

Symétries discrètes

P C T

Règles de sélection

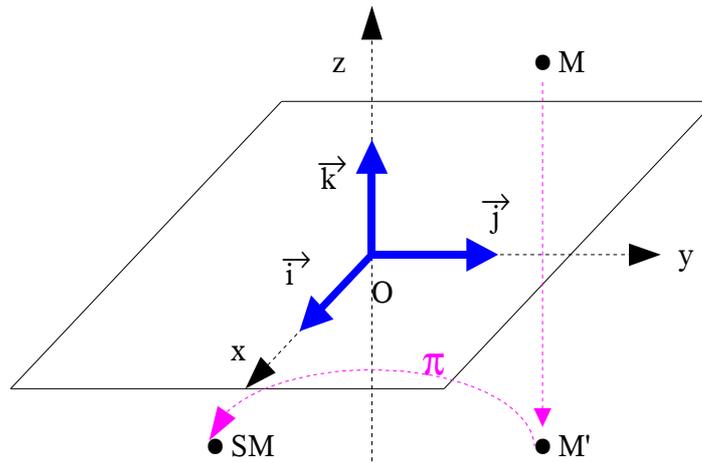
Table des matières

1 La parité :.....	2
1.1 Dans l'espace euclidien :.....	2
1.2 Dans l'espace de Hilbert :.....	3
1.3 Commutation de l'opérateur parité avec les observables courants :.....	3
1.4 Parité intrinsèque d'une particule :.....	5
1.5 Parité intrinsèque des particules de spin 1/2 :.....	6
1.6 Parité intrinsèque des antiparticules :.....	7
1.7 Parité d'une fonction d'onde d'espace :.....	7
1.8 Systèmes de deux particules :.....	8
2 La conjugaison de charge :	9
3 Conservation de P et C :.....	11
3.1 Violation de P dans les interactions faibles :.....	11
3.2 Violation de C dans les interactions faibles :	13
3.3 Conservation de CP dans les interactions faibles ? :.....	14
4 Principe de Pauli et invariance par permutation :.....	15
5 Renversement du temps :.....	15
5.1 Opérateur de renversement du temps :.....	15
5.2 Moment électrique dipolaire du neutron :.....	17
5.3 Réciprocité dans les réactions renversées dans le temps :.....	18
6 Théorème CPT	19
7 Parité G :.....	19
8 Pour en savoir plus :.....	20
9 Exercices	21
9.1 Le positronium	21
9.2 États propres de CP de systèmes de pions.....	21
9.3 Violation de P dans la désintégration du lambda	22

1 La parité :

1.1 Dans l'espace euclidien :

Cette opération correspond à un changement de signe de toutes les coordonnées de chaque point appartenant à l'espace euclidien. En d'autres termes, la parité est la symétrie d'espace par rapport à l'origine O des axes, tel que cela est représenté dans la figure qui suit.



Comme on peut le voir sur la figure précédente, cette opération peut être décomposée en une symétrie par rapport au plan (O,x,y) suivie d'une rotation de π autour de l'axe $(0,z)$. Puisque l'invariance par rotation est assurée en physique subatomique, la parité est physiquement équivalente à une symétrie par rapport à un plan (symétrie miroir).

Si on analyse le problème d'un point de vue passif (symétrie appliquée au repère ; systèmes physiques inchangés ; point de vue contraire à la figure précédente), cette opération change un repère droit en un repère gauche.

Dans un espace euclidien, la matrice associée à l'opération parité P est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

à partir de laquelle on peut déduire que :

- $P(\vec{r}) = -\vec{r}$, \vec{r} : vecteur des coordonnées d'espace d'un point M ;
- $P(\vec{p}) = -\vec{p}$, \vec{p} : quantité de mouvement portée par une particule ;
- $P(\vec{L}) = \vec{L}$, $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$: moment cinétique ;

ou plus généralement :

- $P(\vec{u}) = -\vec{u}$, \vec{u} : vecteur de l'espace euclidien ;
- $P(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$, \vec{u}, \vec{v} : 2 vecteurs de l'espace euclidien ;
- $P(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$: est appelé vecteur axial ou pseudo-vecteur ;
- $P((\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}) = -(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ est appelé pseudo-scalaire.

1.2 Dans l'espace de Hilbert :

À l'opération P de l'espace euclidien est associée un opérateur \hat{P} qui agit dans l'espace de Hilbert et qui permet d'obtenir le vecteur d'état dans lequel un système se retrouve après application de P :

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{P} \hat{P} |\Psi\rangle$$

Par similitude avec ce que l'on constate dans l'espace euclidien, nous admettrons que :

- \hat{P} est unitaire , car P ne change pas la norme des vecteurs euclidiens ;
- $\hat{P}^2 = \hat{I}$, car $P^2 = 1$;
- $\hat{P} \hat{T}_{\vec{a}} = \hat{T}_{-\vec{a}} \hat{P}$, car $P T_{\vec{a}} = T_{-\vec{a}} P$, où $T_{\vec{a}}$ est l'opérateur de translation de \vec{a} dans l'espace euclidien et $\hat{T}_{\vec{a}}$ est son opérateur associé dans l'espace de Hilbert ;
- $\hat{P} \hat{R} = \hat{R} \hat{P}$ où \hat{R} est un opérateur de rotation .

$$\begin{aligned} \hat{P} \text{ est unitaire} & \quad | \Rightarrow \hat{P} \hat{P}^{-1} = \hat{I} = \hat{P} \hat{P}^+ = \hat{P} \hat{P} \\ \hat{P}^2 = \hat{I} & \quad | \Rightarrow \hat{P} = \hat{P}^+ = \hat{P}^{-1} \end{aligned}$$

\hat{P} est unitaire et hermitien . C'est un observable dont les valeurs propres ne peuvent être que 1 ou -1 :

$$\hat{P} |\Psi\rangle = \pm |\Psi\rangle$$

1.3 Commutation de l'opérateur parité avec les observables courants :

Position $\hat{\vec{r}}$:

La valeur moyenne de l'opérateur vectoriel de position doit changer de signe après application de \hat{P} sur un vecteur d'état :

$$\langle \Psi | \hat{P}^+ \hat{\vec{r}} \hat{P} | \Psi \rangle = - \langle \Psi | \hat{\vec{r}} | \Psi \rangle , \quad \forall | \Psi \rangle \Rightarrow \hat{P}^+ \hat{\vec{r}} \hat{P} = -\hat{\vec{r}} \quad \text{ou encore} \quad \hat{P} \hat{\vec{r}} = -\hat{\vec{r}} \hat{P}$$

c'est-à-dire $\{\hat{P}, \hat{\vec{r}}\} = 0$.

Quantité de mouvement $\hat{\vec{p}}$:

En mécanique quantique, l'opérateur associé à une translation infinitésimale de $\vec{\epsilon}$ dans l'espace euclidien, est construit à l'aide de l'opérateur vectoriel de quantité de mouvement $\hat{\vec{p}}$:

$$\hat{T}_{\vec{\epsilon}} = (\hat{I} - i\vec{\epsilon} \cdot \hat{\vec{p}}) \quad \text{dans le système d'unités naturelles } \hbar = c = 1 .$$

$$\hat{P} \hat{T}_{\vec{\epsilon}} = \hat{T}_{-\vec{\epsilon}} \hat{P} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{P} (\hat{I} - i\vec{\epsilon} \cdot \hat{\vec{p}}) = (\hat{I} + i\vec{\epsilon} \cdot \hat{\vec{p}}) \hat{P} \quad \text{soit} \quad \hat{P} \hat{\vec{p}} = -\hat{\vec{p}} \hat{P} \quad \Rightarrow \quad \hat{P} \hat{\vec{p}} \hat{P}^+ = -\hat{\vec{p}}$$

Moment cinétique $\hat{\mathbf{J}}$

Du fait que l'opérateur parité commute avec les rotations, il commute également avec les générateurs infinitésimaux des rotations. L'opérateur associé à une rotation infinitésimale de ϵ autour d'une direction \vec{n} est donné par : $\hat{R}(\vec{n}, \epsilon) = \hat{I} - i\epsilon \vec{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}$ où $\hat{\mathbf{J}}$ est le moment cinétique total du système.

$$\hat{P} \hat{R} = \hat{R} \hat{P} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{P} \hat{\mathbf{J}} \hat{P} = \hat{\mathbf{J}}$$

Puisque $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$, \hat{P} commute avec $\hat{\mathbf{L}}$ (moment cinétique orbital total) et $\hat{\mathbf{S}}$ (spin total) séparément.

Observable vectoriel $\hat{\mathbf{v}}$

$$[\hat{\mathbf{v}}, \hat{P}] = 0 \quad (\text{anticommutation})$$

Observable pseudovectoriel $\hat{\mathbf{A}}$: (ex. $\hat{\mathbf{J}}$) (moment cinétique)

$$[\hat{\mathbf{A}}, \hat{P}] = 0 \quad (\text{commutation})$$

Observable scalaire \hat{S} : exemple produit scalaire de deux vecteurs $\hat{u} \cdot \hat{v}$

$$[\hat{S}, \hat{P}] = 0 \quad (\text{commutation})$$

Observable pseudoscalaire \hat{S}' :

$$[\hat{S}', \hat{P}] = 0 \quad (\text{anticommutation})$$

exemple : hélicité d'une particule de spin \hat{S} : $\Lambda = \frac{\hat{S} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|}$ où $\hat{\mathbf{p}}$ est la quantité de mouvement

$$\hat{P} \Lambda \hat{P} = (\hat{P} \hat{S} \hat{P}) \cdot \frac{(\hat{P} \hat{\mathbf{p}} \hat{P})}{|\hat{\mathbf{p}}|} = \hat{S} \cdot \frac{-\hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|} = -\Lambda$$

Si le hamiltonien d'un système commute avec la parité ($[\hat{H}, \hat{P}] = 0$), alors la parité est un nombre quantique conservé dans l'évolution de ce système. Dans cette situation, un système préparé dans un état propre de parité à un instant t_0 garde cette valeur propre au cours du temps. De plus l'évolution de deux systèmes préparés dans des états symétriques de parité ($|\Psi(t_0)\rangle, \hat{P}|\Psi(t_0)\rangle$) se déduit aisément de :

$$\langle \Psi(t) | \hat{P} H \hat{P} | \Psi(t_0) \rangle = \langle \Psi(t) | H | \Psi(t_0) \rangle, \text{ soit :}$$

$(|\Psi(t_0)\rangle \xrightarrow{t} |\Psi(t)\rangle) \xrightarrow{P} (\hat{P}|\Psi(t_0)\rangle \xrightarrow{t} \hat{P}|\Psi(t)\rangle)$; les états symétriques évoluent vers des états finals symétriques avec des probabilités identiques.

1.4 Parité intrinsèque d'une particule :

Le fait que \hat{P} commute avec l'opérateur de spin d'une particule ($[\hat{S}_z, \hat{P}] = 0$, $[\hat{S}_\pm, \hat{P}] = 0$, $[\hat{S}^2, \hat{P}] = 0$), implique que l'on peut définir un nombre quantique de parité $\eta = \pm 1$ qui est une propriété intrinsèque de cette particule.

$\hat{S}_z \hat{P} |S, m\rangle = \hat{P} \hat{S}_z |S, m\rangle = m \hat{P} |S, m\rangle \Rightarrow \hat{P} |S, m\rangle$ est vecteur propre de \hat{S}_z avec la valeur propre m , ou encore :

$$\hat{P} |S, m\rangle = \eta |S, m\rangle \text{ avec } \eta = \pm 1 .$$

De plus, η est indépendante de m , car \hat{P} commute avec \hat{S}_\pm .

La parité intrinsèque d'une particule de masse nulle est définie par rapport à ces états d'hélicité (nombre quantique conservé) : $\Lambda = \frac{\hat{S} \cdot \hat{p}}{|\hat{p}|}$, qui représente la projection du spin sur la direction du mouvement de cette particule. Pour un photon réel, $\Lambda = \pm 1$ car la projection transverse ($\Lambda = 0$) n'existe pas.

$$\hat{P} |p, \Lambda\rangle = \eta_\gamma |-\vec{p}, -\Lambda\rangle \text{ avec } \eta_\gamma = -1 \text{ (boson vectoriel , associé au champ vectoriel } A_\mu \text{)}$$

Si l'on connaît les parités intrinsèques des produits de décroissance d'une particule instable, on peut en déduire sa parité intrinsèque (si celle-ci est conservée dans la décroissance).

Exemple : Mesure et détermination de la parité intrinsèque du π^0

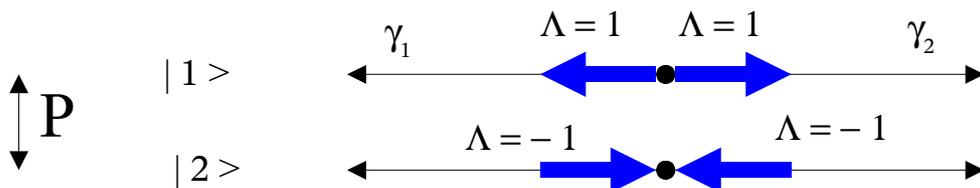
$$J_{\pi^0} = 0 ; |\pi^0\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}} ; \pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

C'est une désintégration électromagnétique. Les interactions électromagnétiques conservent la parité. Ceci implique que :

$$\eta_{\pi^0} = \eta(\gamma\gamma) .$$

Dans cette désintégration, le moment cinétique total doit être conservé. Pour un système de deux particules examiné dans le repère lié à leur centre de masse (CM), leurs quantités de mouvement sont opposées. Il n'y a donc pas de composante du moment cinétique orbital ($\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$) dans la direction de propagation des particules dans leur CM. La conservation du moment cinétique total entraîne que sa projection sur la direction de propagation de l'une des particules dans le CM est égale à la différence des hélicités de ces deux particules : $\hat{J} \cdot \hat{p}_{\gamma_1} = (\hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{S}_1 + \hat{S}_2) \cdot \hat{p}_{\gamma_1} = (\hat{S}_1 + \hat{S}_2) \cdot \hat{p}_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}$.

Dans le système au repos du π^0 , deux configurations satisfont cette exigence :



$$|1\rangle = |\Lambda=1\rangle \times |\Lambda=1\rangle$$

$$|2\rangle = |\Lambda=-1\rangle \times |\Lambda=-1\rangle$$

$|1\rangle$ et $|2\rangle$ sont des états symétriques de parité : $|1\rangle \xrightarrow{P} |2\rangle$

À partir de $|1\rangle$ et $|2\rangle$, on peut construire deux états propres de parité :

$$\eta_{\pi^0} = 1 \quad \Rightarrow \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

$$\eta_{\pi^0} = -1 \quad \Rightarrow \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

Expérimentalement on peut mesurer les polarisations linéaires des photons sur (0,x) et (0,y) ((0,z) étant orienté dans la direction du mouvement) qui sont reliées aux états de polarisation circulaire (états d'hélicité) par :

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Lambda=-1\rangle - |\Lambda=1\rangle)$$

$$|y\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|\Lambda=-1\rangle + |\Lambda=1\rangle)$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle \times |x\rangle - |y\rangle \times |y\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|x\rangle \times |y\rangle + |y\rangle \times |x\rangle)$$

On peut déterminer expérimentalement la parité intrinsèque du π^0 en mesurant la corrélation des polarisations linéaires des photons émis. Si pour le premier photon, on mesure une polarisation linéaire sur (0,x) (respectivement (0,y)) on mesure :

- $\eta_{\pi^0} = 1$ si la polarisation du deuxième photon est sur (0,x) (respectivement (0,y))
- $\eta_{\pi^0} = -1$ si la polarisation du deuxième photon est sur (0,y) (respectivement (0,x))

L'expérience donne $\eta_{\pi^0} = -1$.

La parité intrinsèque figure dans la notation de l'état d'une particule sous la forme :

J^η où $\eta = \pm$ et J est le spin de la particule

spin 0 0^+ particule scalaire

0^- particule pseudo-scalaire

spin 1 1^+ particule pseudo-vectorielle

1^- particule vectorielle

1.5 Parité intrinsèque des particules de spin 1/2 :

L'opération qui consiste à appliquer deux fois la parité est équivalente à une rotation de 2π dans l'espace euclidien. Or sous une rotation de 2π , un spineur change de signe ce qui signifie que dans l'espace spinoriel :

$$\hat{P}^2 = -1$$

Cependant, s'ils existent des nombres quantiques additifs conservés (ex: nombres baryonique et leptonique), on peut redéfinir \hat{P} en lui adjoignant une transformation de jauge :

$$\hat{P}' = \hat{P} e^{-i\frac{\pi}{2}(3\hat{B} + \hat{L})}$$

où \hat{B} et \hat{L} sont respectivement les nombres quantiques baryonique et leptonique . Pour un quark, un lepton , un nucléon (etc) on a bien : $\hat{P}'^2 = 1$ dont les valeurs propres sont ± 1 .

Pour des particules de spin 1/2 qui seraient leurs propres antiparticules (particules de Majorana), on aurait $B = L = 0$, c'est-à-dire : $\eta = \pm i$. Ce peut être le cas des neutrinos.

De façon arbitraire, on fixe la parité intrinsèque des particules de spin 1/2 (quarks, leptons, nucléons...) à 1 .

1.6 Parité intrinsèque des antiparticules :

En théorie quantique des champs, on établit que :

$\eta(\text{antiparticule}) = \eta(\text{particule}) (-1)^{2S}$, où S est le spin de la particule , de sorte que :

- si S est demi-entier , $\eta(\text{antiparticule}) = -\eta(\text{particule})$;
- si S est entier , $\eta(\text{antiparticule}) = \eta(\text{particule})$.

$$\begin{array}{ll} \eta(e^+) = -1 & \eta(e^-) = 1 \\ \eta(\bar{q}) = -1 & \eta(q) = 1 \\ \eta(\pi^+) = -1 & \eta(\pi^-) = -1 \end{array}$$

1.7 Parité d'une fonction d'onde d'espace :

Nous cherchons à établir la relation qui relie les fonctions d'ondes d'espace de deux systèmes se trouvant dans des états symétriques de parité : $|\Psi\rangle$ et $\hat{P}|\Psi\rangle$. La fonction d'onde d'espace de $|\Psi\rangle$ est donnée par :

$$\Psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \Psi \rangle , \text{ celle de son état symétrique de parité est : } \langle \vec{r} | \hat{P} | \Psi \rangle .$$

$\hat{r} \hat{P} | \vec{r} \rangle = -\hat{P} \hat{r} | \vec{r} \rangle = -\vec{r} \hat{P} | \vec{r} \rangle$ ce qui signifie que $\hat{P} | \vec{r} \rangle$ est vecteur propre de \hat{r} avec la valeur propre $-\vec{r}$, en d'autres termes , $\hat{P} | \vec{r} \rangle = | -\vec{r} \rangle$, soit encore , $\langle \vec{r} | \hat{P} | \Psi \rangle = \langle -\vec{r} | \Psi \rangle = \Psi(-\vec{r})$. Au final, on obtient :

$$\Psi(\vec{r}) \xrightarrow{P} \Psi(-\vec{r}) .$$

La fonction d'onde d'espace d'un système composé de deux particules, invariant par rotation et décrit en coordonnées sphériques dans le repère de son centre de masse, se décompose sous la forme :

$$\Psi(\vec{r}) = \varphi(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

où $\varphi(r)$ est la fonction d'onde radiale

$Y_l^m(\theta, \phi)$ est une harmonique sphérique (fonction d'onde angulaire, état propre du moment orbital)

En coordonnées sphériques, l'opération de parité revient à appliquer sur la fonction d'onde d'espace la transformation suivante : $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\phi \rightarrow \phi + \pi$, soit encore :

$$\Psi(-\vec{r}) = \varphi(r) Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l \varphi(r) Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^l \Psi(\vec{r})$$

1.8 Systèmes de deux particules :

On admettra, sans le démontrer, que la parité est un nombre quantique multiplicatif (produit tensoriel des états \Rightarrow produit des parités , états propres ne peuvent être que ± 1), c'est-à-dire pour un système de deux particules (1 et 2) dans un état de moment cinétique orbital relatif L :



$$\eta_{12} = \eta_1 \eta_2 (-1)^L ,$$

ou encore :

$$\eta_{12} = (-1)^{L+1} \text{ pour un système fermion - antifermion}$$

$$\eta_{12} = (-1)^L \text{ pour un système boson - antiboson}$$

Exemple 1 : π^0 , $J_{\pi^0} = 0$, $|\pi^0\rangle = \frac{|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle}{\sqrt{2}}$, système quark-antiquark

état fondamental $S = L = 0$

$$\eta_{\pi^0} = (-1)^{L+1} = -1 \Rightarrow J^P(\pi_0) = 0^-$$

Nous avons vu précédemment qu'un pion neutre peut se désintégrer en deux photons. Or la parité d'un système de deux photons est égale à : $(-1)^2(-1)^L$ où L est le moment angulaire relatif des deux photons. Ceci implique que la paire de photons est émise dans un état P ! Ce qui signifie au passage que cette paire de photons est dans un état de spin total antisymétrique égal à 1 car la fonction d'onde totale d'un système de bosons identiques doit être paire dans leur échange. Pour autant, il ne faut pas en déduire que la distribution angulaire des photons est anisotrope. En effet, le spin des pions étant nul, ceux-ci ne sont pas polarisables. On ne peut donc pas «créer» une direction privilégiée dans l'espace, ce qui a pour conséquence que la désintégration du pion neutre est isotrope même si le moment orbital relatif de la paire de photons est non nul !

Exemple 2 : système de deux pions ; sachant que la parité des pions chargés est également négative



$$J_\pi = 0 \Rightarrow J_{\pi\pi} = L \Rightarrow \eta(\pi\pi) = (-1)^2(-1)^L = (-1)^L$$

$$J_{\pi\pi}^\eta = 0^+ \quad 1^- \quad 2^+ \dots$$

2 La conjugaison de charge :

Cette opération transforme une particule en son antiparticule de masse et de spin identiques, portant la même quantité de mouvement mais en changeant le signe de tous les autres nombres quantiques additifs : charge électrique, nombre baryonique, étrangeté, nombres leptoniques ... À cette opération est associée un opérateur \hat{C} qui agit sur le vecteur d'état d'une particule x selon :

$$\begin{aligned}\hat{C} |x; \mathbf{p}; \lambda\rangle &= |x; \mathbf{p}; \lambda\rangle \\ \hat{C} |x; \bar{\mathbf{p}}; \lambda\rangle &= |x; \bar{\mathbf{p}}; \lambda\rangle\end{aligned}$$

où λ est l'hélicité de la particule (inchangée par conjugaison de charge).

L'opérateur \hat{C} a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{C}^2 &= 1 \quad \text{et} \quad \hat{C}^+ \hat{C} = 1 \quad \text{car} \quad \langle x; \mathbf{p}; \lambda | x; \mathbf{p}; \lambda \rangle = \langle x; \mathbf{p}; \lambda | x; \mathbf{p}; \lambda \rangle, \quad \text{c'est-à-dire :} \\ \hat{C} &= \hat{C}^{-1} = \hat{C}^+ . \quad \text{C'est un opérateur hermitien et unitaire .}\end{aligned}$$

Si le hamiltonien du système est invariant par conjugaison de charge, on a en outre : $[\hat{C}, H] = 0$

Si une particule est sa propre antiparticule (charge nulle, nombres quantiques additifs tous nuls ...), son vecteur d'état est état propre de \hat{C} avec ± 1 comme valeur propre :

$$\hat{C} |x_0; \mathbf{p}; \lambda\rangle = \eta_c |x_0; \mathbf{p}; \lambda\rangle \quad \text{où } \eta_c \text{ est appelée la parité de charge .}$$

La parité de charge est un nombre quantique multiplicatif qui est conservé dans les interactions fortes et électromagnétiques. Ceci est à l'origine de règles de sélection sur les réactions possibles entre particules. Les systèmes qui sont états propres de \hat{C} sont le photon, les mésons neutres qui ne portent aucun nombre quantique additif ($\pi^0, \rho^0, \eta, \eta', \phi, \omega, J/\Psi, Y \dots$) et les paires composées d'une particule et d'une antiparticule de même type. La notation d'une particule qui est état propre de \hat{C} est :

$$J^{n_p \eta_c} \quad (\eta_p \text{ valeur propre de la parité d'espace}) .$$

photon :

$J^{n_p \eta_c} = 1^{--}$ car les potentiels vecteur et scalaire associés au photon changent de signe par conjugaison de charge .

n photons :

$$\eta_c(n\gamma) = (-1)^n$$

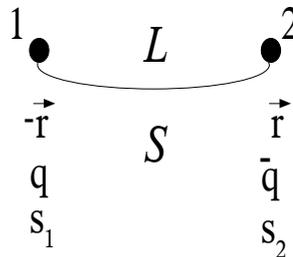
cas du π^0 :

le π^0 se désintègre en deux photons : $B(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma) / B(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) < 3,1 \cdot 10^{-8}$ (valeur expérimentale observée)

$$\eta_c(\pi^0) = 1$$

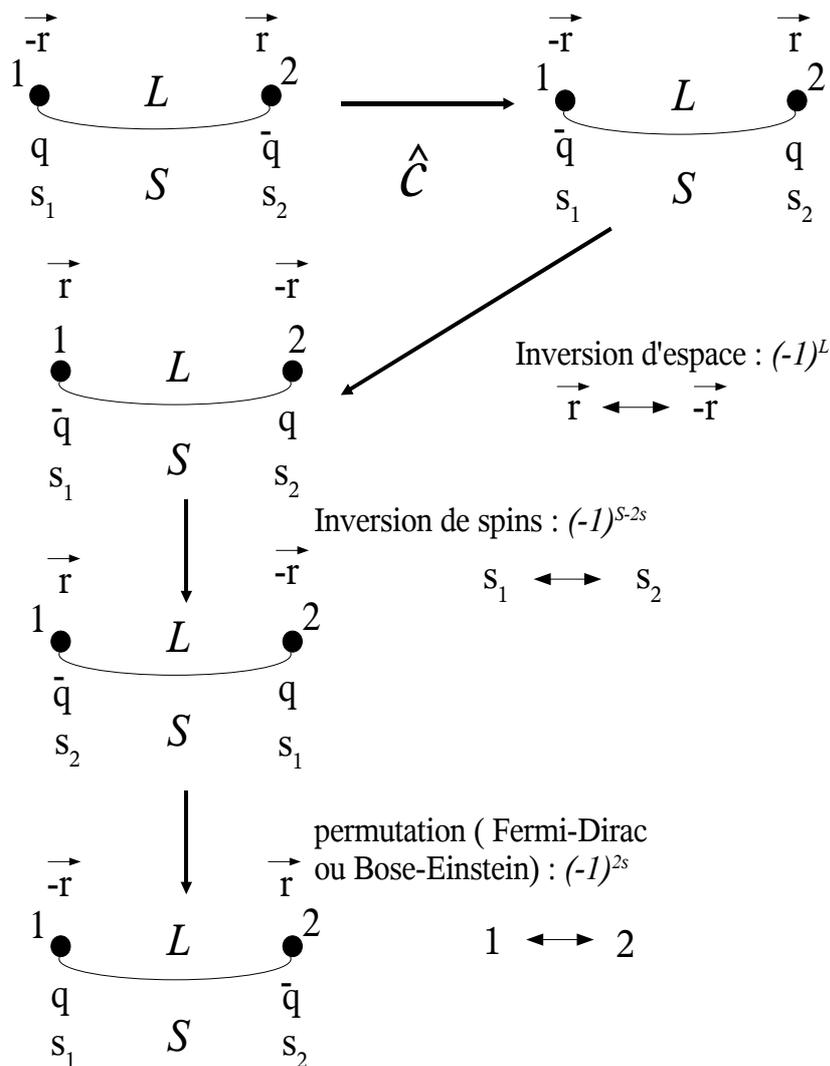
système particule-antiparticule :

Nous étudions une particule 1 et une antiparticule 2 de spins s , de projections de spin s_1 et s_2 se trouvant dans un état de spin total S . Elle sont observées dans le repère lié à leur centre de masse, dans lequel elles possèdent un moment cinétique orbital relatif L .



$$\hat{C} |1:q, -\vec{r}, s_1; 2:\bar{q}, \vec{r}, s_2\rangle = |1:\bar{q}, -\vec{r}, s_1; 2:q, \vec{r}, s_2\rangle = \eta_c |1:q, -\vec{r}, s_1; 2:\bar{q}, \vec{r}, s_2\rangle$$

La valeur de η_c peut se déduire à partir du graphique suivant sur lequel sont portées les phases associées aux inversions qu'il faut appliquer pour revenir à l'état de départ des particules 1 et 2 :



d'où l'on tire : $\eta_c = (-1)^{L+S}$.

3 Conservation de P et C :

La parité introduite pour la première fois par Wigner en 1927 dans le contexte de la physique atomique, et la conjugaison de charge qui est apparue formellement quelques années plus tard dans la théorie quantique et relativiste de Dirac de l'électron (équation de Dirac) ont été longtemps considérées comme étant des symétries aussi fondamentales que l'invariance par rotation.

De nos jours nous savons que P et C sont conservées dans les interactions électromagnétiques et fortes et violées dans les processus mettant en jeu l'interaction faible.

Une symétrie exacte se manifeste par :

- $[\hat{S}, \hat{H}] = 0$ où \hat{S} est l'opérateur associé à l'opération de symétrie, et \hat{H} le hamiltonien du système. Un système préparé dans un état initial de valeur propre de \hat{S} définie, garde cette valeur propre dans son évolution au cours du temps ;
- tout phénomène ou toute solution observable d'un système doit conduire, par symétrie, à l'observation du phénomène ou de la solution symétrique .

Nous allons voir que dans les interactions faibles, l'une et l'autre de ces conditions ont expérimentalement été mises en défaut pour P et C .

3.1 Violation de P dans les interactions faibles :

énigme du système $\theta-\tau$:

Dans la première moitié des années 1950, deux mésons étranges, appelés θ^+ et τ^+ , de même masse, de même durée de vie et de spin 0, avaient été observés comme se désintégrant par interaction faible dans des états finals possédant des parités opposées :

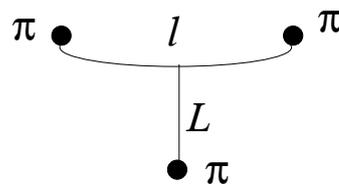
$$\begin{aligned} \theta^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^0, \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+. \end{aligned}$$

L'analyse des distributions angulaires des pions avaient révélé que les états finals portaient un moment angulaire total nul. Nous avons vu que la parité d'un système de deux pions est donnée par :

$$\eta_{\pi\pi} = (-1)^L \text{ soit pour la première de ces désintégrations (} S = 0, J = 0 \Rightarrow L = 0 \text{) ,}$$

$$\eta_{\pi\pi} = \eta_{\theta^+} = 1 .$$

Pour un système de trois pions :



Par extension de la formule précédente on obtient : $\eta_{\pi\pi\pi} = (-1)(-1)^l(-1)^L$, soit pour la désintégration du τ^+ , ($S = 0, J = 0 \Rightarrow L = l$), $\eta_{\pi\pi\pi} = \eta_{\tau^+} = -1$.

Les parités opposées des états finals conduisaient à identifier les mésons θ^+ et τ^+ comme étant des

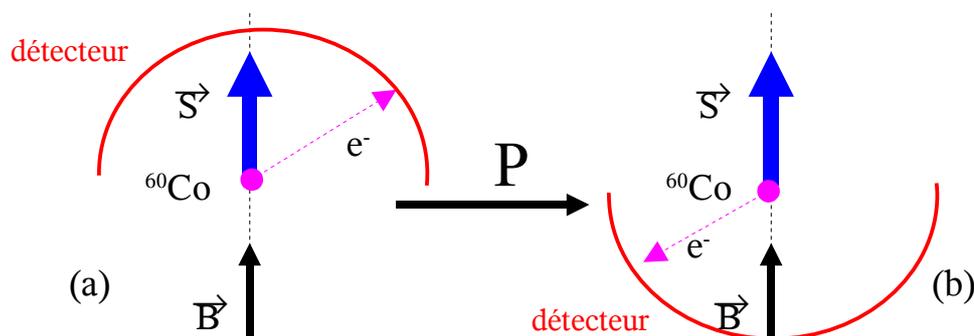
particules différentes, alors que toutes leurs autres propriétés (masse, durée de vie et spin) en faisaient des objets identiques !

La solution à cette énigme a été proposée par T.D. Lee et C.N. Yang en 1956 qui ont osé remettre en cause la conservation de la parité dans les processus mettant en jeu l'interaction faible. En effet, si on accepte l'idée que la parité n'est plus une symétrie du hamiltonien d'interaction faible, alors les deux voies de désintégrations proviennent du même état initial en d'autres termes du même méson . De nos jours cette particule est connue sous le nom de kaon positif : K^+

Il fallait étayer cette hypothèse par d'autres observations expérimentales qui prouveraient de façon définitive que la parité n'est pas conservée dans les interactions faibles. À leur grande surprise, T.D. Lee et C. N. Yang ont alors constaté qu'aucune autre expérience qui aurait pu être en mesure de trancher de façon indépendante cette question n'avait été réalisée dans le passé. Ils ont alors proposé plusieurs tests expérimentaux dont l'expérience sur le cobalt 60 décrite dans le paragraphe suivant.

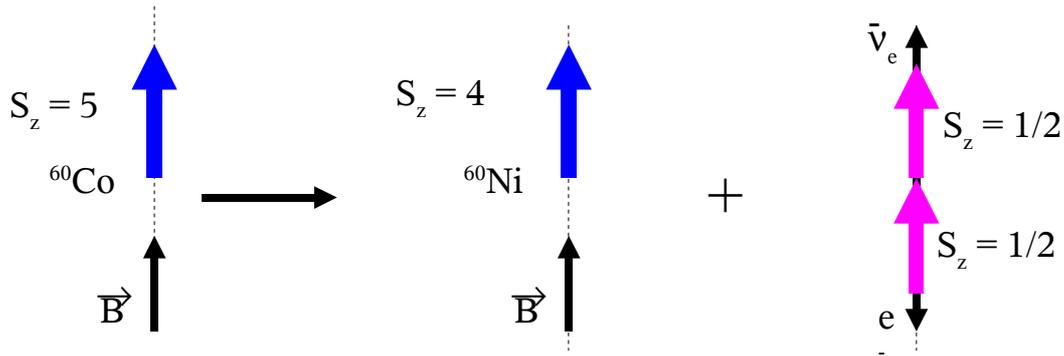
Expérience du cobalt 60 :

Dans cette expérience , proposée par T.D. Lee and C.N. Yang et réalisée par C. S. Wu et al. en 1957 , un échantillon de ^{60}Co , refroidi à très basse température (10 mK), est placé dans un champ magnétique solénoïdal fort. À cette température, l'agitation thermique est suffisamment faible pour que les spins des noyaux de cobalt puissent s'aligner sur la direction du champ magnétique. On obtient alors un échantillon de noyaux de cobalt polarisés. L'expérience consiste à mesurer le nombre d'électrons émis par désintégration bêta des noyaux de Co dans les hémisphères avant et arrière :



Par application de l'opération de parité , le spin et le champ magnétique (vecteurs axiaux) ne sont pas modifiés , par contre la direction de propagation de l'électron émis dans la désintégration bêta du cobalt 60 : $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni}^* + e^- + \bar{\nu}_e$, est renversée dans l'espace. Notre détecteur symétrique compte le nombre d'électrons émis dans l'hémisphère arrière. Si la parité est conservée (a) et (b) doivent être observées avec la même probabilité. Ce qui revient à dire qu'on doit compter autant d'électrons dans les hémisphères avant et arrière (par rapport au champ B). Dans l'expérience réelle, on mesure une très large asymétrie de comptage ; et on constate que les électrons sont émis préférentiellement dans la direction opposée au champ magnétique.

L'interprétation microscopique de cette expérience est la suivante : si on examine la désintégration d'un noyau dont le spin est parfaitement aligné avec le champ magnétique, la conservation du moment angulaire analysée sur la direction de B pour cette transition conduit au graphique ci-dessous :

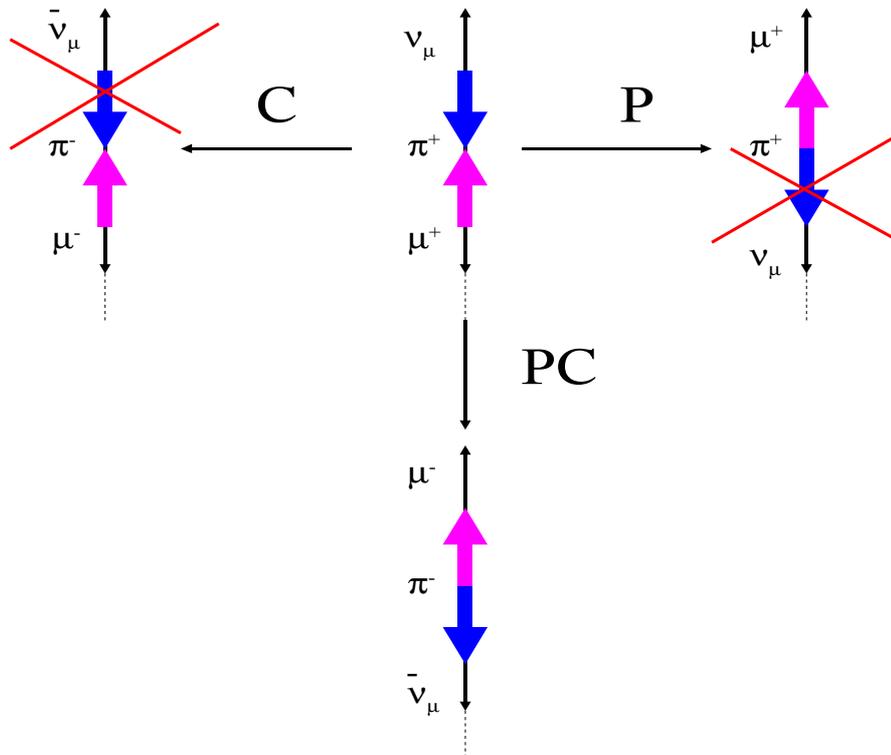


Le graphique symétrique par parité est pratiquement identique avec cependant des rôles inversés pour l'antineutrino et l'électron : électron émis vers l'avant, antineutrino vers l'arrière. Cependant l'antineutrino gauche n'existe pas dans la nature (ou est rencontré avec une probabilité infiniment petite) . Le diagramme symétrique est donc impossible à observer dans la nature. Dans cette configuration, la parité est violée de façon maximale.

Dans l'expérience réelle, il est évidemment nécessaire de tenir compte du fait que tous les spins ne sont pas parfaitement alignés avec \vec{B} .

3.2 Violation de C dans les interactions faibles :

La désintégration des pions chargés constitue un cadre idéal pour illustrer la violation de la conjugaison de charge dans les interactions faibles. Si on admet qu'un neutrino (respectivement un antineutrino) n'est observé dans la nature que dans un état d'hélicité négative (respectivement positive) et si on étudie la désintégration d'un pion positif dans son repère au repos, on obtient la configuration de spins présentée sur ce graphique :



Aucune des désintégrations transformées par P ou par C ne peut se produire du fait de l'inexistence d'un neutrino (ou d'un antineutrino) d'hélicité droite (ou gauche). Cependant la désintégration transformée par la symétrie combinée PC existe bel et bien.

Ainsi, aux début des années 1960, on pensait que les processus mettant en jeu l'interaction faible respectaient la symétrie combinée CP.

3.3 Conservation de CP dans les interactions faibles ? :

Les kaons produits par interaction forte, tout comme les pions, ont une parité négative. Examinons de plus près le cas des kaons neutres :

$$\hat{P} |K^0\rangle = -|K^0\rangle \quad ; \quad \hat{P} |\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad ,$$

et par ailleurs, puisque le \bar{K}^0 est l'antiparticule de K^0 :

$$\hat{C} |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad ; \quad \hat{C} |\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \quad .$$

En combinant les deux symétries, on obtient alors :

$$\hat{C} \hat{P} |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad ; \quad \hat{C} \hat{P} |\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad .$$

Il est facile de voir que les états propres de $\hat{C} \hat{P}$ sont :

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{avec } \eta_{CP}=1$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{avec } \eta_{CP}=-1$$

Si la symétrie CP est conservée dans les interactions faibles, les états $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$ représentent les particules observées. Elles ne pourraient se désintégrer (les kaons sont stables vis à vis de l'interaction forte) que dans des voies où $\eta_{CP} = 1$ pour le $|K_1^0\rangle$ et $\eta_{CP} = -1$ pour le $|K_2^0\rangle$, c'est-à-dire en deux et trois pions, respectivement (voir exercice). Ces deux états (particules) ont des vies moyennes assez différentes : plus longue pour le $|K_2^0\rangle$ (moins d'espace de phase, processus d'ordre plus élevé) .

$$\tau_1 = 0,892 \pm 0,002 \cdot 10^{-10} \text{ s} \quad \text{et} \quad \tau_2 = 5,18 \pm 0,04 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Si on produit, par interaction forte, des K^0 et si on attend un temps très supérieur à τ_1 , il ne reste dans le faisceau que des particules $|K_2^0\rangle$, ce qui signifie que la désintégration en 2 pions devrait alors être impossible (si CP est conservée). J.H. Christensen, J. Cronin, V. Fitch et R. Turlay ont montré en 1964 que la désintégration du $|K_2^0\rangle$ en deux pions se produit avec une probabilité très faible mais non nulle, mettant ainsi en évidence une violation de très petite amplitude de la symétrie CP dans les interactions faibles.

De ce fait les états propres d'interaction faible ne correspondent pas exactement aux états $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$, mais plutôt à des mélanges de ces deux états comportant une composante très petite de l'état de valeur propre opposée :

$$|K_s\rangle = \frac{1}{(1+|\epsilon|^2)^{1/2}} [|K_1\rangle - \epsilon |K_2\rangle] \text{ (K short)}$$

$$|K_L\rangle = \frac{1}{(1+|\epsilon|^2)^{1/2}} [\epsilon |K_1\rangle + |K_2\rangle] \text{ (K long)}$$

avec $\epsilon = 2,284 \pm 0,014 \cdot 10^{-3}$

4 Principe de Pauli et invariance par permutation :

Pour des systèmes composés de particules de nature identique, le principe de Pauli stipule que leurs vecteurs d'états doivent être symétriques ou antisymétriques s'il s'agit de bosons ou de fermions. Ceci induit certaines règles de sélection dont la meilleure illustration est le théorème de Yang qui dit qu'un boson de spin 1 ne peut se désintégrer en deux photons. En effet nous avons déjà vu que la projection du moment cinétique total d'une particule qui se désintègre en deux corps sur la direction de propagation de l'une de ces deux particules finales - dans le repère du CM - est égale à la différence de leurs hélicités. Si la particule initiale possède un spin égal à 1, on obtient alors : $|\Lambda_{y_1} - \Lambda_{y_2}| = 0$ ou 1. Étant donné qu'un photon réel n'a que deux états d'hélicité : +1 et -1, $|\Lambda_{y_1} - \Lambda_{y_2}| = 1$ est exclue. En choisissant la direction de propagation des photons dans le CM comme axe de projection des spins des photons, les seuls états de spin total permis sont alors : $|0,0\rangle, |1,0\rangle, |2,0\rangle$. L'état de spin total $|0,0\rangle$ est symétrique. Son état orbital associé ne pourrait être que $L=1$ qui est antisymétrique. La fonction d'onde totale serait alors antisymétrique, ce qui est exclu. L'état de spin total $|1,0\rangle$ est antisymétrique. Trois états de moment orbital seraient possibles : $L=0, 1$ et 2 . Les états 0 et 2 étant symétriques, ils sont exclus. Par ailleurs, il se trouve que l'état de moment cinétique total $|J=1, J_z=0\rangle$ n'a pas de composante sur $|S=1, S_z=0, L=1, L_z=0\rangle$. L'état de spin total $|1,0\rangle$ est donc exclu. Enfin l'état de spin total $|2,0\rangle$ est symétrique. Dans cette situation, le seul état du moment orbital possible serait $L=1$ qui est antisymétrique, ce qui conduit également à une configuration impossible. La conservation du moment cinétique total et le principe de Pauli excluent la désintégration d'une particule de spin 1. Une application de ce théorème est la désintégration strictement interdite du boson neutre Z en deux photons.

5 Renversement du temps :

Cette opération consiste à inverser le cours du temps dans un processus physique : c'est-à-dire à effectuer la transformation mathématique $t \rightarrow -t$ dans les équations qui régissent le mouvement du système étudié.

C'est dans la plupart des cas une opération très difficile à réaliser concrètement. Pour le comprendre on peut examiner le début d'une partie de billard américain lorsque la boule blanche vient heurter les quinze autres boules disposées en triangle. Le renversement du temps dans un système de la sorte (où le frottement serait négligé) nous indique que si l'on prépare les quinze boules dans les états finals de vitesse et de direction qu'elles possèdent après le choc de début de partie, on doit reconstruire l'agencement triangulaire de départ et renvoyer la boule blanche à son point de départ. D'évidence on pressent que cette prédiction découlant de l'invariance par renversement du cours du temps dans les équations de la mécanique classique - même si on néglige les forces de frottement - est en pratique difficilement vérifiable.

En mécanique classique la faisabilité du renversement du temps diminue lorsque le nombre d'objets indépendants constituant le système croît ; pour atteindre une quasi irréversibilité bien connue en thermodynamique ou en physique statistique.

Du fait de sa nature probabiliste, la mécanique quantique donne encore plus de «liberté» d'évolution aux systèmes, mêmes lorsque ceux-ci ne sont composés que d'un nombre assez petit de corps. Il en résulte que l'invariance par renversement du temps ne peut jamais se vérifier directement dans des systèmes quantiques. Par exemple, la désintégration d'une particule préparée dans un état initial connu, donne lieu à une superposition cohérente d'ondes sphériques dans la voie de sortie. Expérimentalement, renverser le temps pour remonter à la particule initiale, reviendrait à construire une superposition d'ondes sphériques rentrantes, ce qui, on en convient aisément, paraît totalement irréalisable en pratique, même en présence de quelques corps uniquement.

5.1 Opérateur de renversement du temps :

L'évolution dans le temps d'un vecteur d'état $|\Psi\rangle$ d'un système physique est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H} |\Psi\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle, \text{ en unités naturelles } \hbar = c = 1.$$

\hat{H} est invariant par rapport au renversement du temps s'il existe un opérateur unitaire \hat{U}_T qui ne dépend pas du temps, tel que :

$$\hat{U}_T \hat{H}^* \hat{U}_T^\dagger = \hat{H}.$$

En appliquant l'opération de conjugaison complexe à l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$\hat{H}^* |\Psi\rangle^* = -i \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle^* \text{ que l'on peut transformer sous la forme :}$$

$$\hat{U}_T \hat{H}^* \hat{U}_T^\dagger \hat{U}_T |\Psi\rangle^* = -i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_T |\Psi\rangle^* \text{ ou encore,}$$

$$\hat{H} \hat{U}_T |\Psi\rangle^* = -i \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_T |\Psi\rangle^*, \text{ soit finalement :}$$

$\hat{H} \hat{U}_T |\Psi\rangle^* = i \frac{\partial}{\partial(-t)} \hat{U}_T |\Psi\rangle^*$, dans laquelle on voit apparaître le fait que $\hat{U}_T |\Psi\rangle^*$ satisfait l'équation de Schrödinger renversée dans le temps. Si la condition de commutation (invariance par renversement du temps) de \hat{H} est satisfaite, on peut obtenir à partir d'une solution de l'équation de Schrödinger, $|\Psi\rangle$, une autre solution de cette même équation pour $t \rightarrow -t$.

L'opérateur de renversement dans le temps \hat{T} est défini comme étant :

$$\hat{T} |\Psi\rangle = \hat{U}_T |\Psi\rangle^* \text{ et pour un opérateur : } \hat{T} \hat{O} \hat{T}^{-1} = \hat{U}_T \hat{O}^* \hat{U}_T^\dagger.$$

Ainsi \hat{T} commute avec \hat{H} si celui-ci est invariant par renversement du temps. En prenant $\hat{O} = 1$, on obtient $\hat{T} \hat{T}^{-1} = 1$.

Si $|\Psi\rangle = c_1 |\Psi_1\rangle + c_2 |\Psi_2\rangle$, alors : $\hat{T} |\Psi\rangle = c_1^* \hat{T} |\Psi_1\rangle + c_2^* \hat{T} |\Psi_2\rangle$.

\hat{T} n'est pas un opérateur linéaire, et n'est donc pas un observable et en conséquence de cela, il n'existe pas de nombre quantique conservé que l'on peut associer à l'opération de renversement dans le temps.

\hat{T} est un opérateur antilinéaire et antiunitaire.

En appliquant le principe de correspondance, et au vu des règles de transformation que l'on peut aisément établir en mécanique classique dans l'espace Euclidien, on peut admettre les lois de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{r} &\xrightarrow{t \rightarrow -t} \vec{r} & \hat{r} &\xrightarrow{T} \hat{r} \rightarrow [\hat{r}, \hat{T}] = 0 \\ \vec{p} &\xrightarrow{t \rightarrow -t} -\vec{p} & \hat{p} &\xrightarrow{T} -\hat{p} \rightarrow [\hat{p}, \hat{T}] = 0 \\ \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} &\xrightarrow{t \rightarrow -t} -\vec{L} & \hat{L} = \hat{r} \wedge \hat{p} &\xrightarrow{T} -\hat{L} \rightarrow [\hat{L}, \hat{T}] = 0 \end{aligned}$$

et par extension pour tout moment cinétique $\hat{J} \xrightarrow{T} -\hat{J} \rightarrow [\hat{J}, \hat{T}] = 0$
 $\hat{s} \xrightarrow{T} \hat{s} \rightarrow [\hat{s}, \hat{T}] = 0$, où \hat{s} est l'hélicité d'une particule

La fonction d'onde spatiale d'un système physique est donnée par : $\Psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \Psi \rangle$. La fonction d'onde transformée par renversement du temps est : $\Psi_T(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \hat{T} | \Psi \rangle = \langle \vec{r} | \hat{U}_T | \Psi \rangle^*$. Puisque $\hat{r}^* = \hat{r}$, on a $[\hat{U}_T, \hat{r}] = 0$ ce qui conduit à $\langle \vec{r} | \hat{U}_T = \langle \vec{r} |$, à partir de laquelle on tire :

$$\Psi_T(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \Psi \rangle^* = \Psi^*(\vec{r}) .$$

Du reste on peut facilement voir que la fonction d'onde conjuguée complexe d'une solution de l'équation de Schrödinger spatiale satisfait bien :

$$i \frac{\partial}{\partial (-t)} \Psi^*(\vec{r}, t) = H \Psi^*(\vec{r}, t) \text{ avec } H = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \text{ qui réalise bien la transformation } t \rightarrow -t .$$

5.2 Moment électrique dipolaire du neutron :

Le moment électrique dipolaire d'une particule est la valeur moyenne de l'opérateur :

$$\hat{d} = \sum_i \vec{r}_i q_i .$$

Si la parité est conservée, cette moyenne doit strictement être nulle, car :

$$\langle \Psi | \hat{d} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{P}^+ \hat{P} \hat{d} \hat{P}^+ \hat{P} | \Psi \rangle = -\langle \Psi | \hat{d} | \Psi \rangle .$$

Après la découverte de la violation de la parité, il semblait que la recherche d'un moment dipolaire électrique non nul du neutron (car charge nulle, pas de force électrique directe) constituait une seconde voie indépendante pour confirmer expérimentalement ce phénomène. Landau, Lee et Schwinger ont alors montré que l'existence d'un moment électrique dipolaire requiert également la violation du renversement du temps. En effet le seul opérateur vectoriel qui conduit à des observations possibles dont nous disposons pour le neutron est son spin \hat{J} . Tout nouvel observable vectoriel ajouterait de nouveaux nombres quantiques au neutron qui rendraient son état fondamental – tel que nous le connaissons actuellement – dégénéré. La structure des noyaux en serait modifiée, car on pourrait alors stocker plus de neutrons sur le même état en énergie. Ceci n'est évidemment pas confirmé expérimentalement. Ainsi toute autre grandeur vectorielle mesurable doit être proportionnelle au spin du neutron. Ce raisonnement conduit à :

$$\langle \Psi | \hat{d} | \Psi \rangle = d_n \langle \Psi | \hat{J} | \Psi \rangle, \text{ or } \hat{T} \hat{d} \hat{T}^{-1} = \hat{d} \text{ alors que } \hat{T} \hat{J} \hat{T}^{-1} = -\hat{J}, \text{ ce qui implique qu'en}$$

l'absence d'une violation du renversement du temps, le moment dipolaire du neutron doit être strictement nul.

On peut également voir cela en examinant le décalage en énergie introduit par un moment dipolaire dans un champ électrique :

$$\Delta W = \langle \Psi | \hat{d} \cdot \vec{E} | \Psi \rangle = d_n \langle \Psi | \frac{\hat{J}}{J} \cdot \vec{E} | \Psi \rangle .$$

\vec{E} est pair dans le renversement du temps, alors que \hat{J} est impair, il en résulte que ΔW viole le renversement du temps.

En mesurant la fréquence de Larmor dans des champs électrique et magnétique parallèles et antiparallèles, on doit observer un décalage dû à un moment électrique dipolaire : $\delta\omega_0 = -4 d_n \frac{E}{\hbar}$.

Des expériences de ce type ont été conduites à l'ILL de Grenoble et à Gatchina. Actuellement, la mesure la plus sensible, obtenue à l'ILL donne :

$$d_n < 2,9 \cdot 10^{-26} \text{ e cm (ILL) à 90\% de niveau de confiance.}$$

De nouvelles expériences en cours de réalisation à l'ILL et à PSI (près de Zürich) devraient permettre de gagner un à deux ordres de grandeurs sur cette limite pour atteindre une sensibilité de 10^{-28} e cm .

5.3 Réciprocité dans les réactions renversées dans le temps :

Si le hamiltonien décrivant l'interaction de particules est conservé par renversement du temps, on peut statuer que la réaction : $a+b+\dots \rightarrow a'+b'+\dots$ et sa réaction inverse : $a'+b'+\dots \rightarrow a+b+\dots$ se produisent avec une probabilité égale .

Formellement cela se traduit par la relation suivante entre les vecteurs d'états des particules libres et la matrice \hat{S} du système en interaction :

$$|\langle \vec{p}_j', s_j' | \hat{S} | \vec{p}_i, s_i \rangle| = |\langle -\vec{p}_i, s_i | \hat{S} | -\vec{p}_j', s_j' \rangle|, \text{ avec } (i=a, b, \dots) \text{ et } (j=a', b', \dots) ,$$

où : \vec{p}_i, \vec{p}_j' sont les quantités de mouvement , s_i, s_j' les hélicités des particules .

Ainsi pour une réaction à deux corps réalisée à l'aide de particules non polarisées dans la voie d'entrée et dans laquelle on ne mesure pas le spin des particules finales, on peut établir (voir T.D. Lee , p 309), que le rapport des sections efficaces (directe et inverse) totales est donné par :

$$\frac{\sigma(a+b \rightarrow a'+b')}{\sigma(a'+b' \rightarrow a+b)} = \alpha \frac{(2j_{a'}+1)(2j_{b'}+1) k'^2}{(2j_a+1)(2j_b+1) k^2}$$

1/2 si $a \neq b$, mais $a' = b'$

avec : $\alpha = 2$ si $a=b$, mais $a' \neq b'$

1 pour les autres cas

$j_a, j_b, j_{a'}, j_{b'}$ sont les spins des particules ,

$\vec{k} = \vec{p}_a = -\vec{p}_b$, est la quantité de mouvement initiale dans le centre de masse,

$\vec{k}' = \vec{p}_{a'} = -\vec{p}_{b'}$, est la quantité de mouvement finale dans le centre de masse.

Ceci peut être utilisé pour mesurer le spin inconnu d'une particule.

détermination du spin du pion :

Si on applique ce qui a été obtenu précédemment aux réactions :

$$\pi^+ + d \rightarrow p + p \text{ et } p + p \rightarrow \pi^+ + d, \text{ on obtient :}$$

$$\frac{\sigma(\pi^+ + d \rightarrow p + p)}{\sigma(p + p \rightarrow \pi^+ + d)} = \frac{2}{3(2j_\pi + 1)} \left(\frac{k'}{k}\right)^2 \text{ du fait que } j_d = 1, j_p = 1/2 \text{ et } \alpha = 1/2.$$

Expérimentalement on a mesuré que $J_\pi = 0$.

6 Théorème CPT

Ce théorème peut être établi en théorie quantique des champs (voir T.D. Lee, p 320) en supposant que l'invariance de Lorentz reste valide et en imposant les règles de quantification habituelles dues aux statistiques de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein. Dans ces conditions, on montre que le hamiltonien du système dans la transformation combinée CPT reste inchangé. Soit :

$$\hat{O} \hat{H} \hat{O}^{-1} = \hat{H} \text{ avec } \hat{O} = \hat{C} \hat{P} \hat{T}.$$

Puisque toutes les interactions connues actuellement sont modélisées par des théories répondant à ces critères (à l'exception peut-être de la gravité quantique), il en découle qu'elles sont toutes invariantes sous la symétrie CPT. Ainsi toute particule existante possède une antiparticule (qui pour certains cas est confondue avec elle-même : photon, particule de Majorana) de charge opposée (ou nulle) qui porte une hélicité inverse et se propage en remontant le temps.

La masse d'une particule libre étant simplement son énergie moyenne lorsque celle-ci est mesurée dans un repère au repos, on en déduit que :

$$m(|\Psi, s\rangle) = \langle \Psi, s | \hat{H} | \Psi, s \rangle = \langle \Psi, s | \hat{O}^{-1} \hat{O} \hat{H} \hat{O}^{-1} \hat{O} | \Psi, s \rangle = \langle \bar{\Psi}, -s | \hat{H} | \bar{\Psi}, -s \rangle = m(|\bar{\Psi}, -s\rangle)$$

D'une manière similaire, on peut également montrer qu'une particule et son antiparticule instables doivent strictement avoir la même durée de vie.

On peut résumer notre connaissance actuelle sur la validité des diverses symétries discrètes que nous avons étudiées par le tableau suivant :

<i>Interaction</i>	<i>C</i>	<i>P</i>	<i>CP</i>	<i>T</i>	<i>CPT</i>
électromagnétique	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
faible	Non	Non	Faiblement violée	Faiblement violée	Oui
forte	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui

7 Parité G :

Pour des systèmes hadroniques sensibles principalement à l'interaction forte, il est utile d'introduire une nouvelle symétrie qui combine la conjugaison de charge avec une rotation dans l'espace d'isospin. Cette nouvelle symétrie est appelée parité G.

L'utilité de cette symétrie peut être comprise si on examine ce qui se produit dans un doublet d'isospin représentant un proton et un neutron lorsque l'on applique la conjugaison de charge :

$$I=1/2 \quad \begin{matrix} I_3=1/2 \\ I_3=-1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \xrightarrow{c} \begin{matrix} I_3=-1/2 \\ I_3=+1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_p \\ \bar{\psi}_n \end{pmatrix},$$

alors que le doublet d'isospin formé à l'aide d'un antiproton et d'un antineutron est en fait :

$$\begin{matrix} I_3=1/2 \\ I_3=-1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -\bar{\psi}_n \\ \bar{\psi}_p \end{pmatrix}.$$

L'opération de parité G est définie comme étant la combinaison de la conjugaison de charge suivie d'une rotation de π dans l'espace d'isospin autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de quantification. Ceci permet d'inverser la position de $\bar{\psi}_p$ et $\bar{\psi}_n$ dans le doublet transformé. Dans l'exemple précédent, on obtient après transformation un doublet d'isospin qui possède, vis à vis des interactions fortes, exactement les mêmes propriétés que le doublet initial.

L'opérateur associé à la parité G est :

$$\hat{G} = \hat{C} e^{i\pi \hat{I}_2}$$

L'opérateur de conjugaison de charge ne commute pas avec les opérateurs d'isospin. Par contre la parité G, qui est également une symétrie exacte des systèmes en interaction forte, commute avec les opérateurs d'isospin. Une particule hadronique qui est état propre de la parité G peut ainsi être caractérisée par son isospin I, sa projection I_3 , et sa valeur propre de parité G. Ce n'est pas le cas du proton, ni du neutron ; mais c'est le cas des pions qui forment un triplet d'isospin ($I=1$), de parité G négative :

$$I=1 \quad \begin{matrix} I_3=1 \\ I_3=0 \\ I_3=-1 \end{matrix} \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}, \quad G = -1,$$

duquel on peut déduire que la réaction $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi + \pi$ est interdite par interaction forte.

On peut également montrer que :

$\hat{G}^2 = -1$ pour des hadrons d'isospins demi-entiers (inversion du signe d'un spineur par rotation de 2π), et $\hat{G}^2 = 1$ pour des isospins entiers.

La notation complète de l'état d'une particule est ainsi donnée par : $I^G(J^{PC})$, à condition évidemment qu'il s'agisse de bons nombres quantiques (exemple : $\pi^\pm = 1^-(0^-)$, $\pi^0 = 1^-(0^+)$, $J/\Psi = 0^-(1^-)$).

8 Pour en savoir plus :

- T.D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood academic publishers
- A. Rougé, Introduction à la physique subatomique, Ellipses
- I. Bigi and A. Sanda, CP violation, Cambridge University Press
- B.R. Martin and G. Shaw, Particle Physics, Wiley

9 Exercices

9.1 Le positronium

$$e^- \quad \text{---} \quad L \quad \text{---} \quad e^+ \quad \vec{S} = \vec{S}^+ + \vec{S}^- \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

- Discuter de la validité des résultats obtenus dans l'étude de l'atome d'hydrogène .
- Décrire les états possibles pour les couches $n=1$ et $n=2$ en utilisant la notation spectroscopique .
- L'interaction électromagnétique conservant la parité et la conjugaison de charge, donner les valeurs propres de chacun des états précédents .
- Par analogie avec l'atome d'hydrogène, quels termes d'interaction supplémentaires vont permettre de lever la dégénérescence à l'intérieur de chaque couche ?
- L'interaction spin-spin conduit à un décalage pour la première couche ayant l'expression suivante :

$$\delta E = \frac{-8}{3} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{\langle {}^{2S+1}L_J | \hat{\mu}^+ \cdot \hat{\mu}^- | {}^{2S+1}L_J \rangle}{a_0^3}, \text{ avec } a_0 = \frac{2}{\alpha m_e} \text{ et } \hat{\mu}^+ = \frac{e\hat{S}^+}{m_e}, \hat{\mu}^- = \frac{-e\hat{S}^-}{m_e}$$

Calculer la contribution à l'écart des niveaux 1S_0 et 3S_1 .

Est-ce suffisant pour rendre compte de la valeur mesurée ? $\Delta E = 8,45 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$

Quel terme nouveau par rapport à l'atome d'hydrogène doit-on introduire ?

- Le positronium est instable . Quels sont les produits de désintégration possibles ?
- En appliquant les règles de sélection liées à la conservation de la parité de charge, donner les désintégrations permises du positronium.
- Comment peut-on expliquer approximativement la différence de durée de vie entre les états 1S_0 et 3S_1 ?

9.2 États propres de CP de systèmes de pions

- Quels sont les systèmes de pions qui peuvent être états propres de CP ?
- Établir la valeur propre de CP d'un système de deux pions .
- Même question pour un système de trois pions .

9.3 Violation de P dans la désintégration du lambda

Le baryon Λ est un état lié constitué de 3 quarks : u d s . Sa durée de vie est de $2,63 \cdot 10^{-10}$ s . Il porte un spin de $1/2$ - Ces nombres quantiques sont : $0(1/2^+)$.

- De quelle nature est cette désintégration ?
- Quels sont les modes de décroissance principaux ?
- On suppose que le Λ est préparé dans un état de projection de spin $s_z = 1/2$, donner la composition en moments cinétiques des états finals permis pour le canal de désintégration chargé.
- Sachant que l'état final le plus général est une combinaison linéaire des états de moments cinétiques permis , étudier la distribution angulaire des protons émis en fonction de leurs projections de spins.
- Si le spin des protons n'est pas mesuré, donner l'expression de la distribution angulaire obtenue.
- Quelle contrainte sur les moments cinétiques orbitaux peut-on déduire de la conservation de la parité, si celle-ci s'applique dans la décroissance du Λ ?
- Quelle implication cela aurait sur la distribution angulaire des protons ?
- Expérimentalement on observe une anisotropie dans la distribution angulaire des protons émis. Que peut-on conclure ?