

Édification de la théorie des interactions électrofaibles

Table des matières

1 Aspects historiques et phénoménologiques :.....	2
1.1 La découverte :.....	2
1.2 Propriétés générales :.....	2
1.3 Désintégrations faibles nucléaires :.....	3
1.4 Désintégrations faibles des particules :	3
Isospin faible :.....	3
Nombres quantiques leptoniques	4
Mélange des quarks - Matrice CKM	4
Classification.....	5
Description générique.....	5
1.5 Exercice :	6
2 La théorie phénoménologique des interactions faibles:.....	6
2.1 La théorie de Fermi :.....	6
2.2 La violation de la parité - Couplage V-A :.....	8
2.3 Universalité, interactions faibles leptoniques :.....	10
Désintégration du muon	11
2.4 L'interaction faible correspond-elle réellement à une force de contact ?.....	16
3 Vers une théorie unique des interactions électrofaibles	18
3.1 Courants neutres:.....	18
3.2 Problème avec la borne d'unitarité :.....	19
3.3 Divergences dans les contributions d'ordres supérieurs :	19
4 La théorie de Glashow, Weinberg et Salam :.....	21
4.1 Les bases :.....	21
4.2 Structure d'isospin des courants faibles et électromagnétique :.....	22
4.3 Formulation covariante et invariance de jauge locale :.....	22
4.4 L'unification :.....	24
4.5 Non invariance de jauge des termes de masses directs :.....	25
Fermions élémentaires :.....	25
Bosons de jauge :.....	25
4.6 Effet Debye :.....	26
4.7 Le mécanisme de Higgs-Englert et Brout : brisure spontanée de la symétrie SU(2) X U(1)	27
4.8 Lagrangien complet des interactions électrofaibles :	30
5 Règles de Feynman dans la théorie GWS :.....	31
5.1 Taux de décroissance d'une particule :.....	32
5.2 Diffusion à deux corps dans la voie d'entrée :.....	32
5.3 Règles :.....	33
6 $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$:.....	34
7 Pour en savoir plus :.....	40

1 Aspects historiques et phénoménologiques :

1.1 La découverte :

L'interaction faible est responsable de la décroissance bêta des noyaux instables. Elle fut mise en évidence pour la première fois lorsque Henri Becquerel découvrit en 1896 la radioactivité produite par des cristaux d'uranium. Dans les quelques années qui suivirent, Walter Kaufmann et Ernest Rutherford montrèrent expérimentalement que la radioactivité bêta consiste en l'émission de particules chargées (particules bêta) se déplaçant à une vitesse proche de celle de la lumière. Ces particules furent identifiées plus tard comme étant des électrons.

Avec l'élaboration de la théorie moderne de l'atome (vers 1910) et plus tard (1932) la découverte du neutron par James Chadwick, il devint évident que la désintégration bêta consistait en la transformation, au sein d'un noyau, d'un neutron en un proton et un électron, le dernier s'échappant en emportant l'essentiel de l'énergie provenant de la différence de masses de la réaction.

À cette même époque, les mesures des spectres en énergie des électrons émis dans les désintégrations bêta montraient que ceux-ci étaient continus ce qui est contraire à ce qui est prédit par la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans une désintégration en deux corps. Ceci conduisit Pauli à postuler en 1930 l'existence d'une nouvelle particule neutre, très légère et possédant une interaction suffisamment faible pour être indétectable dans les expériences réalisées alors. Cette particule que l'on nomme le neutrino, fut découverte beaucoup plus tard (1956) par Frederic Reines.

1.2 Propriétés générales :

La force nucléaire faible est qualifiée de la sorte du fait que la constante de couplage G qui intervient entre les objets en interaction est beaucoup plus petite que celle que l'on rencontre dans l'électromagnétisme :

$$G \approx \frac{10^{-5}}{m_p^2} \approx 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (\text{à comparer à la constante de structure fine } \alpha = 1/137).$$

De fait, les processus faibles sont plus lents comme cela peut se voir dans les désintégrations des pions chargés et neutres:

- $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$, désintégration faible, durée de vie moyenne : $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$,
- $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, désintégration électromagnétique, durée de vie moyenne : $\tau = 8,4 \pm 0,6 \cdot 10^{-17} \text{ s}$.

Toutes les particules élémentaires matérielles sont sensibles à l'interaction faible, mais celle-ci contrairement aux interactions électromagnétiques (atomes et molécules), fortes (noyaux atomiques) et gravitationnelles (structures astrophysiques) ne crée pas d'état lié.

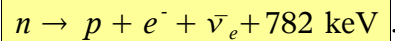
Les désintégrations faibles peuvent provoquer des changements de charges des particules impliquées, ainsi que des modifications des nombres quantiques d'étrangeté, de charme et de beauté (nombres de quarks étranges (s), charmés (c) et beaux (b)).

L'interaction faible ne respecte pas la symétrie de parité, ni la conjugaison de charge. Elle viole faiblement la symétrie combinée CP (voir cours sur les symétries PCT).

La valeur relativement faible de la constante de couplage de l'interaction faible est liée à sa très courte portée (voir plus loin). Cette constante porte une unité. C'est un indice qui nous incitera à décrire plus tard cette interaction comme étant véhiculée par des bosons massifs.

1.3 Désintégrations faibles nucléaires :

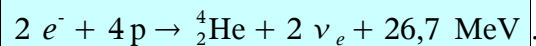
La désintégration du neutron est l'archétype d'une décroissance bêta :



Réalisée au sein d'un noyau, cela conduit à des réactions du type : ${}^A_Z N \rightarrow {}^A_{Z+1} N + e^- + \bar{\nu}_e + Q_{\beta^-}$. Du simple fait qu'il est plus léger qu'un neutron, un proton libre est une particule stable. Cependant, il peut se transformer en un neutron par interaction faible au sein d'un noyau si le bilan énergétique de la réaction est positif. C'est ce que l'on observe dans les désintégrations de type bêta plus :

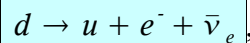
${}^A_Z N \rightarrow {}^A_{Z-1} N + e^+ + \nu_e + Q_{\beta^+}$, ou lorsque l'orbite K des électrons atomiques possède un rayon suffisamment petit (noyaux à Z élevé) : $e^- + {}^A_Z N \rightarrow {}^A_{Z-1} N + \nu_e + Q_{CE}$, qui correspond au phénomène de capture électronique.

La force nucléaire faible est indispensable à la combustion des étoiles jeunes (exemple le soleil) lorsque celles-ci sont dans la période de leur vie correspondant à la séquence principale du diagramme de Hertzsprung-Russel. Au sein de telles étoiles, l'hydrogène se transforme en hélium par interaction faible suivant un cycle de réactions qui peut être simplifié sous la forme suivante :

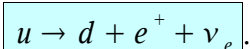


1.4 Désintégrations faibles des particules :

Dans le modèle des quarks constituants, les baryons, dont le neutron et le proton sont les représentants les plus communs, comportent trois quarks de valence. Le neutron comprend un quark u ($q=2/3 |e|$) et deux quarks d ($q=-1/3 |e|$) alors que le proton renferme deux quarks u et un quark d : $|p\rangle = |uud\rangle$, $|n\rangle = |udd\rangle$. La désintégration d'un neutron en un proton, examinée au niveau élémentaire, correspond à la transformation d'un quark d en un quark u :



et inversement lorsqu'un proton se transforme en un neutron (dans un noyau), cela met en jeu la réaction suivante :



Isospin faible :

On peut tirer de cela une classification des particules élémentaires sous la forme de doublets d'isospin faible (analogue à un spin 1/2 défini dans un espace abstrait, euclidien à trois dimensions d'isospin faible):

$$T=1/2 ; \begin{matrix} T_3=1/2 \\ T_3=-1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \text{ et par extension aux trois familles de fermions élémentaires connues ,}$$

$$T=1/2 ; \begin{matrix} T_3=1/2 \\ T_3=-1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \text{ Leptons}$$

$$T=1/2 ; \begin{matrix} T_3=1/2 \\ T_3=-1/2 \end{matrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \text{ Quarks}$$

L'isospin faible (à ne pas confondre avec l'isospin fort) est un nombre quantique conservé dans les processus mettant en jeu les interactions faibles lorsque ceux-ci sont considérés au niveau des constituants élémentaires.

Nombres quantiques leptoniques

Dans le monde des leptons (fermions élémentaires insensibles aux interactions fortes), on définit trois nombres quantiques additifs appelés nombres quantiques leptoniques qui sont séparément conservés au premier ordre (violés dans le phénomène des oscillations de neutrinos) dans toutes les interactions :

	e^-	ν_e	μ^-	ν_μ	τ^-	ν_τ
L_e	1	1	0	0	0	0
L_μ	0	0	1	1	0	0
L_τ	0	0	0	0	1	1

Par définition, les antiparticules portent des nombres quantiques leptoniques de signes opposés (ex. :

$$L_e(e^+) = -1).$$

Les nombres quantiques leptoniques ont été introduits pour rendre compte de l'absence expérimentalement constatée de réaction du type :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma \quad \text{ou encore} \quad \bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + e^+$$

Mélange des quarks - Matrice CKM

Dans le secteur des quarks, on observe expérimentalement qu'il existe des transitions faibles entre familles. Elles permettent d'expliquer la désintégration des particules étranges, charmées ou portant un quark b.

Exemple : $K^- (|\bar{u} s\rangle) \rightarrow \pi^- (|\bar{u} d\rangle) \pi^0 (\frac{|\bar{u} \bar{u}\rangle - |d \bar{d}\rangle}{\sqrt{2}})$, dans laquelle on assiste à la transformation suivante : $s \rightarrow u + d + \bar{u}$.

On peut décrire ces transitions entre familles de quarks en introduisant une matrice de mélange unitaire (dont les éléments peuvent être complexes) appelée la matrice de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = M_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix},$$

et en remplaçant dans les doublets d'isospin faible, d , s et b par d' , s' et b' :

$$\begin{array}{l}
 T=1/2 \ ; \ T3= 1/2 \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad \text{Leptons} \\
 \\
 T=1/2 \ ; \ T3= 1/2 \quad \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} \quad \text{Quarks}
 \end{array}$$

Le premier doublet de quarks : $\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud}d + V_{us}s + V_{ub}b \\ \end{pmatrix}$ autorise les transitions de d vers u avec une amplitude V_{ud} , s vers u avec une amplitude V_{us} et b vers u avec une amplitude V_{ub} .

Un ajustement global sur toutes les données disponibles donne les modules des éléments de la matrice CKM ci-dessous :

$$\begin{pmatrix}
 0,97383 \pm 0,00024 & 0,2272 \pm 0,001 & 0,00396 \pm 0,00009 \\
 0,2271 \pm 0,001 & 0,97296 \pm 0,00024 & 0,04221^{+0,0001}_{-0,0008} \\
 0,00813^{+0,00032}_{-0,00064} & 0,04161^{+0,00012}_{-0,00078} & 0,999100^{+0,000034}_{-0,000004}
 \end{pmatrix}$$

Ainsi la cascade de désintégrations suivante (découverte du baryon oméga moins) a pu être observée:

$$\begin{aligned}
 \Omega^- (| sss \rangle) &\rightarrow \Xi^0 (| ssu \rangle) + \pi^- (| \bar{u} d \rangle) \\
 &\downarrow \Lambda^0 (| uds \rangle) + \pi^0 \left(\frac{|\bar{u} u \rangle - |\bar{d} d \rangle}{\sqrt{2}} \right), \\
 &\downarrow p (| uud \rangle) + \pi^- (| \bar{u} d \rangle)
 \end{aligned}$$

dans laquelle la transition $s \rightarrow u + d + \bar{u}$ se produit successivement à trois reprises.

Classification

Selon la nature des produits qui interviennent dans une désintégration (ou une réaction) faible, on parle:

- d'une désintégration leptonique : s'il n'y a que des leptons participant à la réaction , exemples :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu ; \tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$$

- d'une désintégration semi-leptonique : si des hadrons et des leptons sont impliqués , exemples :

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu ; K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu ; n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

- d'une désintégration hadronique : si on ne rencontre que des hadrons :

$$K^- \rightarrow \pi^- + \pi^0 ; \Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$$

Description générique

Tous les processus faibles (avec changement de charge) entre constituants élémentaires peuvent être décrits de manière générique par «les décroissances» suivantes :

$$\begin{aligned}
 B \rightarrow H' + L^- + \bar{\nu}_L \text{ ou } H \rightarrow B' + L^+ + \nu_L \text{ ou } H \rightarrow B' + \bar{B}'' + H'' \text{ ou } B \rightarrow H' + B'' + \bar{H}'' \text{ ou} \\
 L^- \rightarrow L'^- + \bar{\nu}_L' + \nu_L \text{ ou } L^+ \rightarrow L'^+ + \nu_L' + \bar{\nu}_L \dots
 \end{aligned}$$

, les réactions de «capture» du type :

$$L^+ + B \rightarrow H' + \bar{\nu}_L \text{ ou } L^- + H \rightarrow B' + \nu_L \text{ ou } B'' + H \rightarrow B' + H'' \text{ ou } \bar{B}' + H \rightarrow \bar{B}'' + H'' \text{ ou } \bar{B}' + H \rightarrow L^+ + \nu_L \dots \text{ et toutes les réactions croisées possibles.}$$

Dans les réactions précédentes, les doublets génériques d'isospin sont :

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ L^- \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} H \\ B \end{pmatrix} \text{ pour des leptons et des quarks, respectivement.}$$

Les primes et les secondes désignent l'une des trois familles de quarks .

1.5 Exercice :

- Déterminer les règles de sélection qui gouvernent au premier ordre (une seule transition faible) les changements d'étrangeté et de charge dans les désintégrations faibles des hadrons (particules composées de quarks, baryons : trois quarks , mésons : un quark et un antiquark) (On ne s'intéresse qu'aux changements de charge et d'étrangeté des produits hadroniques)
- Les Σ^+ et Σ^- sont des états $|uus\rangle$ et $|dds\rangle$, que peut-on dire des désintégrations :

$$\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e \text{ et } \Sigma^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e ?$$
- La deuxième de ces désintégrations est-elle strictement interdite par l'interaction faible ?

2 La théorie phénoménologique des interactions faibles:

2.1 La théorie de Fermi :

Cette théorie proposée par Enrico Fermi en 1934 comprend un terme d'interaction de type courant-courant comme cela se rencontre dans l'électrodynamique. Ceux qui ne sont pas familiers avec cette approche peuvent se souvenir que l'énergie de couplage (d'interaction) de deux circuits électriques dans lesquels circulent des courants I_1 et I_2 est $E_c = M_{12} I_1 I_2$ où M_{12} est l'inductance mutuelle des circuits. Une théorie de l'interaction faible doit être relativiste (électrons et neutrinos relativistes) et doit manipuler des particules de spins 1/2. Elle est donc développée dans le formalisme de l'équation de Dirac.

Le Hamiltonien décrivant la désintégration bêta du neutron est donné par :

$$H_F = H_n^0 + H_p^0 + H_e^0 + H_\nu^0 + \sum_i C_i \int d^3x (\bar{u}_p \hat{O}_i u_n) (\bar{u}_e \hat{O}_i u_\nu) .$$

Les spineurs u_k représentant le proton, le neutron, l'électron et le neutrino satisfont l'équation de Dirac libre (solutions asymptotiques) :

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_k \right) u_k(x) = 0 \quad , \quad (k = p, n, e, \nu) ,$$

où les γ^μ sont les matrices (4 x 4) de Dirac ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et σ_i les matrices de Pauli (2 x 2).

Les termes $j_{ab}^i = \bar{u}_a \hat{O}_i u_b$ sont des densités de courant généralisées (formes bilinéaires covariantes) comparables à ce que l'on rencontre en électrodynamique : $e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$. Pour obtenir des termes d'interaction (produits de densités de courants) invariants par transformation de Lorentz, les opérateurs \hat{O}_i doivent être choisis parmi les cinq possibilités suivantes :

- $\hat{O}_i = 1$, $\bar{u}_a u_b = u_a^+ \gamma^0 u_b$, scalaire (S), 1 matrice, (P (parité) = 1)
- $\hat{O}_i = \gamma^\mu$, $\bar{u}_a \gamma^\mu u_b$, vecteur (V), 4 matrices, (P des composantes d'espace = -1, de temps = 1)
- $\hat{O}_i = \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, $\bar{u}_a \sigma^{\mu\nu} u_b$, tenseur (T), 6 matrices
- $\hat{O}_i = \gamma^\mu \gamma^5$, $\bar{u}_a \gamma^\mu \gamma^5 u_b$, pseudo-vecteur (A), 4 matrices, (P des composantes d'espace = 1, de temps = -1)
- $\hat{O}_i = \gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$, $\bar{u}_a \gamma^5 u_b$, pseudo-scalaire (P), 1 matrice, ($P = -1$)

Dans la représentation des matrices de Dirac choisie ci-dessus, nous avons :

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \text{ avec } (ijk) = (123) \text{ et } \sigma^{0k} = i \alpha_k = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Un spineur de Dirac peut s'écrire sous la forme d'une matrice colonne à deux composantes : $u = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}$, possédant chacune deux éléments. Dans la limite non relativiste, ce qui est le cas du neutron et du proton, les éléments de χ sont beaucoup plus petits que ceux de Φ . On peut alors montrer que les termes S et V tendent vers $\Phi_p^+ \Phi_n$, T et A vers $\Phi_p^+ \vec{\sigma} \Phi_n$ et P vers 0. Afin de garantir l'universalité des interactions faibles, nous écarterons donc l'existence d'une composante pseudo-scalaire qui n'aurait pas d'effet dans le cas que nous étudions.

Ces deux possibilités sont observées dans la nature. Le premier terme correspond aux transitions de Fermi ($J_i = J_f$), le deuxième à celles de Gamow-Teller ($J_i = J_f$ avec $J_i \neq 0$ ou $J_i = (J_f \pm 1)$). Dans le deuxième cas le spin du noyau peut changer au cours de la transition (exemple : $^{60}\text{Co} \rightarrow ^{60}\text{Ni}$).

Puisque ces deux types de transitions sont observées, le Hamiltonien de Fermi doit être une combinaison de termes d'interaction S, V, T et A. La coexistence dans le Hamiltonien de termes S et V ou T et A entraînerait l'apparition d'oscillations dans le spectre en énergie des électrons (du fait de l'interférence des termes S et V ou T et A). Puisque ceci n'est pas observé expérimentalement, on en déduit que les seules combinaisons possibles sont : S et T, S et A, V et T, V et A.

2.2 La violation de la parité - Couplage V-A :

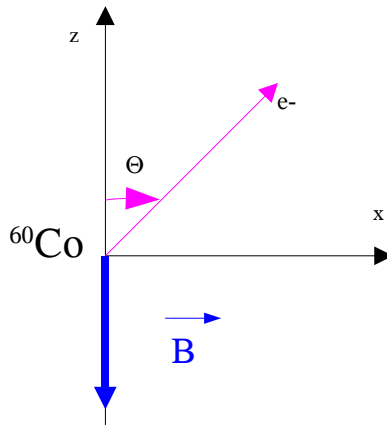
Le choix final de la bonne combinaison de termes d'interaction est fait de telle manière à rendre compte de la violation maximale de la parité observée dans les diverses expériences dont celle du ^{60}Co .

L'opérateur d'hélicité, défini comme étant : $\hat{\Lambda} = \frac{\hat{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ avec $\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$, commute avec le

Hamiltonien de Dirac d'une particule libre : $\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \gamma^0 m$, et possède deux valeurs propres : ± 1 . Pour une particule libre, cela découle du fait que la quantité de mouvement et le spin sont des grandeurs conservées au cours de son évolution observée dans un référentiel inertiel donné. On peut donc caractériser les états asymptotiques des particules par leurs valeurs propres d'hélicité. Mais notez ici que l'hélicité n'est pas un invariant de Lorentz (changement de référentiel inertiel) ; pas plus que le quantité de mouvement du reste.

Dans l'expérience du ^{60}Co (voir cours sur PCT), les électrons émis doivent avoir un spin pointant dans la direction du champ magnétique (conservation du moment cinétique). Puisque l'on mesure que les électrons sont émis préférentiellement dans la direction opposée au champ magnétique, on en déduit qu'ils se trouvent dans un état d'hélicité négative (ils ne peuvent être que dans l'un ou l'autre des deux états d'hélicité). Des mesures systématiques de polarisation réalisées sur d'autres désintégrations bêta ont permis de confirmer cela. Inversement on peut mesurer que le positon émis dans $^{22}\text{Na} \rightarrow ^{22}\text{Na} + e^+ + \nu_e$, a une hélicité positive.

Considérons le schéma d'émission suivant pour l'électron :



$\vec{p}_e = p_e (\vec{e}_z \cos \theta + \vec{e}_x \sin \theta)$, d'où :

$$\hat{\Lambda}_\theta = \frac{\hat{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \hat{\Sigma}_z \cos \theta + \hat{\Sigma}_x \sin \theta = \begin{pmatrix} \sigma_z \cos \theta + \sigma_x \sin \theta & 0 \\ 0 & \sigma_z \cos \theta + \sigma_x \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\text{c'est-à-dire : } \hat{\Lambda}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le spineur d'un électron d'hélicité définie peut se réduire aux deux composantes du haut (celles du bas étant identiques à un signe près). Les fonctions propres d'hélicité sont :

$$\Phi_{\theta}^{+} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_{\theta}^{-} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Compte tenu que le spin d'un électron d'hélicité négative doit être projeté sur la direction du champ magnétique, la probabilité d'émission dans la direction θ est proportionnelle à :

$$W(\theta) = \left| \langle (0, 1) | \Phi_{\theta}^{-} \rangle \right|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta).$$

On note que W est nulle dans la direction du champ magnétique et maximale dans le sens opposé. Ceci est en accord parfait avec l'expérience du ^{60}Co .

Ainsi, il apparaît que seules les parties d'hélicité négative des spineurs d'un électron et d'un neutrino sont à considérer dans la théorie. Cela peut être obtenu en projetant les spineurs de l'électron et du neutrino sur les états d'hélicité négative. Soit :

$\hat{P}_{\pm} = \frac{1 \pm \hat{\Lambda}}{2}$, les projecteurs sur les états d'hélicité positive et négative, si :

$u = u_{+} + u_{-}$ avec $\hat{\Lambda} u_{\pm} = \pm u_{\pm}$, alors $\hat{P}_{\pm} u = u_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\Lambda}) u = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\Sigma} \cdot \vec{p}/p) u$, or,

$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \gamma^0 m) u = E u$ (Équation de Dirac) avec $\gamma^5 \vec{\alpha} = \hat{\Sigma}$, d'où :

$$\hat{P}_{\pm} u = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5 \vec{\alpha} \cdot \vec{p}/p) u = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5 \frac{E - \gamma^0 m}{p}) u.$$

Dans la limite relativiste ($m \ll E, p \approx E$), on obtient :

$$\hat{P}'_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5).$$

Ces nouveaux opérateurs (projecteurs de chiralité) permettent de maintenir l'invariance de Lorentz du Hamiltonien d'interaction, ce qui ne serait pas possible avec les projecteurs d'hélicité (l'hélicité n'est pas un invariant de Lorentz). Pour une particule de masse nulle, la chiralité se confond avec l'hélicité. Ce n'est plus le cas pour des particules massives. Ce sont ces projecteurs qui permettent de construire les termes d'interaction du Hamiltonien de Fermi en prenant en compte la violation de la parité.

Dans les termes de courants, on doit alors remplacer les spineurs par leurs projections de chiralité:

$$\begin{aligned}\bar{u}_e \hat{O}_i u_\nu &\rightarrow \overline{\hat{P}'_- u_e} \hat{O}_i \hat{P}'_- u_\nu = (\hat{P}'_- u_e)^+ \gamma^0 \hat{O}_i \hat{P}'_- u_\nu = u_e^+ \hat{P}'_+ \gamma^0 \hat{O}_i \hat{P}'_- u_\nu \\ &= u_e^+ \left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)^+ \gamma^0 \hat{O}_i \hat{P}'_- u_\nu \\ &= \bar{u}_e \hat{P}'_+ \hat{O}_i \hat{P}'_- u_\nu\end{aligned}$$

Ce qui conduit à remplacer $\hat{O}_i \rightarrow \hat{O}'_i = \hat{P}'_+ \hat{O}_i \hat{P}'_-$. On peut alors montrer que parmi les 5 possibilités (S, V, T, A, P), seuls deux opérateurs « transformés » ne seront pas nuls (V et A) et que leurs contributions sont égales à un signe près :

$$V(\hat{O}_i = \gamma^\mu) \rightarrow \hat{O}'_i = \frac{1}{2} \gamma^\mu (1-\gamma^5) \text{ et } A(\hat{O}_i = \gamma^\mu \gamma^5) \rightarrow \hat{O}'_i = -\frac{1}{2} \gamma^\mu (1-\gamma^5).$$

On obtient au final pour le Hamiltonien d'interaction de Fermi :

$$\hat{H}_{int}(n, p, e, \nu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x [\bar{u}_p \gamma_\mu (C_V + C_A \gamma^5) u_n] \times [\bar{u}_e \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_\nu].$$

Dans lequel les constantes C_V et C_A sont ajustées afin de reproduire au mieux les durées de vie d'une part des transitions pures de Fermi (terme vectoriel), d'autre part des transitions pures de Gamow-Teller (terme axial), ainsi que les distributions angulaires des électrons émis dans ces transitions.

$C_A/C_V = -1,26992 \pm 0,00069$, et $G C_V$ est la constante de Fermi de décroissance nucléaire faible.

L'introduction du couplage V-A est due à R. Feynman et M. Gell-Mann (1958). Il faudra cependant attendre plusieurs années (-> 1963) et quelques clarifications expérimentales (expériences sur ${}^6\text{He}$ et décroissance $\pi \rightarrow e \nu$) avant que cette théorie soit totalement confirmée.

2.3 Universalité, interactions faibles leptoniques :

De nos jours trois familles de leptons sont connues. Nous avons vu dans le chapitre précédent que le courant faible associé à la première famille (composée d'un électron et d'un neutrino) qui intervient dans la désintégration bêta du neutron est :

$$\bar{u}_e \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_{\nu_e}.$$

Puisque l'interaction faible agit sur toutes les particules de la même manière (propriété d'universalité), nous allons postuler que le courant leptonique total est :

$$J_\alpha^L = J_\alpha^e + J_\alpha^\mu + J_\alpha^\tau = \bar{u}_e \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_{\nu_e} + \bar{u}_\mu \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_{\nu_\mu} + \bar{u}_\tau \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_{\nu_\tau}.$$

Le Hamiltonien d'interaction purement leptonique est alors :

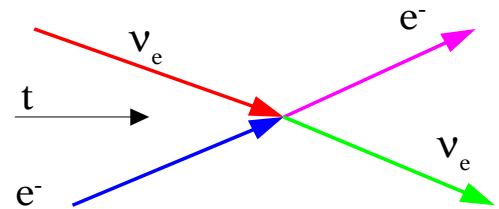
$$H_{int}^L = \frac{G}{\sqrt{2}} \int d^3x J_\alpha^{L+} J_L^\alpha, \text{ avec :}$$

$$J_\alpha^{L+} = \bar{u}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_e + \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_\mu + \bar{u}_{\nu_\tau} \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_\tau$$

Ce Hamiltonien décrit un grand nombre de processus faibles dont certains sont nouveaux, par exemple :

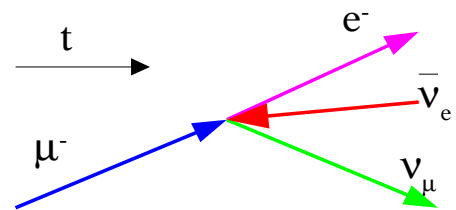
Diffusion neutrino-électron

$$[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_e] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1-\gamma^5) u_{\nu_e}]$$



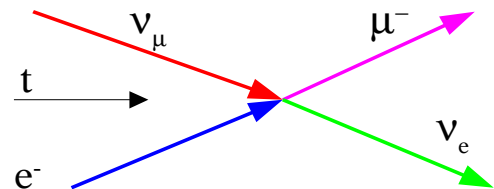
Désintégration du muon

$$[\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1-\gamma^5) u_{\nu_e}]$$



Production d'un muon dans une diffusion neutrino-mu , électron

$$[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\alpha (1-\gamma^5) u_e] [\bar{u}_\mu \gamma^\alpha (1-\gamma^5) u_{\nu_\mu}]$$



Tous ces processus procèdent par courants chargés : les particules changent d'état de charge au cours de l'interaction. Les courants neutres (du type de ceux que l'on rencontre en électrodynamique) ne sont pas présents à ce stade de la théorie.

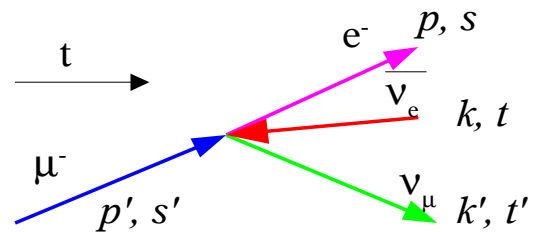
Désintégration du muon

À titre d'exemple, nous donnons ci-dessous le calcul détaillé de la durée de vie du muon obtenu dans le cadre de la théorie effective de Fermi.

p', p, k, k' et s', s, t, t' sont les quadri-vecteurs et les projections des spins des particules impliquées.

Le taux de désintégration partiel est donné par :

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2 p'^0} |M_{fi}|^2 dQ,$$



où dQ est le terme d'espace de phase et M_{fi} et l'élément de matrice invariant de la transition :

$$dQ = \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2p^0} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2k^0} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2k'^0} \delta^4(p' - p - k' - k),$$

et ,

$$M_{fi} = \frac{G}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_{\nu_e}].$$

avec ,

$$u(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad v(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad \text{et } \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les neutrinos n'étant pas détectés, nous devons intégrer sur k et k' et sommer les éléments de matrice sur les indices de spin t et t' . Ceci correspond au calcul de l'expression qui suit :

$$d\Gamma = \frac{d^3 p}{(2\pi)^5 2p'^0 2p^0} \int \frac{d^3 k}{2k^0} \int \frac{d^3 k'}{2k'^0} \delta^4(p' - p - k' - k) \sum_{t, t'} |M_{fi}|^2.$$

Calculons d'abord la somme d'éléments de matrice :

$$\begin{aligned} \sum_{t, t'} |M_{fi}|^2 &= \frac{G^2}{2} \sum_{t, t'} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_{\nu_e}] ([\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \nu_{\nu_e}])^+ \\ &= \frac{G^2}{2} \sum_{t, t'} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_{\nu_e}] [\bar{u}_e \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \nu_{\nu_e}]^+ [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) u_\mu]^+ \\ &= \frac{G^2}{2} \sum_{t, t'} [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_{\nu_e}] [\bar{\nu}_{\nu_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) u_e] [\bar{u}_\mu \gamma_\beta (1 - \gamma^5) u_\mu] \\ &= \frac{G^2}{2} \sum_{t, t'} M_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta} = \frac{G^2}{2} \sum_{t'} M_{\alpha\beta} \sum_t E^{\alpha\beta} \end{aligned}$$

avec ,

$$M_{\alpha\beta} = [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_\mu] [\bar{u}_\mu \gamma_\beta (1 - \gamma^5) u_\mu] \quad \text{et} \quad E^{\alpha\beta} = [\bar{u}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \nu_{\nu_e}] [\bar{\nu}_{\nu_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) u_e]$$

Pour progresser dans le calcul des sommes de spins, nous faisons apparaître explicitement les indices matriciels de manière à pouvoir déplacer et rapprocher les termes contenant l'indice de spin de l'antineutrino muonique :

$$\begin{aligned} \sum_{t'} M_{\alpha\beta} &= \sum_{t'} (\bar{u}_{\nu_\mu})_\pi (\gamma_\alpha)_{\pi\rho} (1 - \gamma^5)_{\rho\lambda} (u_\mu)_\lambda (\bar{u}_\mu)_{\pi'} (\gamma_\beta)_{\pi'\rho'} (1 - \gamma^5)_{\rho'\lambda'} (u_{\nu_e})_{\lambda'} \\ &= \sum_{t'} (u_{\nu_e})_{\lambda'} (\bar{u}_{\nu_\mu})_\pi (\gamma_\alpha)_{\pi\rho} (1 - \gamma^5)_{\rho\lambda} (u_\mu)_\lambda (\bar{u}_\mu)_{\pi'} (\gamma_\beta)_{\pi'\rho'} (1 - \gamma^5)_{\rho'\lambda'} \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\sum_s (u(\vec{p}, s))_\sigma (\bar{u}(\vec{p}, s))_\epsilon = (\not{p} + m)_{\sigma\epsilon} \text{ avec } \not{p} = \gamma^\mu p_\mu,$$

et

$$(u(\vec{p}, s))_\sigma (\bar{u}(\vec{p}, s))_\epsilon = [(\not{p} + m) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{s}}{2} \right)] \text{ avec } s_\mu = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{m}, \vec{s} + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{s}) \vec{p}}{m(E + m)} \right)$$

(quadri-vecteur de spin)

et que la masse des neutrinos est nulle (ou très proche de 0), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{t'} M_{\alpha\beta} &= \not{\epsilon}'_{\lambda'\pi} (\gamma_\alpha)_{\pi\rho} (1 - \gamma^5)_{\rho\lambda} [(\not{p}' + m_\mu) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{s}'}{2} \right)]_{\lambda\pi'} (\gamma_\beta)_{\pi'\rho'} (1 - \gamma^5)_{\rho'\lambda'}, \\ &= (\gamma_\alpha)_{\pi\rho} (1 - \gamma^5)_{\rho\lambda} [(\not{p}' + m_\mu) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{s}'}{2} \right)]_{\lambda\pi'} (\gamma_\beta)_{\pi'\rho'} (1 - \gamma^5)_{\rho'\lambda'} \not{\epsilon}'_{\lambda'\pi} \end{aligned}$$

Puisque la somme d'indices matriciels part et arrive sur le même indice, cela revient à calculer la trace du produit matriciel :

$$\sum_{t'} M_{\alpha\beta} = Tr \left\{ \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) (\not{p}' + m_\mu) \frac{(1 + \gamma^5 \not{s}')}{2} \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \not{\epsilon}' \right\}.$$

Pour remanier la trace de ce produit, on peut utiliser les propriétés suivantes des matrices gamma :

$\gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0$, $Tr(AB) = Tr(BA)$, la trace d'un produit contenant un nombre impair de matrices γ est nulle, $(1 - \gamma^5)^2 = 2(1 - \gamma^5)$, $\gamma^5(1 - \gamma^5) = -(1 - \gamma^5)$. On arrive à l'expression suivante :

$$\sum_{t'} M_{\alpha\beta} = Tr \left\{ (\not{p}' - m_\mu \not{s}') \gamma_\alpha \not{\epsilon}' \gamma_\beta (1 - \gamma^5) \right\}$$

D'une manière similaire, on considérant que :

$$\sum_s (v(\vec{p}, s))_\sigma (\bar{v}(\vec{p}, s))_\epsilon = (\not{p} - m)_{\sigma\epsilon},$$

et le fait que la masse du neutrino électronique est nulle (ou très petite), on aboutit à :

$$\sum_t E^{\alpha\beta} = Tr \left\{ (\not{p} - m_e \not{s}) \gamma^\alpha \not{\epsilon} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right\}.$$

Au final, après évaluation des traces (en utilisant $Tr(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\tau) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} - g^{\alpha\sigma} g^{\beta\tau} + g^{\alpha\tau} g^{\beta\sigma})$, $Tr(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma \gamma^\tau \gamma^5) = -4i \epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}$), on trouve :

$$\sum_{t', t'} |M_{fi}|^2 = \frac{G^2}{2} \sum_{t'} M_{\alpha\beta} \sum_t E^{\alpha\beta} = 32 G^2 (p' - m_\mu \not{s}')^\alpha k_\alpha (p - m_e \not{s})^\beta k'_\beta.$$

On peut maintenant insérer cette somme d'éléments de matrice dans l'expression du taux partiel de désintégration :

$$d\Gamma = \frac{32 G^2 d^3 p}{(2\pi)^5 2 p'^0 2 p^0} (p' - m_\mu \not{s}')^\alpha (p - m_e \not{s})^\beta \int \frac{d^3 k}{2k^0} \int \frac{d^3 k'}{2k'^0} \delta^4(p' - p - k' - k) k_\alpha k'_\beta$$

dans laquelle nous devons ensuite évaluer l'intégrale covariante :

$$I_{\alpha\beta} = \int \frac{d^3k}{2k^0} \int \frac{d^3k'}{2k'^0} \delta^4(p' - p - k' - k) k_\alpha k'_\beta .$$

Pour cela nous essayons une solution de la forme : $I_{\alpha\beta} = A q^2 g_{\alpha\beta} + B q_\alpha q_\beta$ avec $q = p' - p$, à partir de laquelle on peut former les deux invariants de Lorentz suivants :

$g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = (4A+B)q^2$ et $q^\alpha q^\beta I_{\alpha\beta} = (A+B)q^4$ de sorte à pouvoir calculer ces grandeurs dans le repère inertiel le plus simple .

Si $q^2 > 0$ (c'est-à-dire si q est un vecteur temps), on peut toujours trouver une transformation de Lorentz telle que : $\check{q}^\mu = (\check{q}^0, 0)$, ou encore $\check{p}' = \check{p}$ et donc $\check{k} = -\check{k}'$ avec $\check{k}^0 = \check{k}'^0 = |\check{k}| = |\check{k}'|$ car les neutrinos sont considérés sans masse . Dans ce référentiel inertiel, nous avons :

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= \int \frac{d^3\check{k}}{2\check{k}^0} \int \frac{d^3\check{k}'}{2\check{k}'^0} \check{k}_\alpha \check{k}'^\alpha \delta^3(\check{k} + \check{k}') \delta(\check{k}^0 + \check{k}'^0 - \check{q}^0) \\ &= \int \frac{d^3\check{k}}{2\check{k}^0} \int \frac{d^3\check{k}'}{2\check{k}'^0} [(\check{k}^0)^2 - \check{k} \cdot \check{k}'] \delta^3(\check{k} + \check{k}') \delta(\check{k}^0 + \check{k}'^0 - \check{q}^0) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\check{k} \delta(2\check{k}^0 - \check{q}^0) = 2\pi \int_0^\infty (\check{k}^0)^2 d\check{k}^0 \delta(2\check{k}^0 - \check{q}^0) = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty x^2 dx \delta(x - \check{q}^0) \end{aligned}$$

Si $\check{q}^0 > 0$, alors $g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} (\check{q}^0)^2 \Theta(\check{q}^0)$ avec $\Theta(x) = 0$ si $x < 0$, $\Theta(x) = 1$ si $x \geq 0$ (fonction de Heaviside), ou encore sous une forme invariante de Lorentz :

$$g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{4} q^2 \Theta(q^0) \text{ si } q^2 > 0 .$$

Dans le même référentiel, on calcule que :

$$q^\alpha q^\beta I_{\alpha\beta} = (\check{q}^0)^2 I_{00} = \frac{\pi}{8} q^4 \Theta(q^0) \text{ si } q^2 > 0 .$$

Si q_μ est un vecteur de type espace ($q^2 < 0$), alors $\delta^4(k + k' - q)$ ne peut pas être satisfaite . En effet :

$(k + k')^2 = k^2 + k'^2 + 2(k^0 k'^0 - \vec{k} \cdot \vec{k}') = 2k^0 k'^0 (1 - \cos\theta) \geq 0$, donc $q^\mu = k^\mu + k'^\mu$ ne peut pas être satisfaite et par conséquent ,

$$I_{\alpha\beta} = 0 \text{ si } q^2 < 0 .$$

On peut résumer les résultats précédents de la façon suivante :

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} &= \frac{\pi}{4} q^2 \Theta(q^0) \Theta(q^2) \\ q^\alpha q^\beta I_{\alpha\beta} &= (\check{q}^0)^2 I_{00} = \frac{\pi}{8} q^4 \Theta(q^0) \Theta(q^2) \end{aligned}$$

d'où l'on tire : $A = \frac{\pi}{24} \Theta(q^0) \Theta(q^2)$ et $B = \frac{\pi}{12} \Theta(q^0) \Theta(q^2)$ et finalement :

$$I_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{24} (q^2 g_{\alpha\beta} + 2 q_{\alpha\beta}) \Theta(q^0) \Theta(q^2)$$

On a alors :

$$d\Gamma = \frac{G^2 \pi d^3 p}{3 (2\pi)^5 p'^0 p^0} [(p' - p)^2 (p' - m_\mu s')^\alpha (p - m_e s)_\alpha + 2(p' - m_\mu s')^\alpha (p' - p)_\alpha (p - m_e s)^\beta (p' - p)_\beta] \times \Theta(p'^0 - p^0) \Theta((p' - p)^2)$$

Dans le repère au repos du muon, nous avons :

$$q^\alpha = (m_\mu - p^0, -\vec{p}), \quad s^\mu = (0, \vec{s}') \text{ (quadri-vecteur de spin du muon) .}$$

$$q^2 > 0 \Rightarrow p^0 < p_{max}^0 = \frac{(m_\mu^2 + m_e^2)}{2 m_\mu} \text{ qui satisfait également la condition } p^0 < p'^0 = m_\mu \text{ car}$$

$$m_\mu - p_{max}^0 = \frac{(m_\mu^2 - m_e^2)}{2 m_\mu} > 0, \text{ on conséquence de quoi, on peut remplacer le produit de fonctions } \Theta \text{ par } \Theta(p_{max}^0 - p^0) . \text{ On aboutit à :}$$

$$d\Gamma = \frac{G^2 \pi d^3 p}{3 (2\pi)^5 p^0} \{ [(m_\mu - p^0)^2 - \vec{p}^2] [(p^0 - m_e s^0) + \vec{s}' \cdot (\vec{p} - m_e \vec{s})] + 2[m_\mu - p^0 - \vec{s}' \cdot \vec{p}] [(m_\mu - p^0)(p^0 - m_e s^0) + \vec{p} \cdot (\vec{p} - m_e \vec{s})] \} \times \Theta(p_{max}^0 - p^0)$$

La dernière étape dans le calcul de la durée de vie du muon consiste à sommer sur les états de spins possibles de l'électron, moyenner sur les états de spins du muon et intégrer sur \vec{p} , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \Gamma_\mu = \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \int d\Gamma .$$

Pour effectuer ce calcul il faut utiliser le fait que la moyenne sur tous les états de spins de $\vec{s} \cdot \vec{u}$ est nulle quel que soit \vec{u} , ce qui implique que la moyenne de $s^0 = \frac{1}{m} \vec{s} \cdot \vec{p}$ est également nulle .

On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_\mu} &= \frac{2G^2}{3(2\pi)^5} \int \frac{d^3 p}{p^0} \{ [(m_\mu - p^0)^2 - \vec{p}^2] p^0 + 2[m_\mu - p^0] [(m_\mu - p^0) p^0 + \vec{p}^2] \} \Theta(p_{max}^0 - p^0) \\ &= \frac{2G^2}{3(2\pi)^5} \int \frac{d^3 p}{p^0} [-4m_\mu (p^0)^2 + 3p^0(m_\mu^2 + m_e^2) - 2m_\mu m_e^2] \Theta(p_{max}^0 - p^0) \end{aligned}$$

$$\text{Par ailleurs : } \int d^3 p \{ \dots \} = 4\pi \int_0^{p_{max}^0} |\vec{p}|^2 d|\vec{p}| \{ \dots \}, \quad d|\vec{p}| = \frac{p^0}{|\vec{p}|} dp^0 \text{ et } |\vec{p}| = \sqrt{(p^0)^2 - m_e^2}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_\mu} &= \frac{2G^2}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_{\max}^0} d p^0 \sqrt{(p^0)^2 - m_e^2} [-4m_\mu (p^0)^2 + 3p^0(m_\mu^2 + m_e^2) - 2m_\mu m_e^2] \\ &= \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3} [1 - 8y + 8y^2 - y^4 - 12y^2 \ln y] \text{ avec } y = m_e^2 / m_\mu^2 \end{aligned}$$

Le terme entre crochets étant très petit, on obtient avec une très bonne approximation :

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$

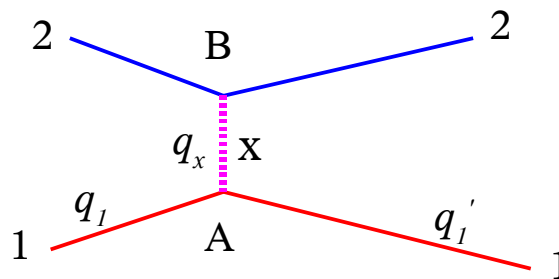
Pour calculer avec précision la valeur de la constante de Fermi, on doit ajouter aux termes entre crochets les corrections radiatives électromagnétiques qui diminuent W par un facteur : $1 - \frac{\alpha}{2\pi}(\pi^2 - \frac{25}{4}) = 0,9958$

La valeur mesurée de τ_μ étant de $(2,19703 \pm 0,00004) 10^{-6}$ s, et en prenant la meilleure valeur mesurée de la masse du muon $m_\mu = 105,658369 \pm 0,000009$ MeV, on peut calculer la constante de Fermi G , ceci donne :

$$G = 1,16637 \pm 0,00002 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$$

2.4 L'interaction faible correspond-elle réellement à une force de contact ?

Examinons l'interaction entre deux particules 1 et 2 véhiculée par l'échange d'un boson intermédiaire de masse m_x :



Dans le repère lié à la particule 1, nous pouvons écrire :

$$q_1^\mu = (m_1, 0), \quad q_1'^\mu = (\sqrt{m_1^2 + p^2}, -\vec{p})$$

Si on calcule : $q_x^2 = (q_1 - q_1')^2$,

on obtient : $q_x^2 = m_1^2 + m_1^2 - 2m_1 \sqrt{m_1^2 + p^2} = 2m_1^2(1 - \sqrt{1 + p^2/m_1^2}) \leq 0$

La particule X se trouve dans un état virtuel. En adoptant le point de vue selon lequel la particule X est émise dans un état réel et en supposant qu'elle emporte une quantité de mouvement de même valeur mais de signe opposé à celle de la particule 1, c'est-à-dire si on tient absolument à écrire :

$q'_x{}^\mu = (\sqrt{m_x^2 + p^2}, \vec{p})$, on obtient une différence d'énergie au vertex A qui est :

$\Delta E = m_1 + \sqrt{m_x^2 + p^2} - \sqrt{m_1^2 + p^2}$ qui n'est pas nulle et ne peut se produire que pour un intervalle de temps compatible avec $\Delta t = 1/\Delta E$ (en unités naturelles) . Pour de faibles transferts d'impulsions

$p \simeq 0$, on obtient $\Delta E \simeq m_x$ et la portée de l'interaction que véhicule X est réduite à $R = \frac{1}{m_x}$ (en unité naturelles) ou $R = \frac{\hbar c}{m_x}$ en fm . R est de l'ordre de $2,5 \cdot 10^{-3}$ fm pour un boson ayant une masse de 80 GeV.

Du moment que les particules en interaction gardent des longueurs d'onde de De Broglie beaucoup plus grandes que la portée de la force, on peut se placer dans l'approximation d'une force de contact. Ce point de vue est correct du moment que $p \ll m_x$.

Si on suppose maintenant que la masse de 1 est suffisamment grande pour que celle-ci ne bouge pratiquement pas lors de son interaction avec 2, cela revient à rechercher des solutions stationnaires au champ associé à X. On supposera que X est un boson sans spin. X est alors décrit par l'équation de Klein-Gordon :

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m_x^2)\Phi(x) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m_x^2\right)\Phi(x) = 0 \text{ et si l'on recherche une solution statique :}$$

$\nabla^2 \Phi(x) = m_x^2 \Phi(x)$ dans laquelle $\Phi(x)$ peut être interprétée comme un potentiel.

Pour le cas où m_x est nulle, on retrouve la forme classique de l'équation de Poisson. La solution générale de cette équation est appelée le potentiel de Yukawa (proposée en 1935) :

$$V(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-r/R}}{r} \text{ avec } R = \frac{1}{m_x} \text{ et dans laquelle } g \text{ est la constante de couplage aux points A et B .}$$

On peut définir: $\alpha_x = \frac{g^2}{4\pi}$ (dans le cas du potentiel de Coulomb, m_x est nulle, on retrouve alors la constante de structure fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$).

On calcule maintenant l'amplitude de probabilité de diffusion (au premier ordre, échange d'une particule X) de la particule 2 de \vec{q}_i vers \vec{q}_f dans ce potentiel :

$$M_{if}(\vec{q}) = \int d^3r V(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \text{ dans laquelle on a utilisé } \vec{q} = \vec{q}_f - \vec{q}_i .$$

Si on effectue l'intégration en choisissant l'axe z des coordonnées sphériques colinéaire à \vec{q} , on obtient pour le potentiel de Yukawa :

$$\begin{aligned} M_{if}(\vec{q}) &= \frac{-g^2}{4\pi} \int \frac{e^{-r/R}}{r} r^2 \sin\theta e^{i|\vec{q}|r \cos\theta} dr d\theta d\phi = -\frac{g^2}{2} \int e^{-r/R} r \sin\theta e^{i|\vec{q}|r \cos\theta} dr d\theta \\ &= \frac{-g^2}{|q|^2 + m_x^2} \end{aligned}$$

Dans l'approximation de portée nulle, c'est-à-dire $|q|^2 \ll m_x^2$, on aboutit à une constante de couplage G qui porte une dimension :

$$G = \frac{g^2}{m_x^2} = \frac{4\pi\alpha_x}{m_x^2} (\text{MeV}^{-2}).$$

En reprenant la constante de couplage de Fermi et pour un boson intermédiaire de 80 GeV, on obtient

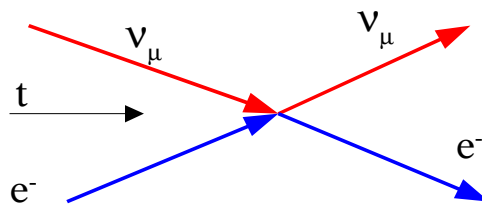
$$\text{finalement : } \alpha_F = \frac{G_F m_x^2}{\sqrt{2} 4\pi} = 4,2 \cdot 10^{-3} = 0,6 \alpha_{em}.$$

On en conclut que l'interaction faible, si on la conçoit comme étant véhiculée par des bosons intermédiaires d'environ 80 GeV, présente une constante de couplage similaire à celle de la force électromagnétique.

3 Vers une théorie unique des interactions électrofaibles

3.1 Courants neutres:

Si on souhaite unifier l'interaction faible et l'électrodynamique dans une même théorie, il est essentiel d'introduire la notion de courants neutres faibles, lesquels interviendraient dans les processus de diffusion tels que : $\nu_\mu e^- \rightarrow \nu_\mu e^-$



Ceux-ci furent découverts en 1973 au CERN ($\bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^-$, $\bar{\nu}_\mu N \rightarrow \bar{\nu}_\mu X$, $\nu_\mu N \rightarrow \nu_\mu X$) quelques années après la publication de la théorie unifiée que nous verrons plus loin. On peut cependant les introduire comme un complément dans la théorie de Fermi en ajoutant au courant leptonique J_α^L les termes suivants :

$$[\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) u_{\nu_\mu}], \quad [\bar{u}_e \gamma_\alpha (g_V - g_A \gamma^5) u_e]$$

Et on peut ainsi calculer que les sections efficaces totales de diffusion de neutrinos muoniques sur des électrons s'expriment par :

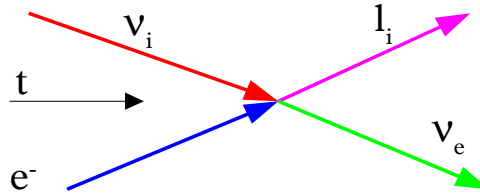
$$\sigma_{\nu/\nu} = \frac{G^2 s}{3\pi} (g_V^2 \pm g_A g_V + g_A^2) \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_{\nu/\nu}}{E_{\nu/\nu}} = \frac{2 G^2 m_e}{3\pi} (g_V^2 \pm g_A g_V + g_A^2) \quad \text{car } s = 2 E_\nu m_e.$$

Expérimentalement, on obtient (en mesurant également d'autres processus faibles dans lesquels les courants neutres agissent) :

$g_V = 0,040 \pm 0,015$, $g_A = -0,507 \pm 0,014$. Ainsi, l'électron a un couplage neutre qui est pratiquement purement axial. Nous verrons que ceci est parfaitement expliqué dans la théorie unifiée alors que dans la théorie de Fermi « étendue », aucune justification n'est fournie.

3.2 Problème avec la borne d'unitarité :

La section efficace totale des processus faibles chargés décrits dans le diagramme ci-dessous peut être calculée dans la théorie de Fermi.



$$\sigma(\nu_i e^- \rightarrow l_i \nu_e) = \frac{G^2}{\pi} s \left(1 - \frac{m_l^2}{s}\right)^2 \text{ pour } i=e, \mu, \tau.$$

Celle-ci croît avec s , tout comme les sections efficaces des processus neutres vus précédemment. En outre, on observe que le lepton chargé est émis de façon isotrope dans le centre de masse, ce qui signifie que seule l'onde S ($J=0$) contribue à la section efficace différentielle. Aux grandes valeurs de s , la section efficace différentielle s'exprime par une somme d'ondes partielles sous la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} \simeq \frac{1}{s} \left| \sum_J (2J+1) P_J(\cos\theta) T^J \right|^2, \text{ où } T^J \text{ est l'élément de matrice de l'opérateur de transition}$$

de l'onde J et P_J est le polynôme de Legendre d'ordre J . On a alors pour les processus ci-dessus :

$$\sigma = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega}(J=0) = \frac{4\pi}{s} |T^0|^2 \leq \frac{4\pi}{s} \text{ car la contrainte d'unitarité stipule que les éléments de}$$

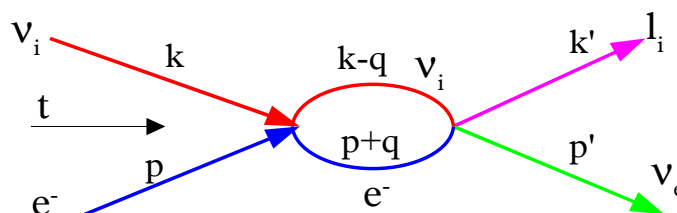
matrice de l'opérateur de transition doivent satisfaire : $|T^J| \leq 1$. La borne d'unitarité implique alors que :

$$\frac{G^2 s}{\pi} \leq \frac{4\pi}{s} \text{ soit } s \leq \frac{2\pi}{G} = (734 \text{ GeV})^2 \text{ soit encore } E_{\nu}^{lab} \leq 5,3 \cdot 10^8 \text{ GeV car } s = 2 m_e E_{\nu}.$$

Au-delà de cette limite, la borne d'unitarité ne peut plus être satisfaite. Bien sûr avant de conclure que la borne d'unitarité est dépassée à très haute énergie, il est nécessaire d'examiner les contributions d'ordres supérieurs dans la théorie. Hélas, nous allons voir maintenant que – dans la théorie de Fermi – celles-ci divergent sans possibilité de renormalisation.

3.3 Divergences dans les contributions d'ordres supérieurs :

Considérons le diagramme du deuxième ordre contribuant à $\nu_i e^- \rightarrow l_i \nu_e$:



Les lignes internes de fermions apportent une contribution à l'élément de matrice de diffusion du type :

$S^{(2)} \propto \int_0^\infty \frac{d^4 q}{(p+q-m_e)(k-q)}$, l'intégration sur q prend en compte toutes les valeurs possibles des transferts de quadri-moments dans la boucle interne. Cette intégrale a la dimension de q^2 , elle diverge quadratiquement. Dans le cas de la théorie de Fermi qui ne possède pas de principe d'invariance de jauge, de telles divergences ne peuvent pas être adoucies par la technique de renormalisation.

Si à la place d'une interaction de contact, nous avons une interaction procédant par échange de bosons massifs, les vertex de diffusion ajouteraient un terme du type : $\left(\frac{g^2}{q^2 - m_x^2}\right)^2$ (au carré car deux vertex) dans notre intégrale qui aurait alors à haut transfert la dimension de q^{-2} et ne divergerait plus.

Hélas, le caractère vectoriel (ou pseudo-vectoriel) des courants faibles requiert un boson de spin 1 qui possède un propagateur du type :

$$D_{\mu\nu}^{(M)} = -\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_x^2}}{q^2 - m_x^2} \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{q_\mu q_\nu}{m_x^2 q^2}.$$

Celui-ci a une valeur pratiquement constante à haut transfert. Notre intégrale diverge à nouveau.

Le propagateur d'un boson vectoriel de masse nulle est différent :

$$D_{\mu\nu}^{(M=0)} = -\frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}}{q^2} \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} \frac{\text{const}}{q^2}$$

, de ce fait l'électrodynamique quantique garde le bon comportement dimensionnel des intégrales de boucle. En revanche celui-ci ne tend pas vers une constante du type const/m^2 à bas transfert.

Dans une théorie de l'interaction faible procédant par échange de bosons intermédiaires vectoriels, la constante de Fermi est remplacée par une constante effective :

$$G_{\text{eff}}(q^2) = g^2 D_{\mu\nu}(q^2).$$

Il faut maintenant construire une théorie qui retiendrait le comportement du propagateur d'un boson massif à bas transfert de moment et celui du photon à haut transfert. En somme, le ou les bosons intermédiaires de l'interaction faible doivent être lourds et de masse nulle à la fois !

Ce dilemme est résolu par le mécanisme de Higgs-Englert et Brout. On introduit dans la théorie des bosons vectoriels sans masse. Ceux-ci sont ensuite couplés à un nouveau champ (champ de Higgs) de spin 0. À bas transfert, ce champ possède une valeur non nulle partout dans l'espace, et le terme d'interaction avec les bosons vectoriels qui en résulte prend la forme d'un terme de masse. À haut transfert, cette valeur moyenne s'annule et les bosons de l'interaction faible retrouvent leur aspect de particules sans masse.

4 La théorie de Glashow, Weinberg et Salam :

4.1 Les bases :

Cette théorie est développée dans le formalisme lagrangien des champs quantiques. Les hypothèses physiques de base sont les suivantes :

- Il existe des courants faibles chargés et neutres;
- les courants chargés ne couplent que les parties de chiralité gauche des fermions;
- les bosons qui véhiculent l'interaction faible doivent être très massifs;
- le photon, médiateur de l'interaction électromagnétique, doit demeurer sans masse .

Pour construire ce modèle, nous introduisons trois bosons de jauge contenus dans un isotriplet faible $A_\mu^i (i=1,2,3)$ et un quatrième boson isoscalaire (ne portant pas d'isospin faible) B_μ . Les fermions sont groupés, pour les parties de chiralité gauche, dans des doublets d'isospin faible :

$$L_e = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}, \quad L_\mu = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_\mu} \\ \psi_\mu \end{pmatrix}, \quad L_\tau = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_\tau} \\ \psi_\tau \end{pmatrix} \text{ pour les leptons ,}$$

$$L_1 = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \begin{pmatrix} \psi_u \\ d' \end{pmatrix}, \quad L_2 = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \begin{pmatrix} \psi_c \\ s' \end{pmatrix}, \quad L_3 = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \begin{pmatrix} \psi_t \\ b' \end{pmatrix} \text{ pour les quarks}$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = M_{CKM} \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_s \\ \psi_b \end{pmatrix}$$

et pour les parties de chiralité droite dans des singlets ,

$$R_e = \frac{(1+\gamma^5)}{2} \psi_e, \quad R_\mu = \frac{(1+\gamma^5)}{2} \psi_\mu, \quad R_\tau = \frac{(1+\gamma^5)}{2} \psi_\tau \text{ pour les leptons}$$

$$R_u = \frac{(1+\gamma^5)}{2} \psi_u, \quad R_c = \frac{(1+\gamma^5)}{2} \psi_c, \quad R_t = \frac{(1+\gamma^5)}{2} \psi_t$$

pour les quarks

$$R_d = \frac{(1+\gamma^5)}{2} d', \quad R_s = \frac{(1+\gamma^5)}{2} s', \quad R_b = \frac{(1+\gamma^5)}{2} b'$$

On peut remarquer l'absence de neutrinos de chiralité droite car ils n'interagissent ni électromagnétiquement, ni faiblement.

4.2 Structure d'isospin des courants faibles et électromagnétique :

En utilisant les relations suivantes : $(1-\gamma^5)^2 = 2(1-\gamma^5)$, $\gamma^\mu(1-\gamma^5) = 2\frac{(1+\gamma^5)}{2}\gamma^\mu\frac{(1-\gamma^5)}{2}$ et

$\bar{L}_e = (\bar{\psi}_{\nu_e}, \bar{\psi}_e)\frac{(1+\gamma^5)}{2}$, on peut montrer que :

$$J_-^{(e)\mu} = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_{\nu_e} = 2\bar{\psi}_e \frac{(1+\gamma^5)}{2} \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_{\nu_e} = 2\bar{L}_e \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} L_e = 2\bar{L}_e \gamma^\mu \hat{T}_- L_e$$

ainsi que :

$$J_+^{(e)\mu} = 2\bar{L}_e \gamma^\mu \hat{T}_+ L_e = (J_-^{(e)\mu})^+, \text{ avec } \hat{T}_\pm = \hat{T}_1 \pm i\hat{T}_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2).$$

Le courant électromagnétique d'un électron peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} J_{EM}^{(e)\mu} &= \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e = \frac{1}{2} \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_e + \frac{1}{2} \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1+\gamma^5) \psi_e \\ &= \bar{\psi}_e \frac{(1+\gamma^5)}{2} \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_e + \bar{\psi}_e \frac{(1-\gamma^5)}{2} \gamma^\mu \frac{(1+\gamma^5)}{2} \psi_e \\ &= \bar{L}_e \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu R_e \\ &= \bar{L}_e \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \hat{T}_3\right) L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu R_e = -\bar{L}_e \gamma^\mu \hat{T}_3 L_e + \frac{1}{2} \bar{L}_e \gamma^\mu L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu R_e \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \hat{T}_3 = \frac{1}{2} \sigma_3.$$

On peut essayer d'arranger ces courants dans un isotriplet : $\bar{L}_e \gamma^\alpha \vec{T} L_e$ qui sera associé à \vec{A}_μ et un courant isoscalaire : $\frac{1}{2} \bar{L}_e \gamma^\mu L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu R_e$ associé à B_μ . Le lagrangien d'interaction s'écrit alors :

$$L_{int}^{(e)} = g \bar{L}_e \gamma^\mu \hat{T} L_e \cdot \vec{A}_\mu - g' \left[\frac{1}{2} \bar{L}_e \gamma^\mu L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu R_e \right] B_\mu.$$

Il y a deux constantes de couplage nouvelles g et g' . Le terme de courant neutre est nouveau. Sa forme exacte n'est pas connue à ce stade. Le signe moins devant g' est significatif. Dans l'expression précédente, $\vec{T} \cdot \vec{A}$ est un produit scalaire dans l'espace d'isospin (espace euclidien nouveau contenant les trois dimensions d'isospin) alors que la sommation sur les indices grecs correspond au produit scalaire dans l'espace de Minkowski.

4.3 Formulation covariante et invariance de jauge locale :

On peut également dériver le terme d'interaction précédent en examinant l'implication de l'invariance de jauge par rapport aux groupes de symétries $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ combinés pour former : $SU(2)_L \times U(1)_Y$. On demande que les densités lagrangiennes représentant les termes d'énergie cinétique d'un électron et d'un neutrino libres (sans masse) soient invariantes sous les transformations de jauge locales suivantes :

$$L_e = \frac{(1-\gamma^5)}{2} \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}_L \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}'_L = \exp(i\vec{\alpha}(x) \cdot \hat{T}) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_e} \\ \psi_e \end{pmatrix}_L$$

$$\begin{pmatrix} \psi_e \end{pmatrix}_R \rightarrow \begin{pmatrix} \psi_e \end{pmatrix}'_R = \exp(i\beta(x) \cdot \hat{Y}) \begin{pmatrix} \psi_e \end{pmatrix}_R$$

Le terme d'énergie cinétique de la densité lagrangienne est :

$$\bar{L}_e \gamma^\mu i \partial_\mu L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu i \partial_\mu R_e.$$

Son invariance sous SU(2)_L x U(1)_Y n'est possible que si on remplace ∂_μ par la dérivée covariante :

$$D_\mu = \partial_\mu - i g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu.$$

Il découle également de cette invariance « imposée » que l'isospin faible (T) et l'hypercharge faible (Y) sont des nombres quantiques conservés.

On obtient alors une nouvelle densité lagrangienne qui décrit l'interaction des électrons et des neutrinos avec les champs de jauge :

$$L'_{int} = \bar{L}_e \gamma^\mu i D_\mu L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu i D_\mu R_e - \frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu},$$

dans laquelle les deux derniers termes représentent l'énergie cinétique des bosons. En remplaçant la dérivée covariante par son expression ci-dessus, on aboutit à :

$$L'_{int} = \bar{L}_e \gamma^\mu i [\partial_\mu - i g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu] L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu i [\partial_\mu - i g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu] R_e - \frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu}$$

que l'on peut identifier à ce qui avait été trouvé auparavant à condition de satisfaire la relation (proposée par S.L. Glashow) :

$$Q = (T_3 + \frac{1}{2} Y), \quad (\text{cette relation est similaire à la relation de Gell-Mann Nishijima})$$

et en se souvenant que les singlets ont un isospin nul. Le tableau de ces nouveaux nombres quantiques est le suivant :

Fermion	T	T₃	Y	Q
ν_l	1/2	1/2	-1	0
l_L	1/2	-1/2	-1	-1
l_R	0	0	-2	-1
H_L	1/2	1/2	1/3	2/3
B_L	1/2	-1/2	1/3	-1/3
H_R	0	0	4/3	2/3
B_R	0	0	-2/3	-1/3

Dans lequel H (B) représente un quark ayant une projection d'isospin 1/2 (-1/2). Il faut noter que dans

cette formulation, les interactions faibles et électromagnétiques sont à haute énergie des interactions d'isospin et d'hypercharge faibles.

4.4 L'unification :

Cependant, le photon réel ne se couple pas au courant isoscalaire mais au courant électromagnétique. C'est un mélange de B_μ et de A_μ^3 (voir la décomposition du courant EM trouvée précédemment) :

$$A_\mu = \cos \theta_w B_\mu + \sin \theta_w A_\mu^3, \text{ photon réel}$$

et sa combinaison orthogonale que l'on associe au boson neutre faible :

$$Z_\mu = -\sin \theta_w B_\mu + \cos \theta_w A_\mu^3, \text{ où } \theta_w \text{ est appelé l'angle de Weinberg .}$$

D'autre part, on identifie les bosons faibles chargés (les bosons de jauge ne sont pas chargés) de la façon suivante :

$$W^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp i A_\mu^2),$$

ce qui permet finalement de réécrire le lagrangien d'interaction sous la forme compacte :

$$L_{int}^{(e)} = \frac{g}{2\sqrt{2}} (J_-^{(e)\mu} W_\mu^- + J_+^{(e)\mu} W_\mu^+ + J_0^{(e)\mu} Z_\mu^0) - e J_{EM}^{(e)\mu} A_\mu,$$

avec :

$$\begin{aligned} J_-^{(e)\mu} &= 2 \bar{L}_e \gamma^\mu \hat{T}_- L_e, \quad J_+^{(e)\mu} = 2 \bar{L}_e \gamma^\mu \hat{T}_+ L_e \\ J_0^{(e)\mu} &= 2\sqrt{2} [\cos \theta_w \bar{L}_e \gamma^\mu \hat{T}_3 L_e + \frac{g'}{g} \sin \theta_w (\frac{1}{2} \bar{L}_e \gamma^\mu L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu R_e)] \\ -e J_{EM}^{(e)\mu} &= -e [\bar{L}_e \gamma^\mu (\frac{1}{2} - \hat{T}_3) L_e + \bar{R}_e \gamma^\mu R_e] \\ &= -[\bar{L}_e \gamma^\mu (\frac{g' \cos \theta_w}{2} - g \sin \theta_w \hat{T}_3) L_e + g' \cos \theta_w \bar{R}_e \gamma^\mu R_e] \end{aligned}$$

À partir de l'expression du courant électromagnétique, on dérive les relations suivantes entre les diverses constantes de couplage :

$$e = g \sin \theta_w = g' \cos \theta_w ; \quad \tan \theta_w = \frac{g'}{g} ; \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} ; \quad \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} ; \quad \frac{1}{e^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2}$$

Exprimé en fonction des champs du neutrino et de l'électron, le courant neutre s'écrit sous la forme :

$$J_0^{(e)\mu} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \theta} [\bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} - \bar{\psi}_e \gamma^\mu (g'_{\nu} - g'_A \gamma^5) \psi_e], \text{ avec la prédiction que :}$$

$$g'_A = 1 \text{ et } g'_{\nu} = 1 - 4 \sin^2 \theta_w.$$

Or nous avons vu que de la valeur mesurée dans les processus neutres faibles, on déduisait que g'_{ν} devait être voisin de 0, ce qui implique que : $\sin^2 \theta_w \simeq 0,25$ d'où $\cos \theta_w \simeq 1$ et on retrouve $g_A \simeq -0,5$.

Une valeur mesurée plus précise de l'angle de Weinberg est : $\sin^2 \theta_w = 0,23149(15)$.

4.5 Non invariance de jauge des termes de masses directs :

Fermions élémentaires :

Le terme de masse qui entre dans l'expression de la densité lagrangienne d'un champ massif de spin 1/2 est : $m \bar{\Psi} \Psi$. Si on veut juger de l'invariance sous une transformation du groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ de ce terme de masse, on doit faire apparaître les champs chiraux :

$$m \bar{\Psi} \Psi = m \bar{\Psi} \left[\frac{1-\gamma^5}{2} + \frac{1+\gamma^5}{2} \right] \Psi = m \bar{\Psi} \left[\left(\frac{1-\gamma^5}{2} \right)^2 + \left(\frac{1+\gamma^5}{2} \right)^2 \right] \Psi = m (\bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R) \text{ avec ,}$$

$$\Psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2} \Psi, \quad \Psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2} \Psi$$

Puisque Ψ_L et Ψ_R ne portent pas les mêmes nombres quantiques d'isospin et d'hypercharge, ils ne se transforment pas de la même manière dans une opération du groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Le terme de masse d'un champ fermionique massif n'est donc pas un invariant de jauge. On ne peut pas l'ajouter dans le lagrangien de la théorie sans briser directement notre invariance de jauge. Cette démarche conduirait à de sévères difficultés vis à vis de la renormalisabilité de la théorie.

Bosons de jauge :

Pour donner une masse aux bosons faibles (de spin 1), il serait nécessaire d'introduire des termes de la forme suivante : $\frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu$. Or des termes de cette sorte ne sont pas invariants sous une transformation de jauge locale.

Cela peut se voir en examinant, pour simplifier, le cas d'un « photon massif » dans une théorie de jauge locale du groupe $U(1)$. Sous une opération de ce groupe, le champ A^μ qui décrit le photon se transforme selon :

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \theta(x),$$

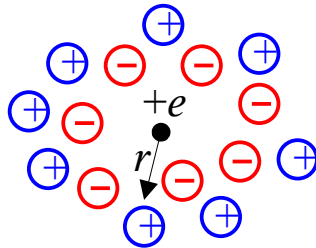
où $\theta(x)$ est la fonction de jauge qui apparaît dans l'opérateur associé $\hat{U} = e^{iq\theta(x)}$ (q étant la charge électrique de la particule qui se couple au photon ; dérivée covariante : $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$). On peut montrer que : $\frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu \neq \frac{1}{2} m^2 A'^\mu A'_\mu$.

En peut donner une explication physique au fait qu'une invariance de jauge locale impose que le champ de jauge ait une masse nulle. Une invariance de jauge locale sous-tend l'existence d'un nombre quantique conservé : la charge dans le cas de l'électrodynamique. Par une transformation de jauge locale on peut se permettre de redéfinir localement et arbitrairement la charge d'une particule. Afin que cela ne viole pas la conservation de la charge globalement dans l'espace, il est nécessaire qu'un messenger puisse transmettre cette redéfinition (ce changement local de l'échelle de mesure de la charge) vers tout point de l'espace où une information sur la charge de la particule pourrait être utile. C'est le rôle du champ de jauge, qui doit être de masse nulle, afin que les médiateurs qui en résultent, puissent être échangés sur une portée infinie (conservation de la charge dans tout l'espace euclidien).

En conclusion, il est impossible de décrire directement dans la théorie de Glashow-Weinberg-Salam des particules massives. Puisque nous savons que les fermions (quarks, leptons) ainsi que les bosons de l'interaction faible (à faible transfert de quadri-moment) sont massifs, il a bien fallu trouver une méthode indirecte pour «générer» de façon dynamique les masses de ces particules. Ceci fait appel au mécanisme

de Higgs-Englert et Brout que nous allons décrire ci-dessous après avoir donné un exemple classique, l'effet Debye, d'un photon qui acquiert en apparence une masse, induite par la polarisation d'un milieu en présence d'une charge .

4.6 Effet Debye :



Considérons une charge ponctuelle e plongée dans une électrolyte. Nous allons déterminer le potentiel électrostatique $\phi(r)$ au voisinage de cette charge .

Les densités d'ions positifs et négatifs sont données par la distribution de Boltzmann :

$$n_+ = n_0 e^{-\frac{e\phi(r)}{k_B T}} \text{ et } n_- = n_0 e^{+\frac{e\phi(r)}{k_B T}} ,$$

où n_0 est la densité à l'équilibre des charges dans l'électrolyte (à grand r) .

À partir de l'équation de Poisson, on peut tirer une deuxième relation liant les densités d'ions au potentiel électrostatique $\phi(r)$:

$$\nabla^2 \phi(r) = -4\pi e (n_+(r) - n_-(r)) - 4\pi e \delta^3(r) = 8\pi e n_0 \sinh\left(\frac{e\phi(r)}{k_B T}\right) - 4\pi e \delta^3(r) .$$

Pour une distance r suffisamment grande, le potentiel électrostatique est très faible et l'équation précédente peut se simplifier sous la forme suivante :

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{8\pi e^2 n_0}{k_B T} \phi(r) ,$$

soit encore :

$$(\nabla^2 \phi(r) - \mu^2) \phi(r) = 0 \text{ avec } \mu^2 = \frac{8\pi e^2 n_0}{k_B T} ,$$

qui admet pour solution :

$$\phi(r) = \frac{e}{r} \exp(-\mu r) .$$

Ainsi l'électrolyte « écran » la charge qui produit le champ ϕ . L'équation précédente décrit formellement le potentiel dû à un champ massif (voir 2.4). Par le biais de leur interaction avec les ions contenus dans l'électrolyte, les photons acquièrent une masse ou encore une portée finie. Ce comportement est observé à basse fréquence (faible moment transféré) dans la limite statique. À haute fréquence (haut moment transféré), la mobilité réduite des ions ne leur permet plus de se déplacer d'une

alternance à l'autre. L'effet d'écrantage de la charge $+e$ disparaît et les photons redeviennent des particules de masse nulle.

4.7 Le mécanisme de Higgs-Englert et Brout : brisure spontanée de la symétrie SU(2) X U(1)

Toutes les particules auxquelles on doit attribuer une masse (fermions, bosons de l'interaction faible) vont être couplées à de nouveaux champs élémentaires, appelés champs de Higgs, sans spin qui joueront un rôle similaire à celui d'une population d'ions dans l'effet Debye. Ces champs seront la source d'un potentiel astucieusement choisi pour être minimal dans le vide à une valeur non nulle du champ de Higgs. En d'autres termes, le champ de Higgs développera une valeur non nulle dans le vide. Dans ces conditions, les termes d'interaction entre les champs de Higgs et les particules massives prendront l'allure de masses induites.

Afin d'obtenir une interaction entre les champs de Higgs et les particules déjà existantes, il est naturel et simple d'attribuer un isospin faible et une hypercharge à ces nouveaux champs. Le choix minimal qui peut être fait est un isodoublet (un singlet ne porte pas d'isospin faible), dont l'un des membres devra être de charge électrique nulle afin de ne pas se coupler au photon qui doit demeurer sans masse.

On introduit un nouvel isodoublet de champs complexes (car les particules sont différentes des antiparticules du fait que l'une de ces particules est nécessairement électriquement chargée) sans spin :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}, |\Phi|^2 = |\Phi^+|^2 + |\Phi^0|^2, T = 1/2 \text{ et } Y = 1 \text{ (tirés de la relation de Glashow)}.$$

Quatre degrés de liberté (deux par champ) sont introduits dans la théorie.

Si le champ de Higgs du bas est de charge nulle, celui du haut possède une charge positive afin de respecter l'ordre habituel de T_3 dans un isodoublet. Cet isodoublet introduit deux nouveaux termes dans le lagrangien :

- le terme habituel d'énergie cinétique dans lequel on doit faire appel à la dérivée covariante pour

respecter l'invariance de jauge : $|D_\mu \Phi|^2 = |(\partial_\mu - i g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu) \Phi|^2$

- un nouveau terme d'énergie potentiel d'auto interaction : $U(\Phi) = -\mu^2 |\Phi|^2 + h |\Phi|^4$ avec $\mu^2 > 0$

La composante neutre du champ de Higgs ne se couple pas au photon. Cela est montré dans ce qui suit :

$$\left(g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu + \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu \right) \Phi = \left(g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu + \frac{g'}{2} B_\mu \right) \Phi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g A_\mu^3 + g' B_\mu & g(A_\mu^1 - i A_\mu^2) \\ g(A_\mu^1 + i A_\mu^2) & -g A_\mu^3 + g' B_\mu \end{pmatrix} \Phi,$$

dans laquelle si on utilise les relations reliant les champs de jauge aux champs vectoriels physiques et la charge électrique de l'électron aux constantes g et g' , on obtient :

$$\left(g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu + \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu \right) \Phi = \begin{pmatrix} e A_\mu + \frac{g \cos 2\theta_w}{2 \cos \theta_w} Z_\mu & g \sqrt{2} W_\mu^+ \\ g \sqrt{2} W_\mu^- & -\frac{g}{2 \cos \theta_w} Z_\mu \end{pmatrix} \Phi, \text{ où } A_\mu \text{ est le champ du photon.}$$

C'est cela qui justifie le mieux le choix d'un isodoublet de champs de Higgs avec $Y=1$.

Par une rotation dans l'espace d'isospin, on peut toujours s'arranger pour que la composante supérieure du doublet de Higgs s'annule. On peut en effet écrire Φ sous la forme suivante :

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda + \chi(x)) e^{i \vec{\theta}(x) \cdot \hat{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dans laquelle les champs $\vec{\theta}(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x))$ et $\chi(x)$ sont réels (respect des quatre degrés de liberté initiaux).

Le terme exponentiel n'est pas autre chose qu'une transformation du groupe SU(2), sous laquelle le lagrangien reste invariant. On peut donc l'éliminer en appliquant une transformation de jauge (appelée jauge unitaire) sans altérer le contenu physique de la théorie :

$$\Phi \xrightarrow{\text{jauge unitaire}} \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda + \chi(x) \end{pmatrix}.$$

C'est l'invariance de jauge locale qui permet de faire disparaître les trois champs additionnels $\theta_i(x)$, appelés bosons de Goldstone. Si la théorie était construite à partir d'une invariance de jauge globale (phases constantes dans l'espace de Minkowski), cela ne serait pas possible, les bosons de Goldstone resteraient dans la théorie. Ces trois champs deviennent en fait les degrés de libertés longitudinaux des bosons W et Z.

La valeur moyenne du champs de Higgs (un opérateur) dans le vide (c'est-à-dire en l'absence de toute particule) est fixée en exigeant que l'énergie potentiel induite soit minimale :

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\lambda + \langle 0 | \chi(x) | 0 \rangle \right) = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } \chi(x) \text{ représente les fluctuations quantiques autour}$$

de λ . Ou encore : $\Phi = \Phi_{\text{vide}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\chi(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ avec $\Phi_{\text{vide}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient alors :

$$\langle 0 | U(\Phi_{\text{vide}}) | 0 \rangle = -\mu^2 |\Phi_{\text{vide}}|^2 + h |\Phi_{\text{vide}}|^4 = -\frac{\mu^2}{2} \lambda^2 + \frac{h}{4} \lambda^4 \equiv V(\lambda), \text{ qui possède un minimum instable à}$$

$\lambda = 0$ et un autre minimum négatif situé à : $\lambda^2 = \frac{\mu^2}{h}$ correspondant à une valeur moyenne du champ

de Higgs non-nulle et constante en tout point dans le vide : $\Phi_{\text{vide}} = \frac{\mu}{\sqrt{2} h} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette valeur est préférée

par notre univers car elle permet de minimiser l'énergie totale du système. Cependant, Φ_{vide} n'est pas invariant sous une transformation de jauge car :

$$\Phi'_{\text{vide}} \neq e^{i \vec{\alpha} \cdot \hat{T} + i \beta \cdot \hat{Y}} \Phi_{\text{vide}}.$$

En faisant le choix d'un vide non-nul particulier, le système (notre univers) brise spontanément la symétrie locale SU(2)_L X U(1). Remarquez que la solution $\Phi_{\text{vide}} = 0$ est invariante de jauge. Cette situation est équivalente à une transition de phase (exemples cristallisation, flambage d'une barre métallique, ferromagnétisme). Notez que Φ'_{vide} conduit à la même valeur moyenne du potentiel dans le

vide qui ne dépend que de $|\Phi_{vide}|^2$.

Cependant, du fait que l'on a $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$, qui est nulle pour la composante basse de Φ , on constate que le vide (après transition de phase) est invariant sous toute transformation du sous groupe suivant :

$$\Phi'_{vide} = e^{i\alpha(x)(\hat{T}_3 + \frac{\hat{Y}}{2})} \Phi_{vide} = \Phi_{vide}$$

Les transformations de ce type correspondent au sous-groupe U(1) de SU(2) X U(1). Le système reste totalement invariant sous la symétrie locale U(1) ce qui implique que le photon n'acquiert pas de masse. On garde la validité de l'électrodynamique quantique.

Le champ scalaire réel (particule=antiparticule, pas de nombre quantique additif) $\chi(x)$ qui demeure est appelé le boson de Higgs. Il est observable, c'est-à-dire qu'on peut le créer et observer ses désintégrations. Ses nombres quantiques sont : $J^{PC} = 0^{++}$.

À ce stade de la théorie, les fermions ne sont pas couplés au doublet de Higgs, et ils demeurent ainsi sans masse. Pour générer de la masse aux fermions (aux leptons dans ce cas), on introduit un terme d'interaction supplémentaire (invariant de jauge) appelé couplage de Yukawa :

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} f_l (\bar{R}_l \Phi^+ L_l + \bar{L}_l \Phi R_l) &= -f_l [\overline{\psi_{lR}} (0, \chi(x) + \lambda) \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l} \\ \psi_{lL} \end{pmatrix} + (\overline{\psi_{\nu_l L}}, \overline{\psi_{lL}}) \begin{pmatrix} 0 \\ \chi(x) + \lambda \end{pmatrix} \psi_{lR}] \\ &= -f_l (\lambda + \chi(x)) \overline{\psi}_l \psi_l \end{aligned}$$

Le couplage de deux doublets conduit à un isoscalaire invariant sous SU(2). Le couplage de R à cet isoscalaire construit un terme invariant sous U(1). Les couplages de Yukawa sont donc invariants sous SU(2) X U(1). À noter également que ces termes d'interaction ne violent pas la parité alors qu'à la base il s'agit bien d'une interaction d'isospin et d'hypercharge faibles !

On peut identifier la masse du lepton l à $m_l = f_l \lambda$. On remarque également que les leptons

interagissent avec le boson de Higgs avec une constante de couplage proportionnelle à leur masse : $\frac{m_l}{\lambda}$.

4.8 Lagrangien complet des interactions électrofaibles :

Pour construire le lagrangien final , il ne nous reste plus qu'à rassembler les différents termes que nous avons introduits jusqu'alors en ajoutant les quarks et leurs termes d'interaction électrofaible :

$$\begin{aligned}
 L_{\text{tot}} = & \sum_l \bar{L}_l \gamma^\mu i [\partial_\mu - i g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu] L_l \quad \text{énergie cinétique + couplage aux champs de jauge} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{des doublets gauches des fermions} \\
 + & \sum_l \bar{R}_l \gamma^\mu i [\partial_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu] R_l \quad \text{énergie cinétique + couplage au champ de jauge d'hypercharge} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{des singlets droits de fermions} \\
 - & \frac{1}{4} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} \cdot B^{\mu\nu} \quad \text{énergie cinétique des champs de jauge} \\
 + & |(\partial_\mu - i g \hat{T} \cdot \vec{A}_\mu - i \frac{g'}{2} \hat{Y} B_\mu) \Phi|^2 \quad \text{énergie cinétique + couplage aux champs de jauge du doublet de Higgs} \\
 - & \sum_l \sqrt{2} f_l (\bar{R}_l \Phi^+ L_l + \bar{L}_l \Phi R_l) \quad \text{couplage de Yukawa des fermions de } T_3 = -1/2 \text{ au doublet de Higgs} \\
 - & \sum_l \sqrt{2} f_l (\bar{R}_l \Phi^c L_l + \bar{L}_l \Phi^c R_l) \quad \text{couplage de Yukawa des quarks de } T_3 = 1/2 \text{ au doublet de Higgs} \\
 - & \mu^2 |\Phi|^2 + h |\Phi|^4 \quad \text{potentiel induit par les champs de Higgs qui permet de briser l'invariance de jauge}
 \end{aligned}$$

Pour finir, il faut remplacer les champs de jauge par les champs physiques des bosons faibles et le champ du photon, tenir compte de la valeur particulière du doublet de Higgs après brisure spontanée de la symétrie SU(2) X U(1) (dans la jauge unitaire) et développer tous les produits matriciels d'isospin pour faire apparaître les termes d'interaction entre particules individuelles. Le calcul est assez long ! Au final on obtient :

$$L_{\text{tot}} = L_{CL} + L_{3B} + L_{4B} + L_H + \sum_l L_{LB,l} \quad \text{avec :}$$

- Pour les champs libres :

$$\begin{aligned}
 L_{CL} = & -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{\mu\nu} + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\
 & -\frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \\
 & -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} \\
 & + \sum_l \bar{\psi}_{\nu_l} i \gamma^\mu \partial_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} \psi_{\nu_l} + \sum_{l'} \bar{\psi}_{l'} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m_{l'}) \psi_{l'}
 \end{aligned}$$

dans laquelle :

- $X_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu$

- $M_W = \frac{g \lambda}{2} = \frac{e}{2 \sin \theta_w \sqrt{G \sqrt{2}}} \approx \left(\frac{e^2}{\sqrt{2} G} \right)^{1/2} \approx 79 \text{ GeV}$, $M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_w} \approx 91 \text{ GeV}$, $m_l = f_l \lambda$

- $\lambda = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2} G}} = 246 \text{ GeV}$

- Pour les couplages tri-vectoriels :

$$L_{3B} = ig \cos \theta_w [W_{\mu\nu}^- W^{+\mu} Z^\nu - W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} Z^\nu] - ie W_{\mu\nu}^- W^{+\mu} A^\nu + ie W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} A^\nu + ig \cos \theta_w Z_{\mu\nu} W^{+\mu} W^\nu - ie A_{\mu\nu} W^{+\mu} W^\nu$$

avec :

$$\bullet \quad e = g \sin \theta_w, \quad \frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

- Pour les couplages quadri-vectoriels :

$$L_{4B} = -g^2 \cos^2 \theta_w [W^{+\mu} W_\mu^- Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ W_\nu^- Z^\mu Z^\nu] - e^2 [W^{+\mu} W_\mu^- A_\nu A^\nu - W_\mu^+ W_\nu^- A^\mu A^\nu] + eg \cos \theta_w [2 W^{+\mu} W_\mu^- Z_\nu A^\nu - W_\mu^+ W_\nu^- Z^\mu A^\nu - W_\mu^+ W_\nu^- Z^\nu A^\mu] + g^2 [W^{+\mu} W_\mu^- W^{+\nu} W_\nu^- - W^\mu W_\mu^- W^{+\nu} W_\nu^+]$$

- Pour les termes d'interaction entre leptons et bosons :

$$L_{LB,l} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{l=e,\mu,\tau} [\bar{\psi}_l \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_{\nu_l} W_\mu^- + \bar{\psi}_{\nu_l} \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_l W_\mu^+] + \frac{g}{2\sqrt{2}} \sum_{q=u,c,t} \sum_{q'=d,s,b} V_{qq'} [\bar{\psi}_q \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_{q'} W_\mu^- + \bar{\psi}_{q'} \gamma^\mu (1-\gamma^5) \psi_q W_\mu^+] + \frac{g}{2\cos\theta} \sum_k [\bar{\psi}_k \gamma^\mu (T_3 - 2Q_k \sin^2 \theta_w - T_3 \gamma^5) \psi_k] Z_\mu + e \sum_k Q_k \bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_k A_\mu$$

où : Q_k est le nombre de charge

- Pour le domaine de Higgs :

$$L_H = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - h \lambda^2 \chi^2 + \frac{1}{4} g^2 [W^{+\mu} W_\mu^- + \frac{Z_\mu Z^\mu}{2\cos\theta_w}] (2\lambda \chi + \chi^2) - h \chi^2 (\lambda \chi + \frac{1}{4} \chi^2) - \sum_l f_l \bar{\psi}_l \psi_l \chi$$

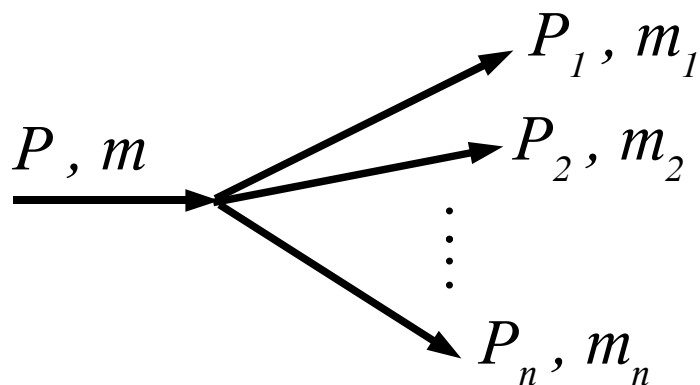
dans lequel il apparaît que le boson de Higgs a une masse : $m_\chi = \sqrt{h} \lambda$ qui n'est pas prédite par la théorie car il n'existe pas de contrainte forte sur h . Le boson de Higgs se couple à toutes les particules massives, y compris à lui-même. À ce jour, il n'a toujours pas été découvert. S'il existe, il doit satisfaire : $m_h \geq 115$ GeV (limite du LEP), dans la version dite minimale de la théorie.

5 Règles de Feynman dans la théorie GWS :

Ces règles permettent de déduire rapidement l'expression d'un élément de matrice invariant correspondant à un graphe de Feynman donné.

5.1 Taux de décroissance d'une particule :

Possédant une masse m et portant un quadri-vecteur P , selon le diagramme suivant :



Le taux de décroissance de cette particule est donné par :

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2m} |M_{fi}|^2 d\Phi_n(P; P_1, P_2 \dots P_n) \quad , \text{ où}$$

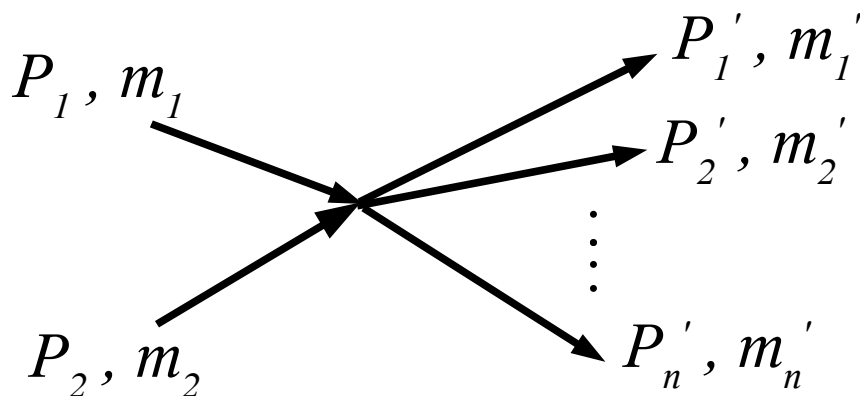
$d\Phi_n$ est le terme d'espace de phase à n corps de la voie de sortie qui correspond à :

$$d\Phi_n(P; P_1, P_2 \dots P_n) = \delta^4(P - \sum_{i=1}^n P_i) \prod_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2P_i^0} \quad ,$$

et, M_{fi} est l'élément de matrice invariant de la transition.

5.2 Diffusion à deux corps dans la voie d'entrée :

De deux particules de masses m_1 et m_2 , portant des quadri-vecteurs P_1 et P_2 , selon le diagramme suivant :



La section efficace différentielle de ce processus est donnée par :

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |M_{fi}|^2}{4\sqrt{(P_1 \cdot P_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \times d\Phi_n((P_1+P_2); P'_1, P'_2 \dots P'_n)$$

5.3 Règles :

Dans un diagramme de Feynman, les lignes externes représentent les vecteurs d'états des particules entrantes ou sortantes, les lignes internes correspondent aux particules virtuelles ou leurs propagateurs et les vertex sont les couplages d'interaction.

Lignes externes :

- spin 0 : 1 ;
- spin $\frac{1}{2}$: $u(P, s)$ ou $v(P, s)$ selon qu'il s'agit d'une particule ou d'une antiparticule ;
- spin 1 : $\epsilon_\mu(P, \lambda)$ avec $\epsilon^2 = -1$ et $\epsilon \cdot P = 0$ si $m=0$ (λ est l'hélicité).

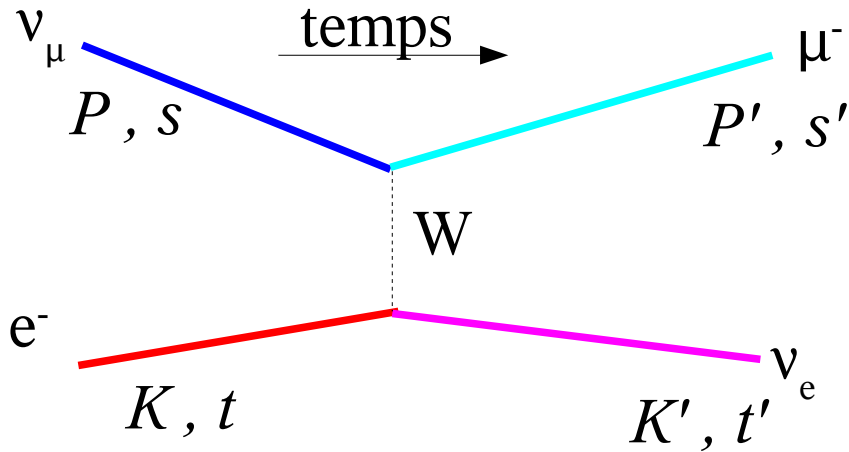
Lignes internes :

- spin 0 : $i \Delta(P) = i (P^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1}$;
- spin $\frac{1}{2}$: $i S(P) = i (\not{P} + m) \Delta(P) = i (\not{P} - m + i\epsilon)^{-1}$;
- spin 1 :
 - $m=0$, $i D_{\mu\nu} = -i \left(g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{P^2} \right) (P^2 + i\epsilon)^{-1}$;
 - $m \neq 0$, $i D_{\mu\nu} = -i \left(g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{m^2} \right) \Delta(P)$

Vertex : d'interaction entre une particule de Dirac et des bosons de spins 0 ou 1 couplés par une constante g ,

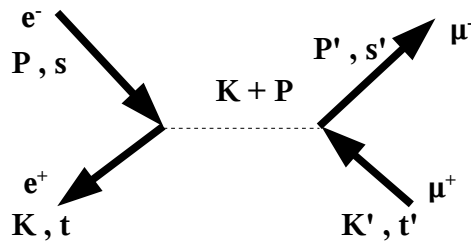
- boson scalaire : $-i g$;
- boson pseudo-scalaire : $g \gamma_5$;
- boson vectoriel : $-i g \gamma^\mu$;
- boson pseudo-vectoriel : $ig \gamma^\mu \gamma_5$.

Exemple :



$$\begin{aligned}
 M_{fi} &= I_\mu \times \text{propagateur du W} \times I_e \\
 &= \bar{u}_\mu(P', s') \left(-i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right) u_{\nu_\mu}(P, s) \times \left(-i \left(g_{\mu\nu} - \frac{(P-P')_\mu (P-P')_\nu}{m_W^2} \right) \Delta(P-P') \right) \\
 &\quad \times \bar{u}_{\nu_e}(K', t') \left(-i \frac{g}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \right) u_e(K, t)
 \end{aligned}$$

6 $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$:

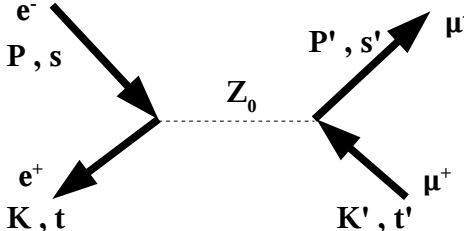


Par l'interaction électrofaible et à l'ordre le plus bas des perturbations, cette diffusion peut se réaliser à travers trois processus :

Échange d'un photon :

$$\begin{aligned}
 M_\gamma &= \bar{v}_e(K, t) (-ie \gamma^\mu) u_e(P, s) \times \left(-i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{(K+P)^2}}{(K+P)^2} \right) \\
 &\quad \times \bar{u}_\mu(P', t') (-ie \gamma^\nu) v_\mu(K', t')
 \end{aligned}$$

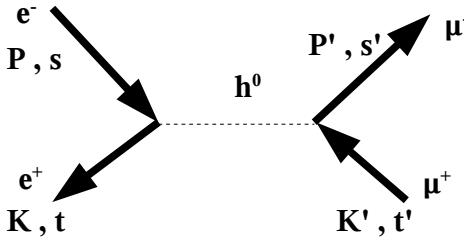
Échange d'un Z_0 :



$$M_Z = \bar{v}_e(K, t) \left(-i \frac{g}{4 \cos \theta_w} \gamma^\mu (g'_V - \gamma_5) \right) u_e(P, s) \times \left(-i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{m_Z^2}}{(K+P)^2 - m_Z^2} \right) \times \bar{u}_\mu(P', t') \left(-i \frac{g}{4 \cos \theta_w} \gamma^\nu (g'_V - \gamma_5) \right) v_\mu(K', t')$$

avec $g'_V = 1 - 4 \sin^2 \theta_w$

Échange d'un boson de Higgs :



$$M_h = \bar{v}_e(K, t) \left(i \frac{m_e}{\lambda} \right) u_e(P, s) \times \left(i \frac{1}{(K+P)^2 - m_{h^0}^2} \right) \times \bar{u}_\mu(P', t') \left(i \frac{m_\mu}{\lambda} \right) v_\mu(K', t')$$

On peut comparer grossièrement ces amplitudes de diffusion on ne retenant que les ordres de grandeur des constantes de couplage :

$$M_y \sim e^2 \sim g^2 \sin^2 \theta_w ; \quad M_Z \sim g^2 \cos^2 \theta ; \quad , M_h \sim \frac{m_e m_\mu}{\lambda^2} \sim g^2 \frac{m_e m_\mu}{4 m_w^2} \sim 10^{-8} g^2 .$$

On constate que l'échange d'un boson de Higgs est totalement négligeable, alors que les deux autres processus ont des amplitudes comparables au voisinage du pôle du Z : $(P+K)^2 \simeq m_Z^2$.

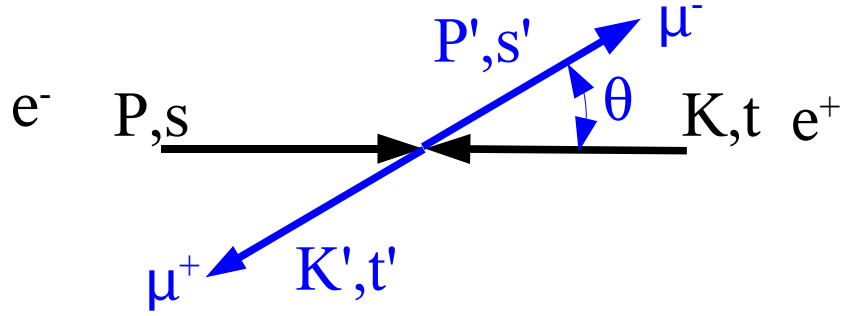
On remarque que dans le centre de masse de la collision (qui sur un collisionneur est également le repère du laboratoire), on a :

$$P_0 = K_0, \vec{P} = -\vec{K} \text{ et } P'_0 = K'_0, \vec{P}' = -\vec{K}' ,$$

la section efficace différentielle est donnée par :

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |M_y + M_Z|^2}{4 \sqrt{(K.P)^2 - m_e^4}} \frac{d\vec{P}'}{(2\pi)^3 2P'^0} \frac{d\vec{K}'}{(2\pi)^3 2K'^0} \delta^4(K+P-K'-P')$$

On peut montrer que : $(K.P)^2 - m_e^4 = 4 |\vec{P}|^2 (P^0)^2$. Par ailleurs, si on mesure la distribution angulaire des muons, dans la voie de sortie selon le diagramme suivant :



, en utilisant des faisceaux incidents non polarisés (moyenne sur les états de spins de la voie d'entrée) et sans mesurer les spins dans la voie de sortie (somme sur les états de spins de la voie de sortie), on obtient

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{32P^0|\vec{P}|} \frac{1}{4} \sum_{s,t,s',t'} \int_0^\infty \frac{|\vec{P}'|^2 d|\vec{P}'|}{(2\pi)^3 P'^0} \int \frac{d\vec{K}'}{(2\pi)^3 K'^0} \delta^4(K+P-K'-P') |M_y + M_z|^2$$

Le calcul de l'élément de matrice se développe de la façon suivante :

$$|M_y + M_z|^2 = (M_y + M_z)(M_y + M_z)^+ = M_y M_y^+ + M_y M_z^+ + M_z M_y^+ + M_z M_z^+$$

$$M_y M_y^+ = (e^2 v_e \gamma^\mu u_e \frac{(g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{s})}{s} \bar{u}_\mu \gamma^\nu v_\mu) \times (e^2 \bar{v}_e \gamma^\alpha u_e \frac{(g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{s})}{s} \bar{u}_\mu \gamma^\beta v_\mu)^+$$

avec $s = (K+P)^2$

$$\begin{aligned} M_y M_y^+ &= \frac{e^4}{s^2} (v_e \gamma^\mu u_e (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{s}) \bar{u}_\mu \gamma^\nu v_\mu) (v_\mu \gamma^\beta u_\mu (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{s}) \bar{u}_e \gamma^\alpha v_e) \\ &= \frac{e^4}{s^2} (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{s}) (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{s}) \\ &\quad \times ((v_e)_\pi (\gamma^\mu)_{\pi\rho} (u_e)_\rho (\bar{u}_\mu)_{\pi'} (\gamma^\nu)_{\pi'\rho'} (v_\mu)_{\rho'} (v_\mu)_i (\gamma^\beta)_{ij} (u_\mu)_j (\bar{u}_e)_{i'} (\gamma^\alpha)_{i'j'} (v_e)_{j'}) \\ &= \frac{e^4}{s^2} (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{s}) (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{s}) \\ &\quad \times [(v_e)_{j'} (v_e)_\pi (\gamma^\mu)_{\pi\rho} (u_e)_\rho (\bar{u}_e)_{i'} (\gamma^\alpha)_{i'j'}] [(u_\mu)_j (\bar{u}_\mu)_{\pi'} (\gamma^\nu)_{\pi'\rho'} (v_\mu)_{\rho'} (v_\mu)_i (\gamma^\beta)_{ij}] \end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes :

$$\sum_s (u(\vec{k}, s))_i (\bar{u}(\vec{k}, s))_j = (\not{k} + m)_{ij} \text{ et } \sum_s (v(\vec{k}, s))_i (\bar{v}(\vec{k}, s))_j = (\not{k} - m)_{ij}, \text{ on obtient :}$$

$$\sum_{s,t,s',t'} M_y M_y^+ = \frac{e^4}{s^2} (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{s}) (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{s}) \times [(\not{K} - m_e)_{j'\pi} (\gamma^\mu)_{\pi\rho} (\not{P} + m_e)_{\rho i'} (\gamma^\alpha)_{i'j'}] [(\not{P}' + m_\mu)_{j\pi'} (\gamma^\nu)_{\pi'\rho'} (\not{K}' - m_\mu)_{\rho' i} (\gamma^\beta)_{ij}]$$

Les sommations commencent et finissent sur les mêmes indices, cela correspond aux traces des produits matriciels, soit encore :

$$\begin{aligned}
& \sum_{s, t, s', t'} M_y M_y^+ = \frac{e^4}{s^2} (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{s}) (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{s}) \\
& \quad \times \text{Tr}[(\not{K} - m_e) \gamma^\mu (\not{P} + m_e) \gamma^\alpha] \text{Tr}[(\not{P}' + m_\mu) \gamma^\nu (\not{K}' - m_\mu) \gamma^\beta] \\
& \sum_{s, t, s', t'} |M_y + M_z|^2 = \frac{e^4}{s^2} (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{s}) (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{s}) \\
& \quad \times \text{Tr}[(\not{K} - m_e) \gamma^\mu (\not{P} + m_e) \gamma^\alpha] \text{Tr}[(\not{P}' + m_\mu) \gamma^\nu (\not{K}' - m_\mu) \gamma^\beta] \\
& + \frac{e^2 g^2}{16 \cos^2 \theta_w s (s - m_z^2)} (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{s}) (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{m_z^2}) \\
& \quad \times \text{Tr}[(\not{K} - m_e) \gamma^\mu (\not{P} + m_e) \gamma^\alpha (g'_\nu - \gamma_5)] \text{Tr}[(\not{P}' + m_\mu) \gamma^\nu (\not{K}' - m_\mu) \gamma^\beta (g'_\nu - \gamma_5)] \\
& + \frac{e^2 g^2}{16 \cos^2 \theta_w s (s - m_z^2)} (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{m_z^2}) (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{s}) \\
& \quad \times \text{Tr}[(\not{K} - m_e) \gamma^\mu (g'_\nu - \gamma_5) (\not{P} + m_e) \gamma^\alpha] \text{Tr}[(\not{P}' + m_\mu) \gamma^\nu (g'_\nu - \gamma_5) (\not{K}' - m_\mu) \gamma^\beta] \\
& + \frac{g^4}{256 \cos^4 \theta_w (s - m_z^2)^2} (g_{\mu\nu} - \frac{(K+P)_\mu (K+P)_\nu}{m_z^2}) (g_{\alpha\beta} - \frac{(K+P)_\alpha (K+P)_\beta}{m_z^2}) \\
& \quad \times \text{Tr}[(\not{K} - m_e) \gamma^\mu (g'_\nu - \gamma_5) (\not{P} + m_e) \gamma^\alpha (g'_\nu - \gamma_5)] \text{Tr}[(\not{P}' + m_\mu) \gamma^\nu (g'_\nu - \gamma_5) (\not{K}' - m_\mu) \gamma^\beta (g'_\nu - \gamma_5)]
\end{aligned}$$

À haute énergie, les termes proportionnels à m_e et m_μ peuvent être négligés ; ainsi que tous les numérateurs contenant $(K+P)$, car :

$$\begin{aligned}
(K+P)_\mu \text{Tr}[(\not{K} - m_e) \gamma^\mu (\not{P} + m_e) \gamma^\alpha] &\approx \text{Tr}(\not{K}(\not{K} + \not{P})\not{P} \gamma^\alpha) = \text{Tr}(K^2 \not{P} \gamma^\alpha) + \text{Tr}(\not{K} P^2 \gamma^\alpha) \\
&= m_e^2 \text{Tr}(\not{P} \gamma^\alpha) + m_\mu^2 \text{Tr}(\not{P} \gamma^\alpha)
\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{s, t, s', t'} |M_y + M_z|^2 \approx \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}[\not{K} \gamma^\mu \not{P} \gamma^\nu] \text{Tr}[\not{P}' \gamma_\mu \not{K}' \gamma_\nu] \\
& + \frac{e^2 g^2}{8 \cos^2 \theta_w s (s - m_z^2)} \text{Tr}[\not{K} \gamma^\mu \not{P} \gamma^\nu (g'_\nu - \gamma_5)] \text{Tr}[\not{P}' \gamma_\mu \not{K}' \gamma_\nu (g'_\nu - \gamma_5)] \\
& + \frac{g^4}{256 \cos^4 \theta_w (s - m_z^2)^2} \text{Tr}[\not{K} \gamma^\mu (g'_\nu - \gamma_5) \not{P} \gamma^\nu (g'_\nu - \gamma_5)] \text{Tr}[\not{P}' \gamma_\mu (g'_\nu - \gamma_5) \not{K}' \gamma_\nu (g'_\nu - \gamma_5)]
\end{aligned}$$

Il faut ensuite calculer les traces des produits de matrices en utilisant les résultats connus des produits de matrices gamma :

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\gamma^\mu) &= 0 ; \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4 g^{\alpha\beta} ; \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4 (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) \\
\text{Tr}(\gamma_5) &= 0 ; \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 0 ; \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = -4 i \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}
\end{aligned}$$

Pour le terme d'interférence, ceci donne lieu au calcul de :

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\not{K} \gamma^\mu \not{P} \gamma^\nu (g'_\nu - \gamma_5)] &= K_\alpha P_\beta \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu (g'_\nu - \gamma_5)) \\
&= 4 K_\alpha P_\beta [g'_\nu (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) + i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}] , \\
&= 4 g'_\nu (K^\mu P^\nu + K^\nu P^\mu - K \cdot P g^{\mu\nu}) + 4 i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} K_\alpha P_\beta
\end{aligned}$$

et pour les produit de traces :

$$\begin{aligned} & Tr[\not{K} \gamma^\mu \not{P} \gamma^\nu (g'_\nu - \gamma_5)] Tr[\not{P}' \gamma_\mu \not{K}' \gamma_\nu (g'_\nu - \gamma_5)] = \\ & [4 g'_\nu (K^\mu P^\nu + K^\nu P^\mu - K \cdot P g^{\mu\nu}) + 4i \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} K_\alpha P_\beta] \\ & [4 g'_\nu (P'_\mu K'_\nu + P'_\nu K'_\mu - P' \cdot K' g_{\mu\nu}) + 4i \epsilon_{\alpha'\mu\beta'\nu} P'^{\alpha'} K'^{\beta'}] \end{aligned}$$

Compte tenu de l'antisymétrie de ϵ et de la relation :

$$\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_{\alpha'\mu\beta'\nu} = 2(g_{\beta'}^\alpha g_{\alpha'}^\beta - g_{\alpha'}^\alpha g_{\beta'}^\beta),$$

on obtient finalement pour le produit des traces :

$$\begin{aligned} & 32 g'^2_\nu [P' \cdot P K' \cdot K + P' \cdot K K' \cdot P] + 32 [P' \cdot K K' \cdot P P - P' \cdot P K' \cdot K] \\ & = 32 (g'^2_\nu - 1) (P' \cdot P K' \cdot K) + 32 (g'^2_\nu + 1) (P' \cdot K K' \cdot P) \end{aligned}$$

Par un calcul similaire pour les autres termes de l'élément de matrice , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{s,t,s',t'} |M_y + M_z|^2 &= [32 \frac{e^4}{s^2} + 4 \frac{e^2 g^2 (g'^2_\nu + 1)}{s(s-m_Z^2) \cos^2 \theta_W} + \frac{g^4 (g'^4_\nu + 6 g'^2_\nu + 1)}{8(s-m_Z^2)^2 \cos^4 \theta_W}] (P' \cdot K) (K' \cdot P) \\ &+ [32 \frac{e^4}{s^2} + 4 \frac{e^2 g^2 (g'^2_\nu - 1)}{s(s-m_Z^2) \cos^2 \theta_W} + \frac{g^4 (g'^2_\nu - 1)^2}{8(s-m_Z^2)^2 \cos^4 \theta_W}] (P' \cdot P) (K' \cdot K) \end{aligned}$$

que l'on peut être réécrire sous une forme plus simple en utilisant : $R(s) = \frac{s}{(s-m_Z^2) \sin^2 2\theta_W}$, ainsi que :

$$e = g \sin \theta_W ; \quad \sin 2\theta_W = 2 \sin \theta_W \cos \theta_W ,$$

$$\begin{aligned} \sum_{s,t,s',t'} |M_y + M_z|^2 &= 32 \frac{e^4}{s^2} [1 + (g_V'^2 + 1) R(s) + \frac{1}{16} (g_V'^4 + 6 g_V'^2 + 1) R(s)^2] (P' \cdot K) (K' \cdot P) \\ &+ 32 \frac{e^4}{s^2} [1 + \frac{1}{2} (g_V'^2 - 1) R(s) + \frac{1}{16} (g_V'^2 - 1)^2 R(s)^2] (P' \cdot P) (K' \cdot K) \end{aligned}$$

On peut alors montrer que , dans l'approximation ultra-relativiste ($m_e \ll |\vec{P}|$; $m_\mu \ll |\vec{P}'|$) :

$$P' \cdot P = \frac{S}{4} (1 - \cos \theta) = K' \cdot K \quad ; \quad P' \cdot K = \frac{S}{4} (1 + \cos \theta) = K' \cdot P .$$

Ceci permet d'achever le calcul du facteur d'espace de phase , en fonction de s et \vec{P} :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{|\vec{P}'|^2 d|\vec{P}'|}{(2\pi)^3 P'^0} \int \frac{d\vec{K}'}{(2\pi)^3 K'^0} \delta^4(K + P - K' - P') = \\ & \int_0^\infty \frac{|\vec{P}'|^2 d|\vec{P}'|}{(2\pi)^3 P'^0} \int \frac{d\vec{K}'}{(2\pi)^3 K'^0} \delta^3(\vec{K} + \vec{P} - \vec{K}' - \vec{P}') \delta(K^0 + P^0 - K'^0 - P'^0) \\ & = \int_0^\infty \frac{|\vec{P}'|^2 d|\vec{P}'|}{(2\pi)^3 P'^0} \int \frac{d\vec{K}'}{(2\pi)^3 K'^0} \delta^3(-\vec{P} + \vec{P} - \vec{K}' - \vec{P}') \delta(\sqrt{s} - K'^0 - P'^0) \\ & = \int_0^\infty \frac{|\vec{P}'|^2 d|\vec{P}'|}{(2\pi)^3 P'^0} \int \frac{\delta(K'^0 + P'^0 - \sqrt{s})}{(2\pi)^3 K'^0} \delta^3(\vec{K}' + \vec{P}') d\vec{K}' \\ & = \int_0^\infty \frac{(P'^0)^2 dP'^0}{(2\pi)^6 P'^0} \frac{\delta(2P'^0 - \sqrt{s})}{P'^0} = \int_0^\infty \frac{dP'^0}{(2\pi)^6} \delta(2P'^0 - \sqrt{s}) = \frac{1}{2(2\pi)^6} \end{aligned}$$

En rassemblant maintenant tous les termes, on obtient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} \left[(1 + \cos^2 \theta) \left(1 + \frac{1}{2} g'_{\nu}{}^2 R(s) + \frac{1}{16} (g'_{\nu}{}^2 + 1)^2 R(s)^2 \right) + \cos \theta \left(R(s) + \frac{1}{2} g'_{\nu}{}^2 R(s)^2 \right) \right],$$

$$\text{avec } \alpha = \frac{e^2}{4\pi}.$$

La section efficace totale est donnée par :

$$\sigma = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left(1 + \frac{1}{2} g'_{\nu}{}^2 R(s) + \frac{1}{16} (g'_{\nu}{}^2 + 1)^2 R(s)^2 \right).$$

Si on étudie la distribution angulaire des muons pour $s \ll M_Z^2$, c'est-à-dire :

$$R(s) \approx -\frac{s}{M_Z^2 \sin^2 2\theta_w} \text{ et } R(s)^2 \approx 0, \text{ la section efficace différentielle se réduit à :}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4s} \left[(1 + \cos^2 \theta) \left(1 - \frac{g'_{\nu}{}^2 s}{2 M_Z^2 \sin^2 2\theta_w} \right) - \cos \theta \frac{s}{M_Z^2 \sin^2 2\theta_w} \right].$$

Les courants neutres faibles apportent une contribution en $\cos \theta$ qui est asymétrique autour de $\theta = \pi/2$. Elle a été observée pour la première fois auprès du collisionneur DESY à Hambourg à $\sqrt{s} = 34 \text{ GeV}$ au début des années 80.

À LEP100, c'est-à-dire lorsque \sqrt{s} est choisie au voisinage de la masse du Z, qui est une particule instable, le facteur de résonance $R(s)$ qui diverge, doit être remplacé par sa valeur correcte qui prend en compte la largeur Γ_Z du Z, soit :

$$R_Z(s) = \frac{s}{\sin^2 2\theta (s - |M_Z - i \frac{\Gamma_Z}{2}|)}$$

La section efficace totale devient alors :

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \left(1 + \frac{1}{16 \sin^4 2\theta_w} \frac{s^2}{(s - M_Z^2 + \frac{\Gamma_Z^2}{4})^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2} \right)$$

Au point de résonance ($s = M_Z^2 - \Gamma_Z^2/4$), compte tenu que $\sin^2 2\theta_w \approx 0,25$ et que $\Gamma_Z^2 \ll M_Z^2$ on obtient:

$$\sigma_{max} = \frac{4\pi\alpha^2}{3\Gamma_Z^2}.$$

7 Pour en savoir plus :

Sur l'équation de Dirac et son formalisme mathématique :

- B. Thaller , The Dirac Equation, Springer
- J.J. Sakurai, Advanced Quantum mechanics , Addison-Wesley
- Borken and Drell , Relativistic Quantum Mechanics

Sur la phénoménologie et la théorie des interaction électrofaibles

- B.R. Martin and G. Shaw, Particle Physics, Wiley
- F. Halzen and A. Martin, Quarks and Leptons , Wiley
- P. Renton, Electroweak Interactions, Cambridge University Press
- T.D. Lee , Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood academic publishers
- Greiner et Müller, Gauge Theory of weak interactions, Springer