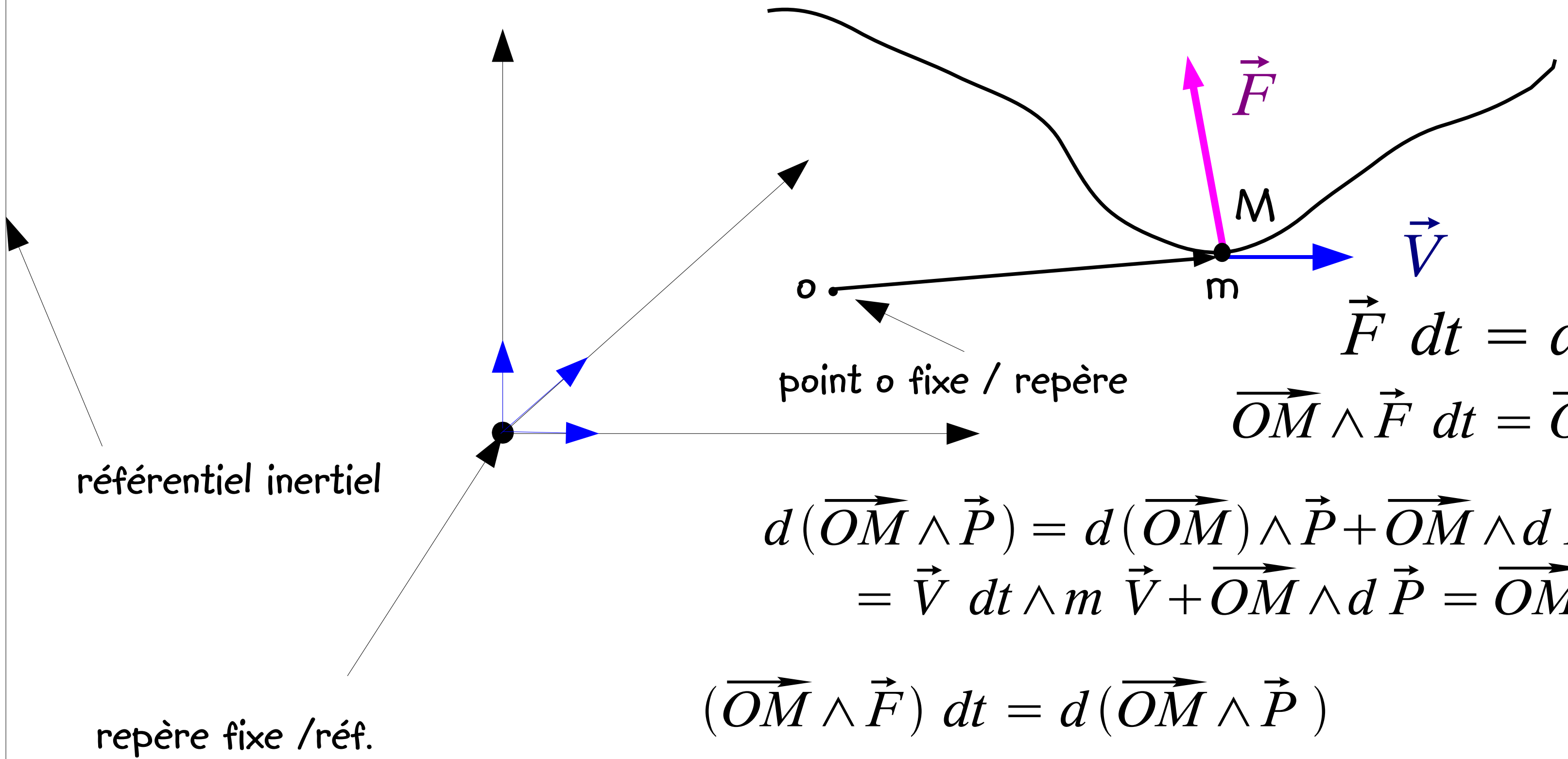
Moment d'une force
Théorème du moment cinétique

Théorème du moment cinétique



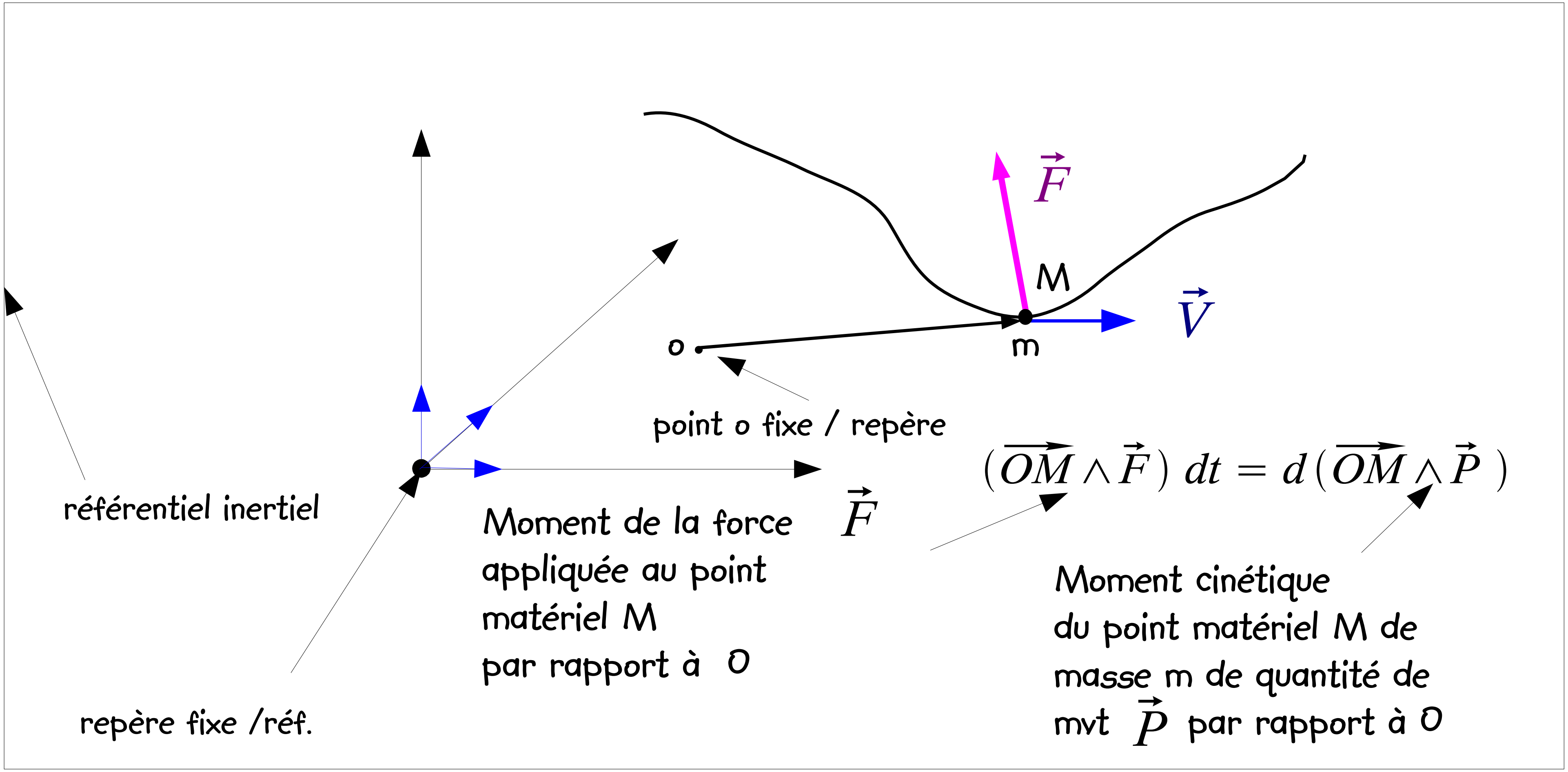
$$\vec{F}\ dt = d\,\vec{P}$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}\ dt = \overrightarrow{OM} \wedge d\,\vec{P}$$

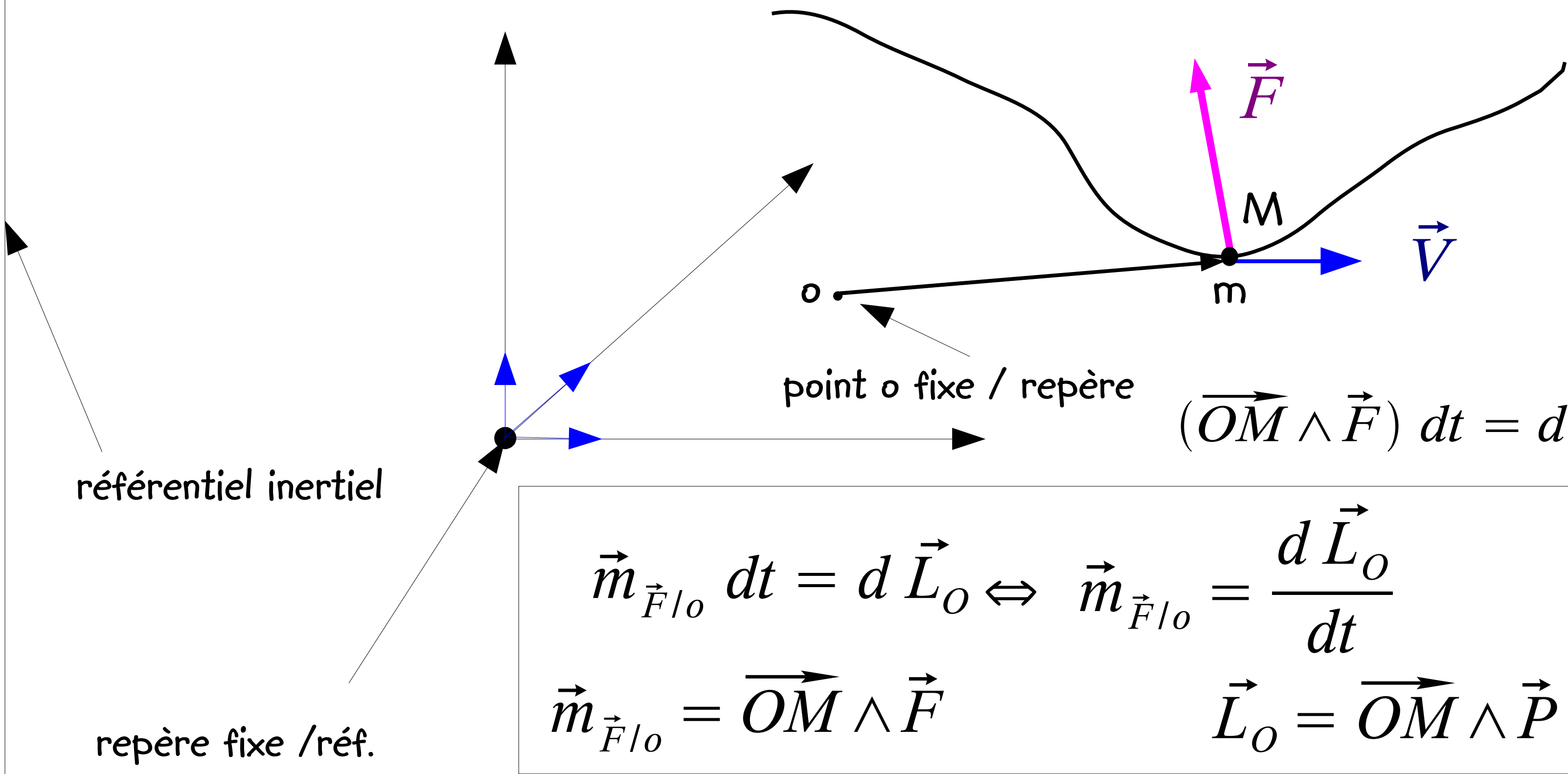
$$d\,(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}) = d\,(\overrightarrow{OM}) \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OM} \wedge d\,\vec{P}$$
$$= \vec{V}\ dt \wedge m\ \vec{V} + \overrightarrow{OM} \wedge d\,\vec{P} = \overrightarrow{OM} \wedge d\,\vec{P}$$

$$(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F})\ dt = d\,(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\ )$$

Théorème du moment cinétique



Théorème du moment cinétique



$$(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F})\, dt = d\,(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}\,)$$

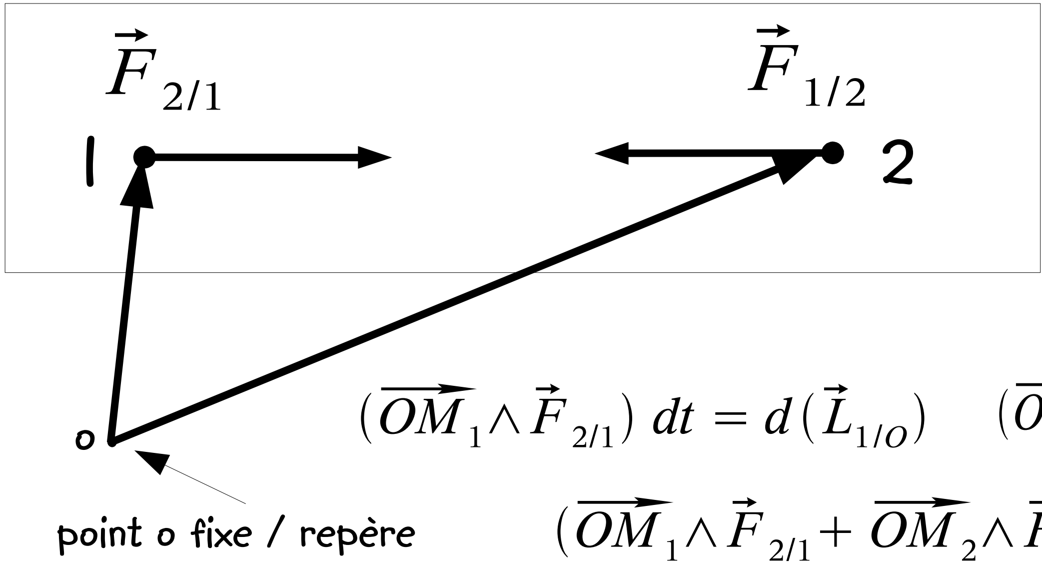
$$\vec{m}_{\vec{F}/o}\, dt = d\,\vec{L}_O \Leftrightarrow \quad \vec{m}_{\vec{F}/o} = \frac{d\,\vec{L}_O}{dt}$$

$$\vec{m}_{\vec{F}/o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \qquad\qquad \vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$$

Application : système matériel isolé

2 points matériels sur lesquels ne s'applique aucune force externe et dont les masses sont constantes

Alors, quelle que soit leur interaction mutuelle , on a :



$$\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{2/1} = 0$$

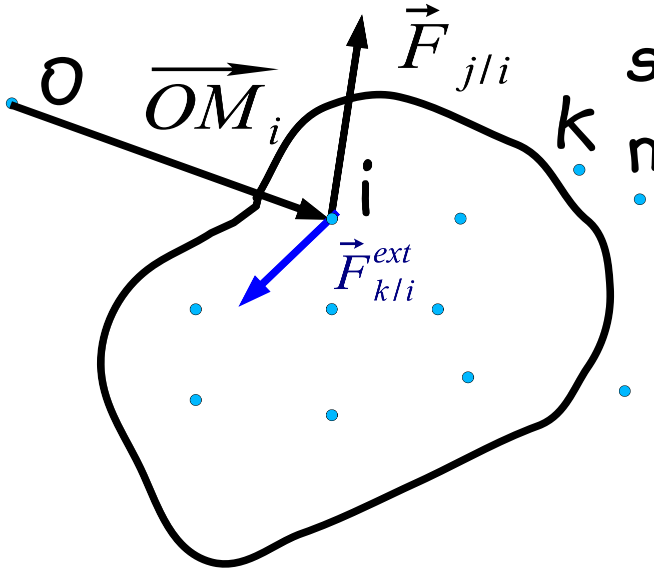
Ces deux forces ont le même support (même droite)

$$(\overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2/1})\, dt = d(\vec{L}_{1/O}) \qquad (\overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1/2})\, dt = d(\vec{L}_{2/O})$$

$$(\overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2/1} + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_{1/2})\, dt = d(\vec{L}_{1/O} + \vec{L}_{2/O})$$

$$((\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_2) \wedge \vec{F}_{2/1})\, dt = d(\vec{L}_{1/O} + \vec{L}_{2/O}) = 0 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_{2/1} = \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_{2/1}$$

La relation précédente reste vraie pour tout système isolé (constitué de plus de 2 points matériels)
Ainsi, le moment cinétique total d'un système isolé reste constant dans le temps



système fermé constitué de n points matériels

pour le point i :

$$\left(\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}(\overrightarrow{OM}_i\wedge\vec{F}_{j/i})+\sum_{k}(\overrightarrow{OM}_i\wedge\vec{F}^{ext}_{k/i})\right)dt=d(\vec{L}_{i/O})$$

Pour l'ensemble des n points

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}(\overrightarrow{OM}_i\wedge\vec{F}_{j/i})+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k}(\overrightarrow{OM}_i\wedge\vec{F}^{ext}_{k/i})\right)dt=\sum_{i=1}^{n}d(\vec{L}_{i/O})$$

$=0$ car principe de l'action et de la réaction

somme des moments extérieurs par rapport à O

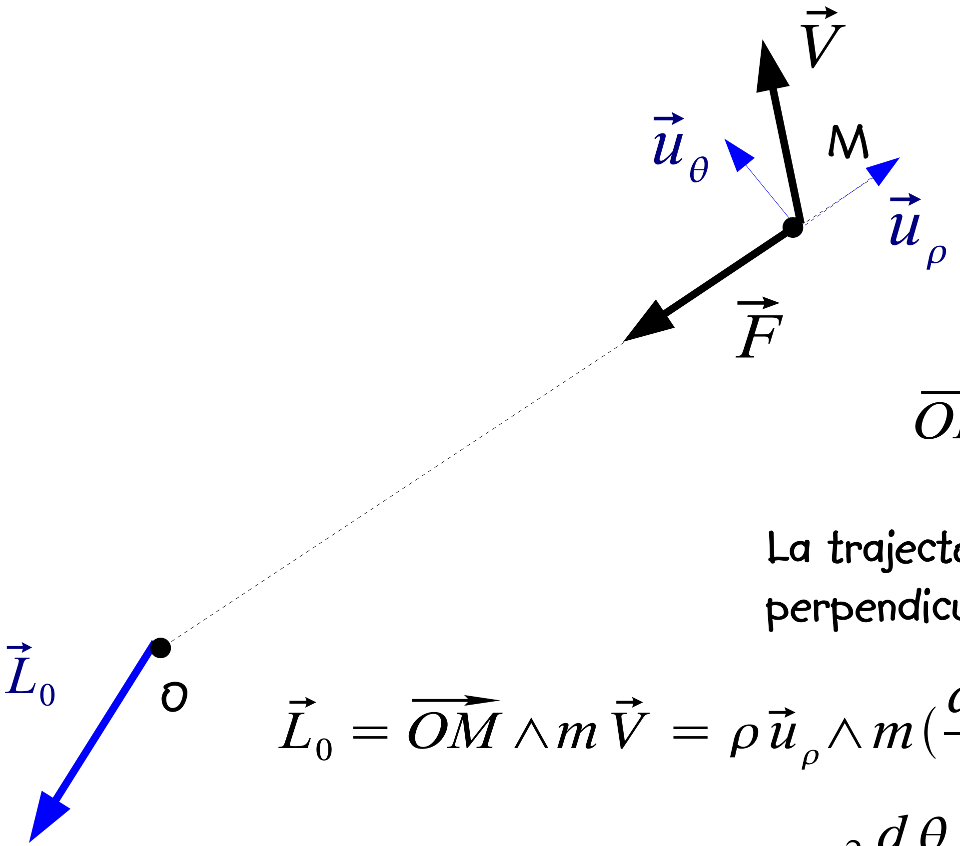
moment cinétique total par rapport à O

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k}(\overrightarrow{OM}_i\wedge\vec{F}^{ext}_{k/i})\right)dt=d\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_{i/O}\right)=d(\vec{L}_{tot})\ \Rightarrow\ \boxed{\sum\vec{m}_{\vec{F}^{ext}/O}\,dt=d(\vec{L}_{tot/O})}$$

On peut montrer que le point O est soit un point fixe dans le repère inertiel considéré, soit un point animé d'une vitesse parallèle à celle du centre de masse du système , soit le CM du système lui-même

Mouvement à force centrale

Mouvement d'un point matériel mobile autour d'un point fixe avec une force toujours dirigée vers ce point fixe



$$\vec{m}_{\vec{F}/o} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = 0 = d(\vec{L}_0)$$

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{V} = \vec{cte}$$

$\overrightarrow{OM}$ toujours perpendiculaire à $\vec{L}_0$

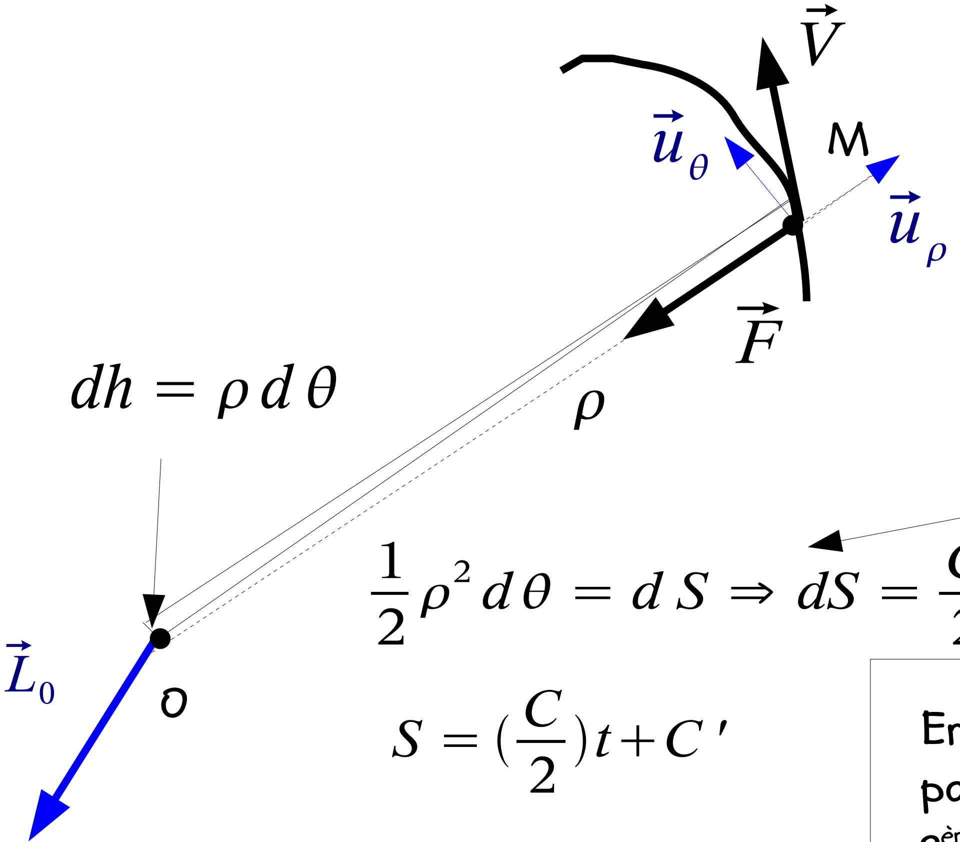
La trajectoire de M est contenu dans un plan perpendiculaire à $\vec{L}_0$

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = \rho\vec{u}_\rho \wedge m\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right) = m\rho^2\frac{d\theta}{dt}(\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta)$$

$$= m\rho^2\frac{d\theta}{dt}\,\vec{k} \;\text{ avec }\; \vec{k} = \vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\theta$$

Mouvement à force centrale

Mouvement d'un point matériel mobile autour d'un point fixe avec une force toujours dirigée vers ce point fixe



$$L_0 = m\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = cte$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C \Rightarrow \rho^2 d\theta = C\ dt$$

Surface infinitésimale balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant dt

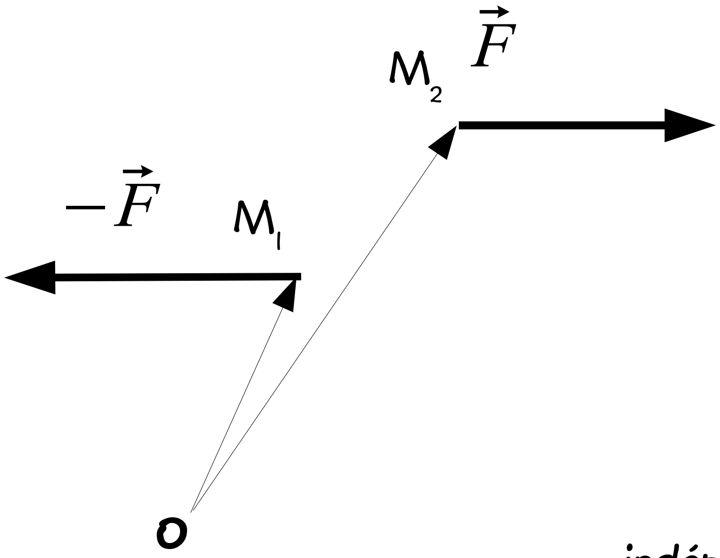
$$\frac{1}{2}\rho^2 d\theta = dS \Rightarrow dS = \frac{C}{2} dt$$

$$S = (\frac{C}{2})t + C'$$

En des temps égaux, les surfaces balayées par le rayon vecteur sont égales

2ème loi de Képler

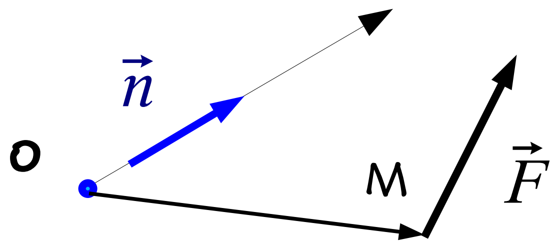
Moment d'un couple



$$\begin{aligned}\vec{C} &= \overrightarrow{OM_1} \wedge -\vec{F} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F} \\ &= \overrightarrow{M_1O} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F} \\ &= (\overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2}) \wedge \vec{F} \\ &= \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F}\end{aligned}$$

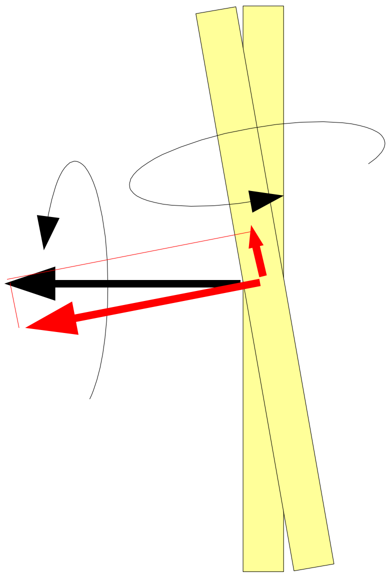
indépendant du point d'origine

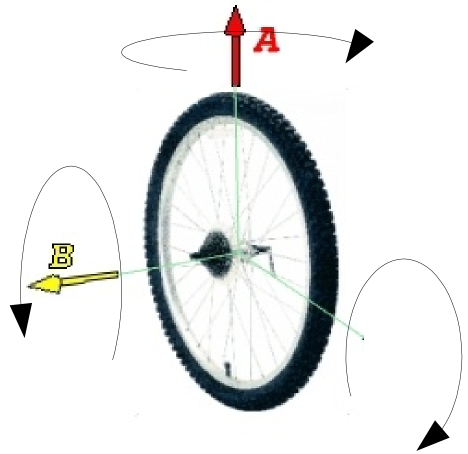
Moment par rapport à un axe



$$\vec{m}_{\vec{F}/o} \cdot \vec{n}$$

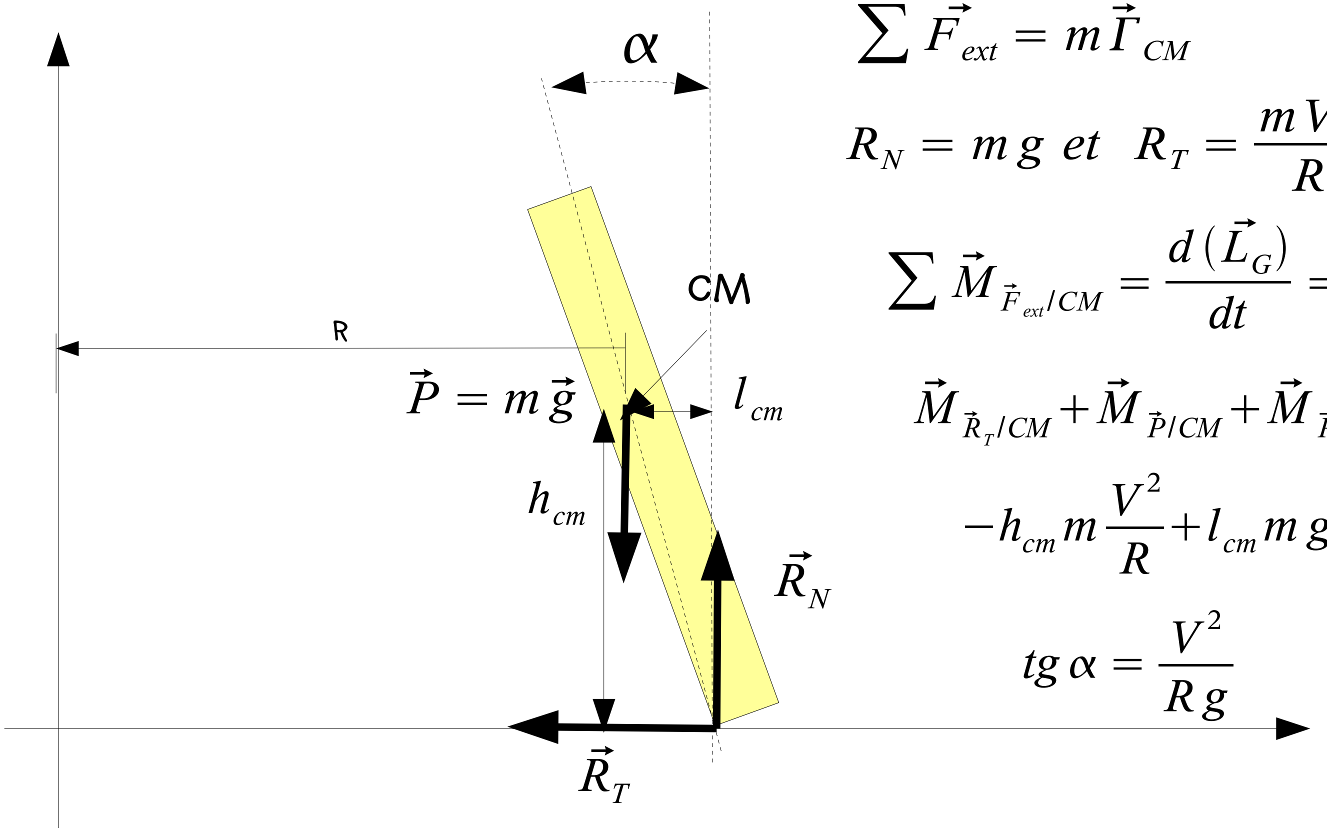
Exemple d'application du théorème du moment cinétique : l'effet gyroscopique sur une roue





On tourne la roue vers la gauche en appliquant un petit moment perpendiculaire à l'axe de rotation de la roue. Le moment cinétique initial se conserve. Il induit alors une projection (en rouge) sur un axe perpendiculaire à l'axe de rotation de la roue qui fait basculer la roue vers la droite.

Exemple d'application du théorème du moment cinétique : le motard en virage à vitesse constante (version simplifiée)



$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\Gamma}_{CM}$$

$$R_N = m\,g \;\; et \;\; R_T = \frac{m\,V^2}{R}$$

$$\sum \vec{M}_{\vec{F}_{ext}/CM} = \frac{d(\vec{L}_G)}{dt} = 0$$

$$\vec{M}_{\vec{R}_T/CM} + \vec{M}_{\vec{P}/CM} + \vec{M}_{\vec{R}_N/CM} = 0$$

$$-h_{cm}\,m\frac{V^2}{R} + l_{cm}\,m\,g = 0$$

$$tg\,\alpha = \frac{V^2}{R\,g}$$

Si le motard ne se penche pas dans l'intérieur du virage la deuxième relation n'est pas satisfaite , le moment résultant des forces de frottement sur la route le fait basculer vers l'extérieur du virage !

Théorème du moment cinétique et frottement : le virage moto avec contre-braquage

Le motard veut virer vers la droite :

1) il braque très légèrement son guidon vers la gauche ! , mais sans se pencher vers la gauche

la moto réagit en pivotant rapidement autour de son axe longitudinal vers la droite : effet du moment résultant des forces de frottement sur la route .

2) Le motard et la moto s'inclinent vers la droite
l'effet gyroscopique sur la roue avant agit sur celle-ci autour de son axe vertical en produisant un moment vers la droite . Le guidon qui était à gauche tourne et braque progressivement vers la droite .

3) Le motard et la moto sont penchés , le virage se déroule selon le schéma déjà vu

4) En fin de virage le motard peut relever son poids en braquant très légèrement le guidon vers la droite, la moto pivote vers l'extérieur du virage . L'effet gyroscopique agit alors sur le guidon qui revient en position droite

Attention il y a de l'effet gyroscopique mais il n'y a pas que ça sur une moto :
exemple un patineur sur glace tourne aussi en se penchant .