulle de façon a présenter une sorte de *conservation automatique.*[2]

$$\nabla \mathbf{G} = 0.$$

On peut alors montrer qu'il n'existe qu'un seul tenseur répondant à toutes ses exigences, il s'agit du tenseur d'Einstein **G** qui s'exprime en termes du tenseur de courbure de Ricci :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

Ainsi, l'équation d'Einstein exprimant la génération d'une courbure de l'espace temps en présence d'une source peut s'écrire :

$$\boxed{\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}.}$$

Il est important de souligner le fait que ces équations peuvent être déduites d'un Lagrangien assez simple : $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$. En d'autres termes, l'action en Relativité Générale s'écrit :

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}R$$

[1] c'est une hypothèse, à l'image du tenseur de Maxwell $F^{\mu\nu}$ supposé linéaire en dérivées du quadripotentiel $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$

[2] Il ne faut pas voir cela comme une conséquence de ce que **T** est à divergence nulle, le raisonnement serait alors circulaire. On peut se convaincre de la nécessité de cette hypothèse d'une toute autre façon ici présentée brièvement. Si les équation d'Einstein ont l'ambition de prédire l'évolution de la géométrie, il faut que la spécification des conditions initiales et de leur dérivées premières suffise à connaître l'état ultérieur. La géométrie de l'espace temps est décrite par $ds^2 = g_{\alpha\beta}(P)dx^\alpha dx^\beta$, c'est à dire par 10 fonctions $g_{\alpha\beta}$ en P. Il semble donc que 10 conditions initiales soient nécessaires. Il n'en est rien. Considérons un nouveau système de coordonnées $x^{\mu'}$ défini par $x^\alpha = x^\alpha(x^{\mu'})$ qui décrive la même géométrie par de nouvelles fonctions métriques $g_{\alpha'\beta'}(P)$. Il ne *faut pas* que les équations de champ d'Einstein permettent de déterminer les 10 fonctions : le choix des coordonnées est l'affaire du physicien pas de *la* physique. Les équations de champ ne *doivent* spécifier que 6 contraintes indépendantes de façon que l'arbitraire du choix des coordonnées demeure. Comment se peut-il que les 10 équations $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ n'en soient en fait que 6 ? Précisément grâce à la condition $G^{\alpha\beta}_{;\beta} \equiv 0$ qui nous intéresse ici et qui permet de faire en sorte que seules 6 équations indépendantes puissent être extraites des équations de champ. Dans cette remarque, on voit que la divergence nulle de **G** n'est pas seulement un souhait philosophique de conservation mais aussi une nécessité dynamique absolue pour garantir l'arbitraire du système de coordonnées.

et les équations d'Einstein découlent de la recherche de l'extremum de cette action en considérant les variations de la métrique $g_{\mu\nu}$.

La théorie de la Relativité Générale a passé avec succès tous les tests imaginés depuis des décennies. Elle prédit un certain nombre de phénomènes nouveaux qui font actuellement l'objet d'intenses recherches expérimentales, telle l'existence d'ondes gravitationnelles.
Actuellement, beaucoup d'efforts sont consacrés à la construction d'une théorie de la gravitation qui prenne en compte les phénomènes quantiques. Il est probable qu'un nouveau saut conceptuel soit nécessaire pour réaliser ce programme. Ce saut pourrait être encore plus radical que celui d'Einstein lorsqu'il a décidé d'introduire une géométrie courbe pour l'espace-temps.