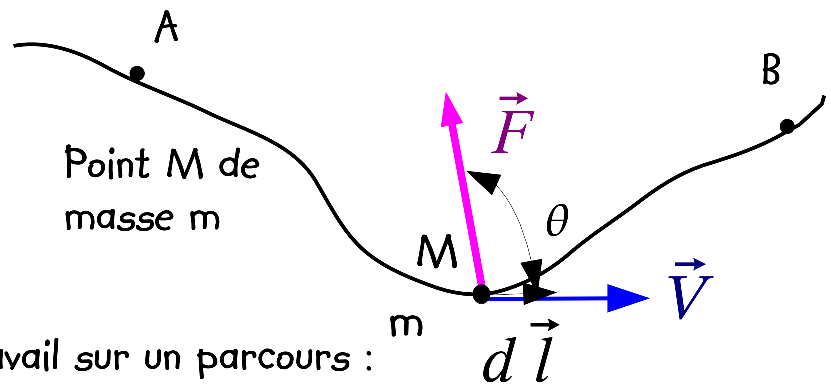
Travail

Puissance

Énergie

Travail (work)



travail élémentaire d'une force :

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F\,dl\cos\theta \qquad [\,W\,] = Joule\ (J)$$

Peut être > 0 ou < 0 selon l'angle entre $\vec{F}$ et $d\,\vec{l}$

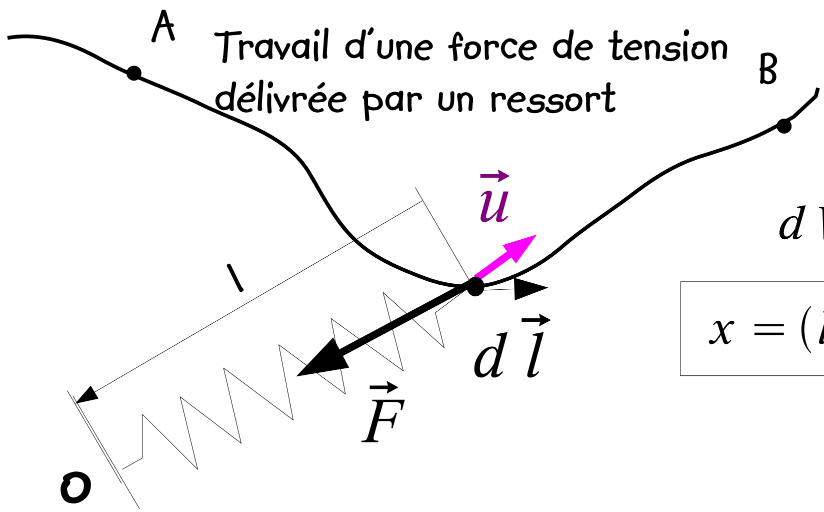
travail sur un parcours :

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F}\cdot d\,\vec{l}$$

Une force qui ne se déplace pas ne travaille pas !

Une force qui est constamment perpendiculaire à son déplacement ne travaille pas plus ! exemples : force magnétique sur un point chargé en mouvement ou réaction d'un support sans frottement

Travail d'une force de tension délivrée par un ressort



$$\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u} \qquad \vec{l} = l\,\vec{u}$$

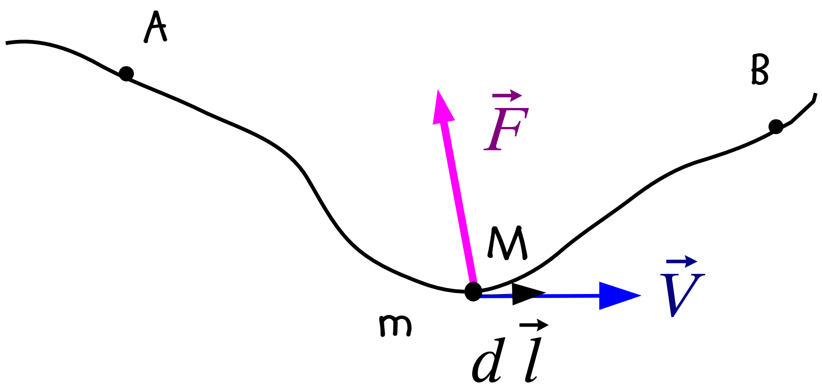
$$d\,\vec{l} = dl\,\vec{u} + l\,d\,\vec{u} \qquad \vec{u}\perp d\,\vec{u}$$

$$dW = -k\,(l-l_0)\vec{u}\cdot(dl\,\vec{u}+l\,d\,\vec{u}) = -k(l-l_0)\,dl$$

$$\boxed{x = (l-l_0)} \Rightarrow dx = dl \quad dW = -k\,x\,dx = -d\left(\frac{k\,x^2}{2}\right)$$

$$\boxed{W_A^B = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)}$$

Puissance (power)



Puissance instantanée développée par une force :

$$P(t) = \frac{d\,W(t)}{dt} \qquad [\,P\,] = \text{ Watt (W)}$$

$$P(t) = \vec{F}(t)\frac{d\,\vec{l}}{dt} = \vec{F}(t)\cdot\vec{V}(t) = F(t)V(t)\cos\theta$$

Puissance nécessaire à un véhicule pour se déplacer dans l'air :

$$\vec{F}_f = -\frac{1}{2}C_x\,\rho\,S\,V\,\vec{V}$$

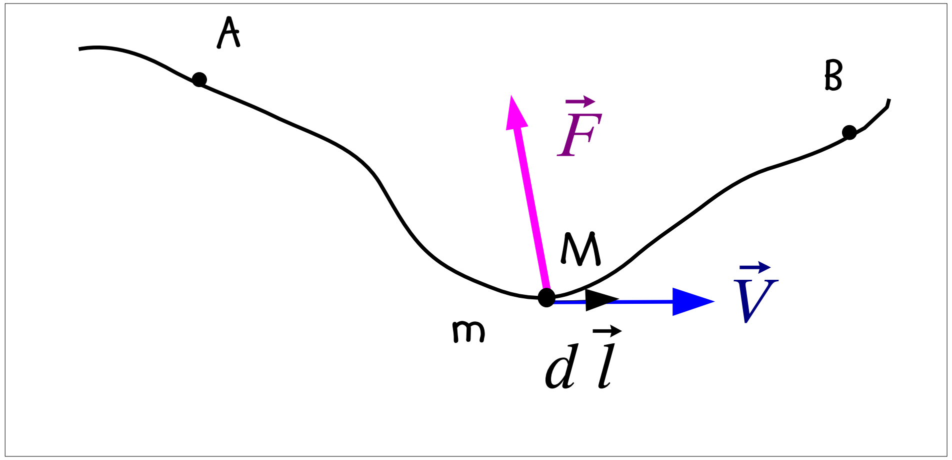
$$P_f = \vec{F}_f\cdot\vec{V} = -\frac{1}{2}C_x\,\rho\,S\,V\,\vec{V}\cdot\vec{V} = -\frac{1}{2}C_x\,\rho\,S\,V^3$$

$$P_v = -P_f$$

$$V_{max} = \sqrt[3]{\frac{2\,P_v^{max}}{C_x\,\rho\,S}}$$

La puissance d'un moulin à vent ou d'une éolienne croît aussi comme le cube de la vitesse du vent !
Mais dans ce cas on cherchera à rendre maximal le produit de $C_x\,S$

Énergie cinétique (kinetic energy)



PFD : donc référentiel Galiléen
et masse constante

$$\vec{F} = m\frac{d\,\vec{V}}{dt}$$

$$P = \vec{F}\cdot\vec{V} = m\frac{d\,\vec{V}}{dt}\cdot\vec{V} = \frac{d\,W}{dt}$$

$$d\,W = m\,d\,\vec{V}\cdot\vec{V} = m\,d\,(\frac{\vec{V}^2}{2}) = d\,(\frac{1}{2}m\,V^2)$$

référentiel inertiel

$$E_c = \frac{1}{2}m\,V^2$$

énergie cinétique en Joules (J)

Théorème de l'énergie cinétique :

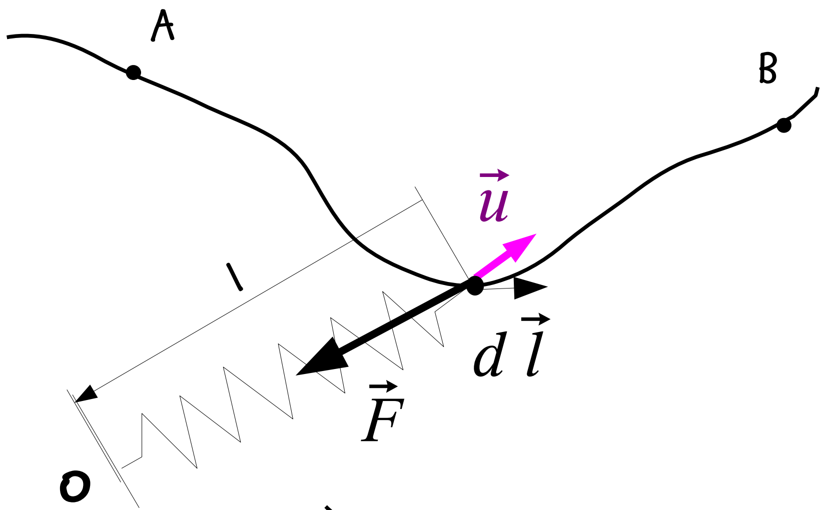
$$d\,W = dE_c$$

$$W_A^B = \int_A^B d\,(E_c) = E_c^B - E_c^A$$

vrai uniquement dans un référentiel galiléen

Le travail d'une force appliquée à un point matériel qui se déplace de A à B est égal à la variation de son énergie cinétique entre A et B .

Forces conservatives



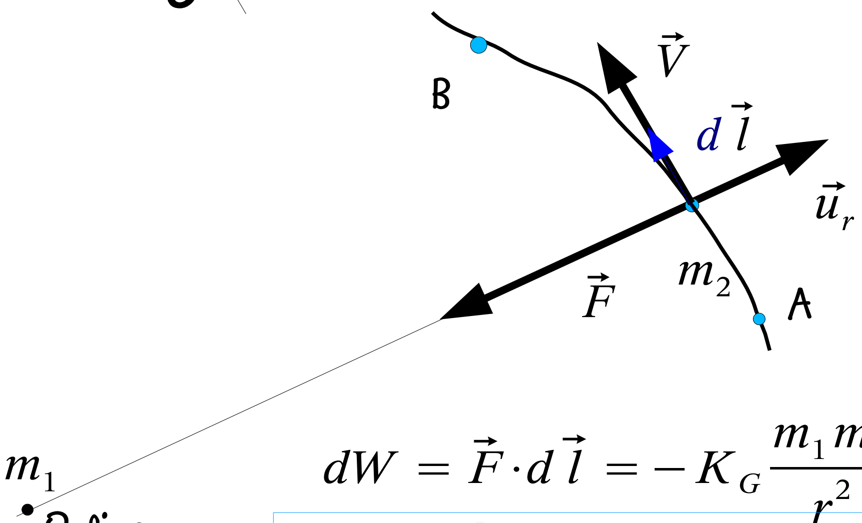
Travail d'un ressort :

$$dW = -d\left(\frac{1}{2}k\,x^2\right)$$

$$W_A^B = \int_A^B d\,W = -\frac{1}{2}k\left(x_B^2 - x_A^2\right)$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi entre A et B !

Si on parcourt le chemin de A à B puis B à A , la somme des travaux est nulle



Travail des forces gravitationnelles :

$$\vec{F} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

$$d\vec{l} = d\,r\,\vec{u}_r + r\,d\,\vec{u}_r \quad et \quad d\,\vec{u}_r \perp \vec{u}_r$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\,\vec{l} = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r\cdot(dr\,\vec{u}_r + r\,d\,\vec{u}_r) = -K_G \frac{m_1 m_2}{r^2}d\,r = d\left(K_G \frac{m_1 m_2}{r}\right)$$

$$W_A^B = \int_A^B d\,W = K_G\,m_1\,m_2\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

Ce travail ne dépend pas du chemin suivi entre A et B !

Forces conservatives et énergie potentielle

Une force est dite conservative si son travail d'un point A à un point B ne dépend pas du chemin parcouru

Mathématiquement, cela est équivalent à formuler que le travail élémentaire de cette force est une différentielle totale (avec un signe moins) :

$$dW = -d(Ep)$$

E_p est appelée l'énergie potentielle (en Joules J) (potential energy)

$$W_A^B = \int_A^B dW = \int_A^B -d(E_p) = E_p^A - E_p^B$$

Pour un ressort : $dW = -d\left(\frac{1}{2}k\,x^2\right) \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 + cte = \frac{1}{2}k\,(l-l_0)^2 + cte$

Pour une force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles : $dW = d\left(K_G \frac{m_1 m_2}{r}\right) \Rightarrow E_p = -K_G \frac{m_1 m_2}{r} + cte$

La constante ne jouera aucun rôle dans la pratique , car nous ne nous intéresserons qu'à des différences d'énergies potentielles.
L'énergie potentielle «mesure» la potentialité de fournir de l'énergie : évident pour le cas du ressort , un peu moins frappant pour la force de gravitation mais Ep diminue tout de même quand r diminue

Forces conservatives et énergie potentielle

$$d(Ep) = -dW = -\vec{F}\cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \vec{F} = -\vec{grad}(E_p) = -\vec{\nabla}(E_p)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$d(E_p) = -(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})\cdot(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k})$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x}dx + \frac{\partial E_p}{\partial y}dy + \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\ ,\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}\ ,\ F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

Vecteur gradient de la fonction Ep (énergie potentielle ici)

Exemple de vecteur gradient : vecteur indiquant la direction de plus grande pente sur une surface 3D donnée par la fonction z(x,y) (l'altitude en fonction de x et y)

$$\vec{\nabla}(z(x,y)) = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\vec{j}$$

Une force conservative dérive d'une énergie potentielle !

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla}(E_p) = \frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

Forces dissipatives (non conservatives)

Le travail de ces forces conduit à des pertes d'énergie irréversibles

Mathématiquement, le travail de ces forces est toujours négatif . Leur travail élémentaire ne peut pas s'exprimer sous la forme d'une différentielle totale et de ce fait l'énergie dissipée (travail négatif) dépend du chemin parcouru .

Exemple : force de frottement visqueux : $d\,W = -k\,\vec{V}\cdot d\,\vec{l} = -k\,\vec{V}\cdot\frac{d\,\vec{l}}{dt}dt = -k\,\vec{V}\cdot\vec{V}\,dt = -k\,V^2\,dt$

$W_A^B = E_c^B - E_c^A$ Théorème de l'énergie cinétique . Il est toujours vrai dans un référentiel inertiel que les forces soient conservatives ou dissipatives

$W_A^B = (W_A^B)_C + (W_A^B)_{NC}$

Travail des forces dissipatives

Travail des forces conservatives

$$W_A^B = E_c^B - E_c^A = (W_A^B)_C + (W_A^B)_{NC} = E_p^A - E_p^B + (W_A^B)_{NC}$$

$$(E_c^B + E_p^B) - (E_c^A + E_p^A) = (W_A^B)_{NC} = E_M^B - E_M^A$$

avec $E_M = E_c + E_p$ énergie mécanique (mechanical energy)

Théorème de l'énergie mécanique : $E_M^B - E_M^A = (W_A^B)_{NC}$

Puisque le travail dissipatif est toujours négatif, l'énergie mécanique ne peut que décroître ou rester constante si le système est conservatif

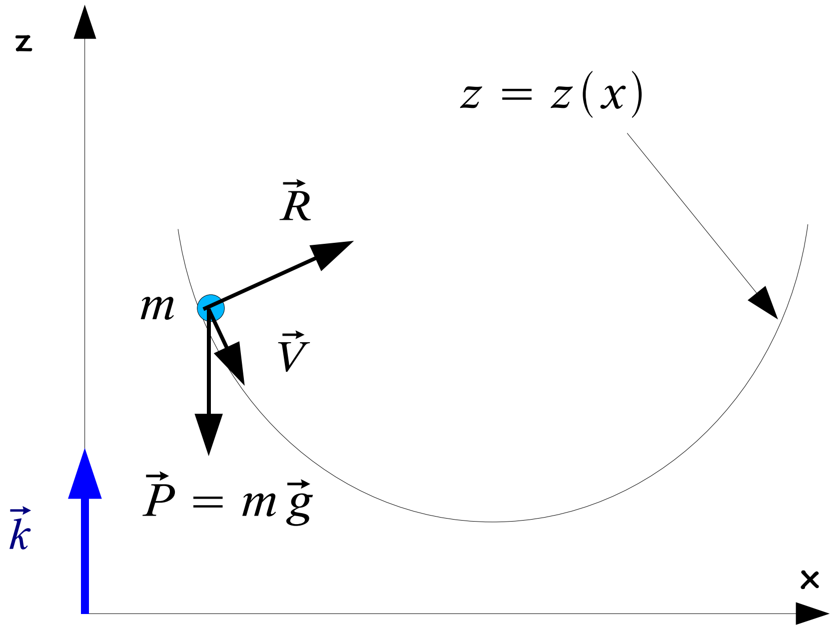
Conservation de l'énergie mécanique et états liés (bound states)

L'énergie cinétique d'un système est toujours positive : $E_M = E_c + E_p \geq E_p$

Il faut noter ici que l'énergie potentielle englobe toutes les énergies potentielles de toutes les forces conservatives qui agissent sur le système

Si le système est purement conservatif, l'énergie mécanique de ce système se conserve au cours du mouvement , elle reste donc à tout moment supérieure au égale à l'énergie potentielle de ce système . Ceci impose une contrainte sur les états possibles du système .

Exemple : masse glissant sans frottement dans un cavité lisse, lâchée à vitesse nulle à t=0 .



La réaction de la paroi est constamment perpendiculaire à la vitesse car glissement sans frottement .

$\vec{R} \cdot \vec{V} = 0$ Cette force ne travaille pas ! Elle ne contribue pas à l'énergie mécanique .

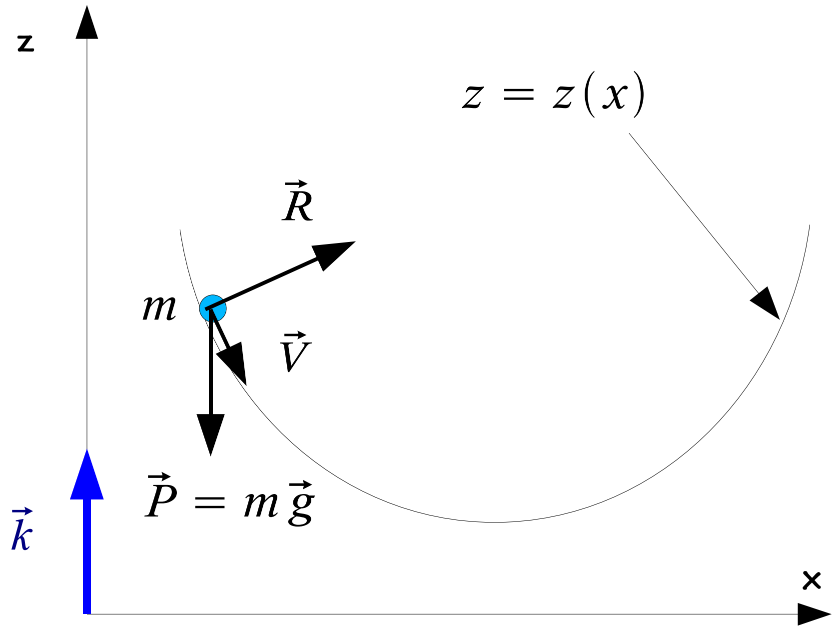
$$\vec{P} = -mg\vec{k} = -\vec{\nabla} E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial z} . \vec{k}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = mg \Rightarrow E_p = mgz + cte$$

Pour simplifier on choisit cte = 0

$E_p = mgz(x)$ et finalement $E_M = \frac{1}{2} m V^2 + mgz(x)$

Conservation de l'énergie mécanique et états liés



Exemple : masse glissant sans frottement dans un cavité lisse, lâchée à vitesse nulle à t=0 .

$$E_M = E_c + E_p \geq E_p$$

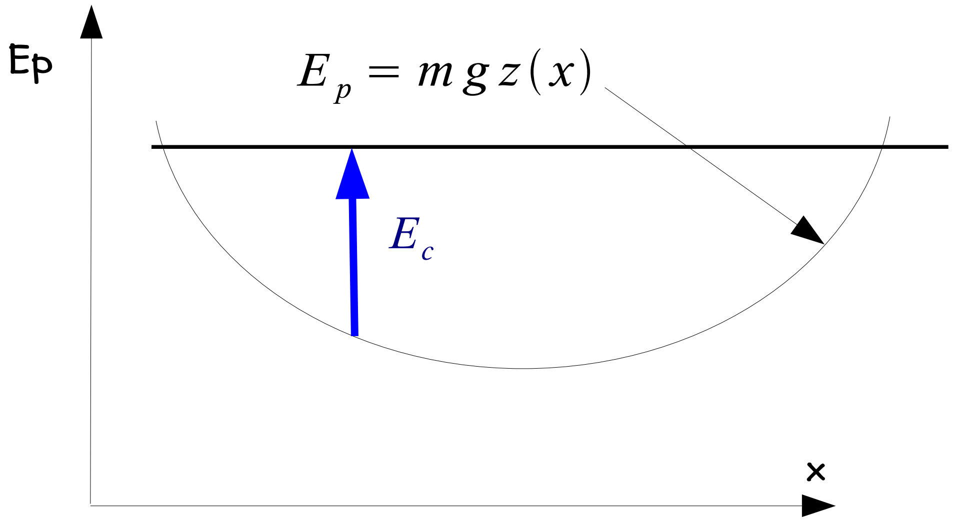
$$E_M = \frac{1}{2} m V^2 + m g z(x)$$

$$\text{à } t=0, V=0 \text{ et } z=z_0 \qquad E_M = m g z_0$$

$$E_M = E_c + E_p \geq E_p \Rightarrow m g z_0 \geq E_p \Rightarrow m g z_0 \geq mg z$$

$$\Rightarrow z_0 \geq z$$

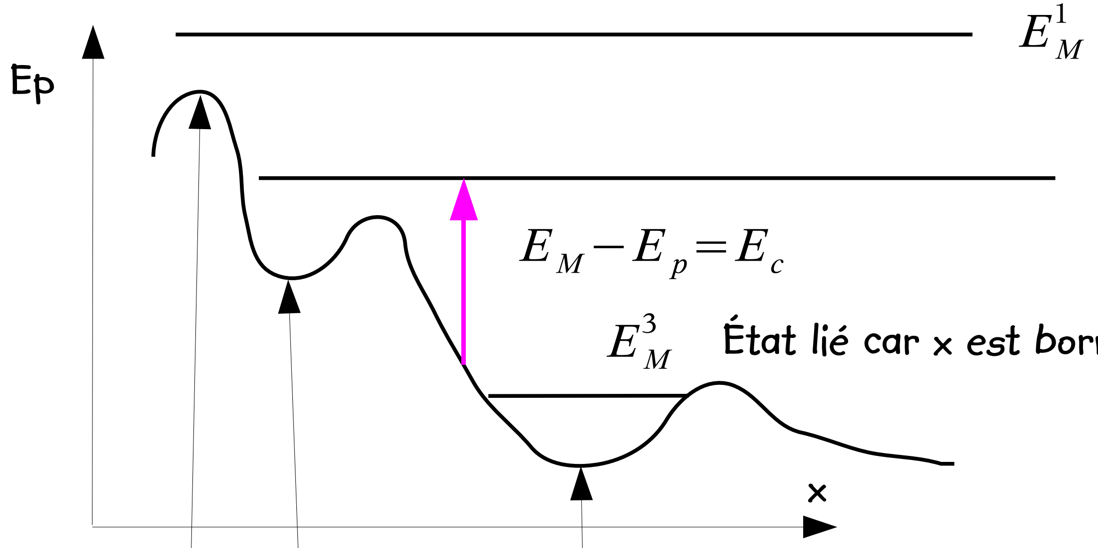
La masse m est dans un état lié car elle ne peut pas sortir de la cavité



$$E_M = mg z_0$$

Diagramme d'énergie de la masse liée dans le cavité lisse . Elle est liée dans le puits de potentiel E_p

États libres et liés et conditions d'équilibre



E_M^1 correspond à un état libre le système peut évoluer librement vers la gauche ou la droite

E_M^2 Correspond tjs à un état libre mais le système ne peut évoluer que vers la droite

E_M^3 État lié car x est bornée à droite et à gauche

Position ou état stable $F = 0 = \dfrac{\partial E_p}{\partial x}$ et existence d'une force de rappel qui ramène le système sur sa position stable lorsque l'on s'écarte de la position stable

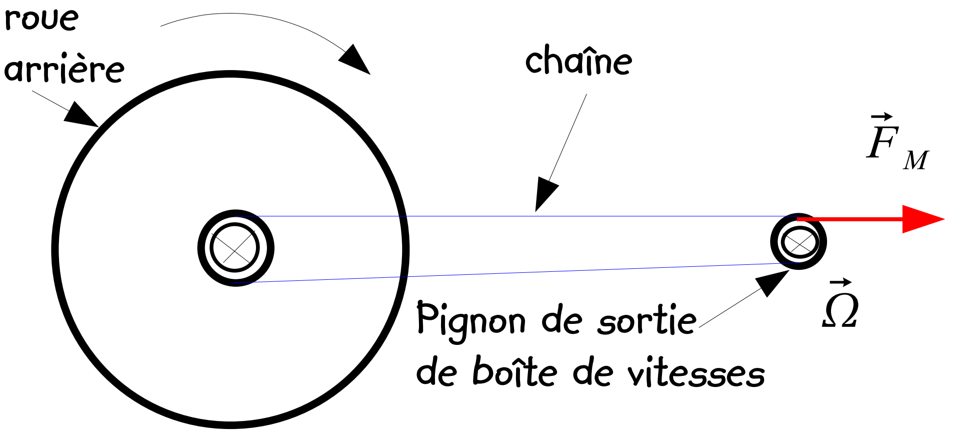
$$\frac{\partial F}{\partial x} < 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} > 0$$

Position ou état métastable
mais un état stable
d'énergie potentielle plus faible existe

Position instable $F = 0 = \dfrac{\partial E_p}{\partial x}$ et existence d'une force déstabilisatrice lorsque l'on s'écarte de la position

$$\frac{\partial F}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} < 0$$

Application : courbes de couple et de puissance d'une moto



Puissance délivrée par le moteur sur le pignon de sortie de boîte de vitesses

$$P = \vec{F}_M \cdot \vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{d(\overrightarrow{OM})}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$P = \vec{F}_M \cdot \vec{V} = \vec{F}_M \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_M) \cdot \vec{\Omega} = \vec{M}_{\vec{F}_M} \cdot \vec{\Omega}$$

moment ou couple «moteur»

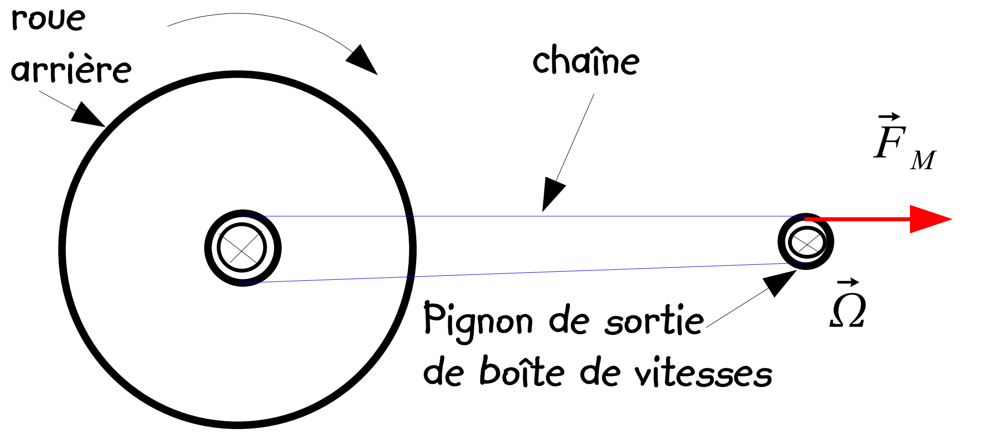
vecteur de rotation

Dans le cas d'une moto , le couple moteur et le vecteur rotation sont colinéaires et portés par l'axe de sortie de boîte

$$P = M_{\vec{F}_M}\,\Omega = M_{\vec{F}_M}\,\frac{d\theta}{dt}$$

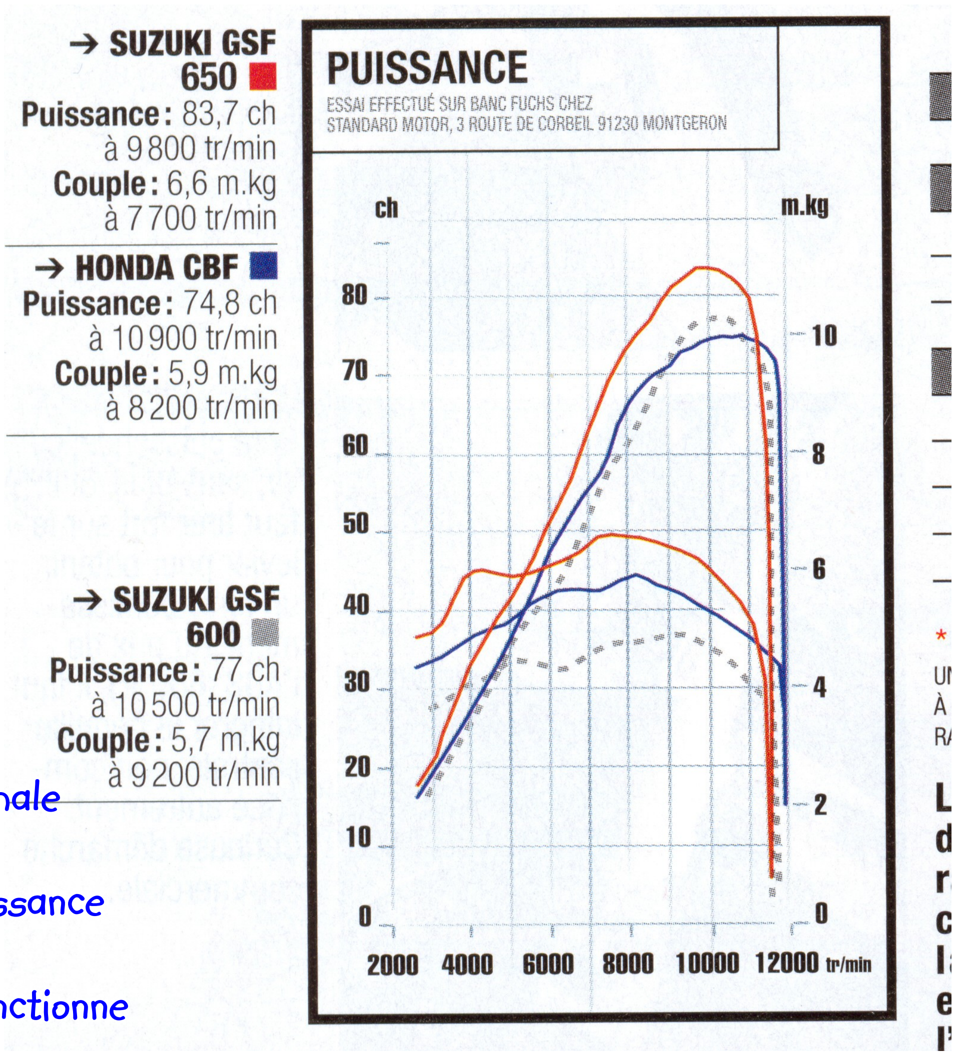
en N m rad s^{-1} mais plus souvent m. kg tours/mn

Application : courbes de couple et de puissance d'une moto



Dans le cas d'une moto , le couple moteur et le vecteur rotation sont colinéaires et portés par l'axe de sortie de boîte

$$P = M_{\vec{F}_M}\,\Omega = M_{\vec{F}_M}\,\frac{d\theta}{dt}$$ en N m rad s^{-1} mais plus souvent m. kg tours/mn



Accélération donnée par le couple «moteur» , vitesse maximale donnée par le puissance maximale délivrée .

Le couple «moteur» est relativement constant , donc la puissance croît avec la vitesse de rotation (le régime) du moteur

Au-delà d'un certain régime (>11000 tr/mn) le moteur ne fonctionne plus correctement , la puissance et le couple s'écroulent